

## EVALUACIÓN DE MODELOS TURBULENTOS PARA LA OBTENCIÓN DEL PERFIL DE ENERGÍA CINÉTICA TURBULENTA PARA UN FLUJO EN PLACA PLANA

### EVALUATION OF TURBULENT MODELS FOR OBTAINING THE TURBULENT KINETIC ENERGY PROFILE IN A FLAT PLATE FLOW

Franco L. Cortes<sup>a,b</sup> y Santiago Márquez Damián<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC-CONICET/UNL), Predio Dr. Alberto Cassano, Colectora Ruta Nac. N° 168, Km. 0, Paraje El Pozo, Santa Fe, Argentina,  
<https://santafe.conicet.gov.ar/cimec/>

<sup>b</sup>Universidad Tecnológica Nacional, FRSF, Lavaisse 610, Santa Fe, Argentina,  
<http://www.frsf.utn.edu.ar/>

**Palabras clave:** perfil de energía cinética turbulenta, leyes de pared, modelos de turbulencia, sub-capa viscosa

**Resumen.** En la Mecánica Computacional de Fluidos aplicada a problemas prácticos, es esencial modelar el comportamiento de los flujos turbulentos cerca de las paredes. Se han propuesto modelos turbulentos que capturan el perfil de velocidades cerca de la pared con excelente precisión, no así para el caso de la energía cinética turbulenta. En este estudio se evalúan los modelos de turbulencia,  $k - \omega$  SST y  $k - \omega$ , incluidos en OpenFOAM (R), y se implementa el modelo  $k - \omega$  Low Reynolds. Los resultados resaltan las limitaciones en los modelos  $k - \omega$  SST y  $k - \omega$  para capturar la evolución de la energía cinética turbulenta hacia la pared, mostrando que el modelo  $k - \omega$  Low Reynolds ofrece una descripción más precisa y completa.

**keywords:** turbulent kinetic energy profile, laws of the wall, turbulence models, viscous sub-layer.

**Abstract.** In Computational Fluid Mechanics applied to practical problems, accurately modeling the behavior of turbulent flows near walls is essential. Turbulence models have been proposed to accurately capture the velocity profile near the wall, but this precision is lacking, especially regarding turbulent kinetic energy. This study evaluates turbulence models,  $k - \omega$  SST and  $k - \omega$ , implemented in OpenFOAM(R), and introduces the  $k - \omega$  Low Reynolds model. The results highlight the limitations of the  $k - \omega$  SST and  $k - \omega$  models in capturing the evolution of turbulent kinetic energy near the wall. It is demonstrated that the  $k - \omega$  Low Reynolds model provides a more precise and comprehensive description.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el estudio de flujos turbulentos por medio de modelos de ecuaciones de Navier Stokes promediadas (RANS) es de gran importancia obtener perfiles precisos para las variables turbulentas, como la energía cinética,  $k$ , la disipación,  $\epsilon$  y la disipación específica  $\omega$  dado que a partir de ellas es posible calcular la viscosidad turbulenta y finalmente el perfil de velocidades. Sin embargo algunos modelos no son capaces de computar estas variables con buena aproximación en las cercanías de la pared, para valores de  $y^+ < 50$ , siendo  $y^+$  la distancia normal a la pared adimensional tal como se encuentra en la Ecuación (1). A continuación se presentan las adimensionalizaciones de las variables que son utilizadas en este trabajo.

$$k^+ = \frac{k}{u_\tau^2} \quad u^+ = \frac{U_x}{u_\tau} \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad \omega^+ = \frac{\omega \nu}{u_\tau^2} \quad \epsilon^+ = \frac{\epsilon \nu}{u_\tau^4} \quad (1)$$

Siendo  $u_\tau$  la velocidad de corte en la pared. Los modelos  $k - \omega$  SST (Menter y Esch, 2001) y  $k - \omega$  (Wilcox, 2000) capturan el perfil de velocidades correctamente así como la disipación turbulenta específica ( $\omega$ ) pero no la energía cinética turbulenta ( $k$ ). En pos de solucionar este problema aparecen las correcciones para bajo número de Reynolds, presentadas por Wilcox (2000) que tiene la particularidad de capturar el perfil de  $k$  con mejor aproximación para el caso de un flujo bidimensional en un canal infinito debido a la implementación de tres funciones de cierre,  $\alpha$ ,  $\alpha^*$  y  $\beta^*$  que producen una mayor sensibilidad en la subcapa laminar (Wilcox y Mansour, 1992). Estas funciones convierten los coeficientes constantes del modelo original en variables cuyas expresiones dependen de la relación entre la viscosidad turbulenta y molecular, distinguiéndose tres zonas,

- En la zona más alejada de la pared ( $y^+ > 100$ ) donde los efectos turbulentos son superiores a los viscosos se tiene un comportamiento asintótico, recuperando los valores del modelo original.
- En la zona de transición, que es la de mayor interés en este estudio, los efectos viscosos y turbulentos tienen valores considerables sin poder despreciarse ninguno. En esta zona se produce el crecimiento no lineal de las inestabilidades del flujo desde la zona laminar hacia la de régimen turbulento. Debido a este fenómeno se produce un pico de energía cinética turbulento, el cual se desea capturar. Esto se puede verificar al analizar los perfiles de  $k$  adimensionales para el caso de simulaciones numéricas directas (DNS) (Moser et al., 1999) o datos experimentales Degraaff y Eaton (2000), donde el máximo valor de  $k$  se da en la zona de transición con un  $y^+ \approx 14$ .
- En la capa límite laminar ( $y^+ < 11$ ), los efectos viscosos predominan y dichas correcciones tienden a valores constantes menores que los utilizados para un flujo totalmente desarrollado.

En el presente trabajo se describen las ecuaciones gobernantes del modelo  $k - \omega$  original con sus correcciones para bajo números de Reynolds. Estas modificaciones fueron implementadas en la plataforma OpenFOAM(R) con el propósito de compararlas con el modelo  $k - \omega$  SST ampliamente utilizado en la actualidad y disponible en el software de referencia.

## 2. MODELOS DE TURBULENCIA

### 2.1. Modelo turbulento $k - \omega$

Este modelo proporciona un conjunto de ecuaciones para describir las características generales de un campo turbulento no homogéneo y las distribuciones de velocidad media. Las ecuaciones se basan en la idea de que la turbulencia puede caracterizarse por cantidades intensivas que obedecen a ecuaciones de transporte no lineales. Estas ecuaciones contienen términos para describir la convección por el flujo medio, la amplificación debida a la interacción con un gradiente de velocidad medio, la disipación y difusión debida a la interacción de la turbulencia consigo misma. Las ecuaciones son similares al conjunto propuesto por Kolmogorov (Kolmogorov, 1941). La hipótesis utilizada en el modelo es que existe una *densidad de energía cinética turbulenta* así como una *densidad de tasa de disipación de energía*, satisfaciendo ambas ecuaciones de transporte. También se supone que la viscosidad turbulenta describe la difusión de momento debido a las fluctuaciones turbulentas. La idea al proponerse este modelo es que con suposiciones simples y plausibles sobre la naturaleza de los términos de interacción, las ecuaciones quedan correctamente definidas. De la misma manera todas las constantes adimensionales que aparecen en las ecuaciones pueden estimarse mediante argumentos generales. El objetivo de este modelo es lograr capturar la capa límite turbulenta en forma completa (las zonas laminar, de transición y turbulenta) y el flujo libre (Saffman, 1970).

En este trabajo se evalúan además las correcciones de bajo número de Reynolds presentadas en Wilcox y Mansour (1992). Este modelo se postuló con la idea de lograr describir el crecimiento no lineal de las inestabilidades de flujo desde la zona laminar hacia la turbulenta. Para ello se propusieron modificaciones viscosas para el modelo  $k - \omega$  que permiten lograr una estrecha concordancia con las mediciones y con el resultado de la simulación numérica directa para el flujo en canales y tuberías. Estas modificaciones permiten una mejor predicción cerca de la superficie ( $k \rightarrow y^2$  cuando  $y \rightarrow 0$ , siendo  $y$  la distancia perpendicular a la pared) haciendo factible capturar el pico máximo y pronunciado de  $k$  cerca de la superficie. Esto se logra con tres coeficientes de cierre específicos para la transición ( $\alpha$ ,  $\alpha^*$  y  $\beta^*$ ), logrando de esta manera que las ecuaciones del modelo capturen con precisión las tres zonas deseadas. A continuación se describen las ecuaciones del modelo  $k - \omega$  (Wilcox, 2000), cabe destacar la formulación varía según la edición del libro de Wilcox que se utilice como referencia.

Ecuación de momento:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \left[ (\mu + \mu_t) \left( \vec{\nabla} \vec{U} + \vec{\nabla} \vec{U}^T - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \right) \right] \quad (2)$$

Ecuación para el balance de energía cinética turbulenta:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \vec{\nabla} \cdot (\rho k \vec{U}) = \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k \right] + G_k - \rho \beta^* k \omega + S_k \quad (3)$$

Ecuación para la tasa de disipación:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \omega \vec{U}) = \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \vec{\nabla} \omega \right] + G_\omega - \rho \beta \omega^2 + S_\omega \quad (4)$$

Cálculo de la viscosidad turbulenta:

$$\mu_t = \rho \alpha^* \frac{k}{\omega} \quad (5)$$

Donde  $G_k$  y  $G_\omega$ :

$$G_k = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad G_\omega = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (6)$$

Los coeficientes y las funciones de amortiguamiento que se comparten entre el modelo  $k - \omega$  original y el  $k - \omega$  corregido, son:

$$\beta = \beta_0 f_\beta, \quad \sigma = \frac{1}{2}, \quad \sigma^* = \frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\beta_0 = \frac{9}{125}, \quad f_\beta = \frac{1 + 70\chi_\omega}{1 + 80\chi_\omega}, \quad \chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij} \Omega_{jk} S_{ki}}{(\beta_0^* \omega)^3} \right| \quad (8)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (9)$$

$$\beta_0^* = \frac{9}{100}, \quad f_\beta^* = \begin{cases} 1, & \text{si } \chi_k \leq 0 \\ \frac{1 + 680\chi_k^2}{(1 + 400\chi_k^2)}, & \text{si } \chi_k > 0 \end{cases}, \quad \chi_k \equiv \frac{1}{\omega^3} \vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} \omega \quad (10)$$

Las correcciones para el caso Low Reynolds corresponden a la columna de la derecha, mientras que en la izquierda se presentan los coeficientes del modelo original,

**$k - \omega$  original**

$$\alpha^* = 1 \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{13}{25} \quad (12)$$

$$\beta^* = \beta_0^* f_{\beta^*} \quad (13)$$

**$k - \omega$  con corrección para bajo numero de Reynolds**

$$\alpha^* = \frac{\alpha_0^* + Re_\tau / Re_k}{1 + Re_\tau / Re_k} \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{13}{25} \frac{\alpha_0 + Re_\tau / Re_\omega}{1 + Re_\tau / Re_\omega} (\alpha^*)^{-1} \quad (15)$$

$$\beta^* = \frac{9}{100} \frac{4/15 + (Re_\tau / Re_\beta)^4}{1 + (Re_\tau / Re_\beta)^4} f_{\beta^*} \quad (16)$$

Parámetros adicionales:

$$Re_\beta = 8 \quad Re_k = 6 \quad Re_\omega = 2,95 \quad \alpha_0^* = \frac{\beta_0}{3} \quad \alpha_0 = \frac{1}{9} \quad Re_\tau = \frac{k}{\omega \nu} \quad (17)$$

Donde  $\vec{U}$  es la velocidad media,  $p$  la presión,  $\mu$  la viscosidad dinámica molecular,  $\mu_t$  la viscosidad dinámica turbulenta,  $\tau_{ij}$  tensor de esfuerzos de Reynolds específicos,  $S_k$  y  $S_\omega$  son términos fuente internos para  $k$  y  $\omega$  respectivamente.

## 2.2. $k - \omega$ Shear Stress Transport (SST)

Este modelo surgió como solución a las desventajas de los modelos  $k - \epsilon$  para determinar la escala de longitud de la turbulencia. La experiencia ha demostrado que la elección de la ecuación de escala tiene un efecto significativo en la predicción de flujos turbulentos y que la ecuación de  $\epsilon$  tiene graves limitaciones en la región cercana a la pared. Es bien sabido (Rodi y Scheuerer, 1986) que los modelos basados en la ecuación  $\epsilon$  conducen a una sobrepredicción de la escala de longitud turbulenta en flujos con gradientes de presión adversos, resultando en altos esfuerzos cortantes en las paredes y altas tasas de transferencia de calor. En combinación

con extensiones de números Reynolds bajos, la ecuación  $\epsilon$  ha demostrado ser numéricamente rígida, lo que lleva a una reducción significativa de la robustez numérica. (Menter y Esch, 2001)

La solución propuesta con este modelo es, en lugar de resolver la ecuación para la tasa de disipación turbulenta,  $\epsilon$ , utilizar una ecuación para la frecuencia turbulenta,  $\omega$ , de grandes escalas. La ecuación para  $\omega$  tiene la ventaja de predecir con mayor precisión la escala de longitud turbulenta en flujos de gradiente de presión adversos, lo que conduce a mejores predicciones de la tensión cortante en la pared. Además, el modelo tiene una formulación de bajo Reynolds muy simple, que no requiere términos adicionales de amortiguación en la pared. El comportamiento correcto de la subcapa laminar se logra mediante una condición de frontera de Dirichlet para  $\omega$ .

Una de las principales ventajas de este modelo es su robustez incluso para aplicaciones complejas y la reducida resolución que exige una integración en la pared. Menter (1992) señaló que la principal deficiencia del modelo estándar  $k - \omega$  es la fuerte sensibilidad de la solución a los valores de corriente libre para  $\omega$  fuera de la capa límite. Para evitar este problema, se ha propuesto una combinación del modelo  $k - \omega$  cerca de la pared y el modelo  $k - \epsilon$  lejos de la pared, dando lugar al modelo SST (Shear-Stress-Transport) Menter (1994).

Este modelo se describió en Menter y Esch (2001). Siguiendo la implementación adoptada en OpenFOAM(R) se utilizarán los coeficientes actualizados de Menter et al. (2003) pero con los términos de producción consistentes del artículo <https://turbmodels.larc.nasa.gov/sst.html> así como la adición del término  $F_3$  opcional para paredes rugosas de Hellsten (1998) y el control de decaimiento opcional de Spalart y Rumsey (2007).

Ecuación para el balance de energía cinética turbulenta:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} k = P - \beta^* \omega k + \vec{\nabla} \cdot (D_k \vec{\nabla} k) + S_k \quad (18)$$

Ecuación para la tasa de disipación:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \omega = \frac{\gamma}{\nu_t} P - \beta \omega^2 + \vec{\nabla} \cdot (D_\omega \vec{\nabla} \omega) + 2(1 - F_1) \frac{\sigma_{\omega 2}}{\omega} \vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} \omega + S_\omega \quad (19)$$

$$P = \min \left[ \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, 10\beta^* k \omega \right] \quad \tau_{ij} = \nu_t \left( 2S_{ij} - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \vec{U} \cdot \mathbf{I} \right) - \frac{2}{3} k \mathbf{I} \quad (20)$$

$$D_k = (\nu + \nu_t \sigma_k) \quad D_\omega = (\nu + \nu_t \sigma_\omega) \quad (21)$$

Ecuación para la viscosidad turbulenta:

$$\nu_t = a_1 \frac{k}{\max(a_1 \omega, b_1 F_2 F_3 2 S_{ij})} \quad (22)$$

Coefficientes de cierre y relaciones auxiliares

$$F_1 = \tanh \left[ \min \left[ \max \left[ \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right], \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right]^4 \right] \quad (23)$$

$$CD_{k\omega} = \max \left[ 2\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \vec{\nabla} k \cdot \vec{\nabla} \omega, 10^{-10} \right] \quad (24)$$

$$F_2 = \tanh \left[ \max \left[ \frac{2\sqrt{k}}{\beta^*\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega} \right]^2 \right] \quad F_{23} = \min \left[ 150 \frac{\nu}{\omega y^2}, 10 \right] \quad (25)$$

$$C_\mu = 0,09; \quad \alpha_{k1} = 0,85; \quad \alpha_{k2} = 1; \quad \alpha_{\omega1} = 0,5; \quad \alpha_{\omega2} = 0,856; \quad \beta_1 = 0,075 \quad (26)$$

$$\beta_2 = 0,0828; \quad \gamma_1 = \frac{5}{9}; \quad \gamma_2 = 0,44; \quad \beta^* = 0,09; \quad a_1 = 0,31; \quad b_1 = 1; \quad c_1 = 10 \quad (27)$$

### 2.3. Código utilizado

Para el desarrollo de este trabajo se utilizó la suite de Mecánica de Fluidos Computacional OpenFOAM(R) en su versión OpenFOAM+, v2106 que cuenta con la implementación del modelo  $k - \omega$  SST descrito anteriormente. La evaluación de los modelos  $k - \omega$  y  $k - \omega$  Low Reynolds presentado por Wilcox (2000) se realizó a partir implementaciones propias en la misma plataforma. Los cálculos se realizaron utilizando el método Simple Consistent (SIMPLEC) teniendo en cuenta que en los casos evaluados los residuos alcanzaran valores por debajo de  $1 \times 10^{-7}$  para las variables de velocidad y de presión permitiendo realizar una comparación entre los resultados obtenidos. Se utilizaron esquemas de segundo orden para una mejor precisión y una reducción de la difusión numérica.

### 3. APLICACIÓN DE LOS MODELOS PROPUESTOS

El caso analizado es un flujo en canal con  $Re_{2h} = 13750$  como se detalla en Wilcox (2000). Dado que no se disponía de información sobre la malla y los parámetros físicos utilizados, se realizó el estudio considerando un flujo en canal con una altura ( $h$ ) igual a 1 m y una profundidad de 0,1 m. Con estos parámetros, se calculó la velocidad media del flujo para cumplir la condición de  $Re_{2h}$ .

$$Re_{2h} = \frac{U_{\text{inf}} 2h}{\nu} \quad U_{\text{inf}} = \frac{\nu}{Re_{2h} 2h} \quad (28)$$

Utilizando la Ecuación (28) y considerando  $\nu = 1,388 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , se calcula una velocidad media  $U_{\text{inf}} = 0,096 \text{ m/s}$ . Con esta velocidad se procede determinar la distancia de desarrollo del flujo, teniendo en cuenta que en este escenario se debe cumplir  $Re_x > 1 \times 10^5$ . La expresión para calcular  $Re_x$  es la siguiente:

$$Re_x = \frac{U_{\text{inf}} x}{\nu} \quad (29)$$

se obtiene una distancia de desarrollo de  $x = 72,3 \text{ m}$ , por lo que se optó por tener una longitud de canal de 100 m y evaluar los resultados a los 98 m para asegurarse obtener un perfil completamente desarrollado.

Dado que Wilcox (2000) tampoco especifica el rango de valores de  $y^+$  para los cuales el modelo responde correctamente, se realizó un barrido con diferentes mallas, asegurando que  $y^+$  en la primera celda sea de 32, 16, 8, 4, 2, 1, 0,6, 0,4 y 0,2 y se presentan los resultados correspondientes al mejor caso. Es fundamental mencionar que las correcciones aplicadas a los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta^*$  (en el modelo  $k - \omega$  SST el coeficiente  $\alpha$  se denota como  $\gamma_1$ ) son funciones

de la relación entre los esfuerzos turbulentos y los esfuerzos moleculares,  $Re_\tau$ , permitiendo de esta manera que el valor se modifique dependiendo de la zona en que se este calculando como se observa en las Ecuaciones (15) y (16) respectivamente. Estos coeficientes influyen directamente a los términos de producción de  $k$  y  $\omega$ , amplificándolos o reduciéndolos según la zona del flujo en la que se encuentren. Las condiciones de borde para el problema se presentan en la Tabla 1.

Pared	$\vec{U}$ [m/s]	$k$ [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	$\omega$ [1/s]	$\nu_t$ [m <sup>2</sup> /s]	$p$ [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]
bottom	(0; 0; 0)	0	OWF	SWF	$\vec{\nabla}p \cdot \vec{n} = 0$
top	$\vec{\nabla}\vec{U} \cdot \vec{t} = 0$	$\vec{\nabla}k \cdot \vec{n} = 0$	$\vec{\nabla}\omega \cdot \vec{n} = 0$	$1,2 \times 10^{-2}$	$\vec{\nabla}p \cdot \vec{n} = 0$
inlet	(0, 0,96; 0; 0)	$3 \times 10^{-5}$	$3 \times 10^{-3}$	$1,2 \times 10^{-2}$	$\vec{\nabla}p \cdot \vec{n} = 0$
outlet	$\vec{\nabla}\vec{U} \cdot \vec{n} = 0$	$\vec{\nabla}k \cdot \vec{n} = 0$	$\vec{\nabla}\omega \cdot \vec{n} = 0$	$1,2 \times 10^{-2}$	0

Tabla 1: Condiciones de borde, donde OWF indica una ley de pared para  $\omega$  (OpenFOAM, v2106) y SWF indica la ley de pared continua de Spalding (Spalding, 1961)

Debido a la tridimensionalidad en el cálculo realizado con OpenFOAM, se ha aplicado la condición de borde “empty” en las paredes restantes. Esta condición de borde se utiliza para anular el computo de la componente correspondiente a la dirección normal al borde aplicado de la ecuación en estudio y logrando así soluciones bi y unidimensionales. La ley de pared para  $\omega$  (OWF) utiliza el método de combinación “Stepwise” para calcular el valor de  $\omega$  en la primera celda (OpenFOAM, v2106). Para  $\nu_t$  se utiliza la ley de pared continua de Spalding (SWF, Spalding (1961)).

## 4. RESULTADOS

Se llevó a cabo un barrido de mallas con el objetivo de obtener los mejores resultados para cada uno de los modelos. Esto permitió analizar el cambio en los valores obtenidos según el tamaño de la malla y determinar si existe un rango en el cual los resultados dejen de ser consistentes con la física del problema. Se compararon entonces los perfiles de energía cinética turbulenta y de velocidad en función de la distancia vertical de la placa plana con los obtenidos por simulación numérica directa presentados por Moser et al. (1999). Dado que es conocida la incapacidad del modelo turbulento  $k - \omega$  original de capturar el pico de energía cinética turbulenta, se recurre a los los perfiles presentados en Wilcox (2000) como referencia de verificación.

### 4.1. Análisis de perfiles

En la siguientes figuras se presentan los resultados de las mallas para  $y^+ = 0,2$  en la primera celda, con los cuales se obtuvieron los mejores resultados comparativos. Como se ilustra en la Figura 1, los tres modelos capturan con precisión el perfil adimensional de velocidades  $u^+$ . De manera similar, logran representar adecuadamente el perfil de viscosidad turbulenta  $\nu_t$  (Figura 3), a pesar que no suceda lo mismo para el perfil de  $k$  (Figura 2) (Tomboulides, 2018). Es importante recordar que la viscosidad turbulenta se calcula según se muestra en la Ecuación (5). Se observa que la viscosidad turbulenta esta directamente relacionada con  $k$  y  $\alpha^*$  e inversamente relacionada con  $\omega$ . Por lo tanto, para obtener el un perfil de  $\nu_t$  acorde a la referencia, es necesario lograr un crecimiento de  $\omega$  o un decrecimiento de  $\alpha^*$  debido a que el perfil de  $k$  difiere para cada modelo en análisis.

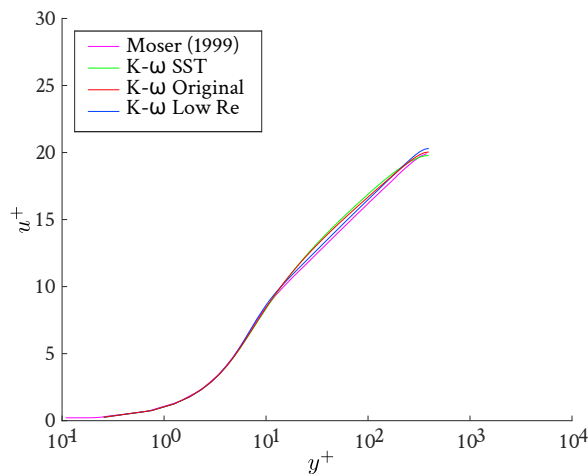


Figura 1: Perfil de velocidad adimensional

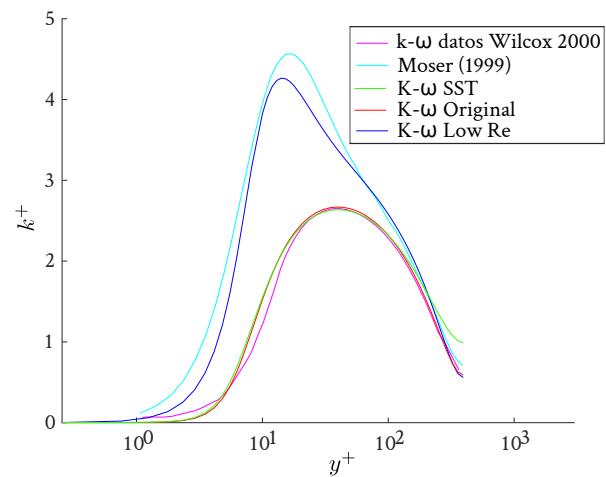


Figura 2: Perfil de energía cinética turbulenta adimensional

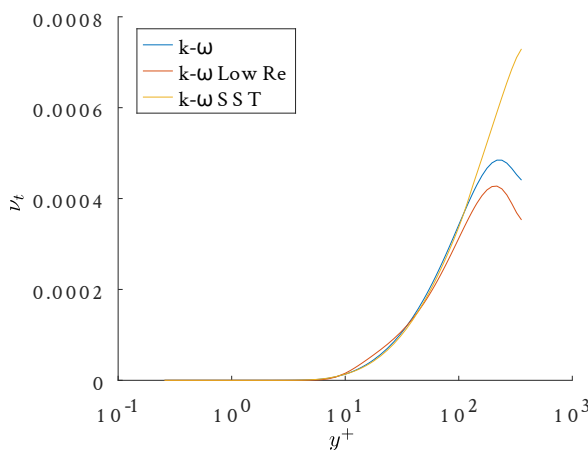


Figura 3: Perfil de viscosidad cinemática turbulenta ( $\nu_t$ )

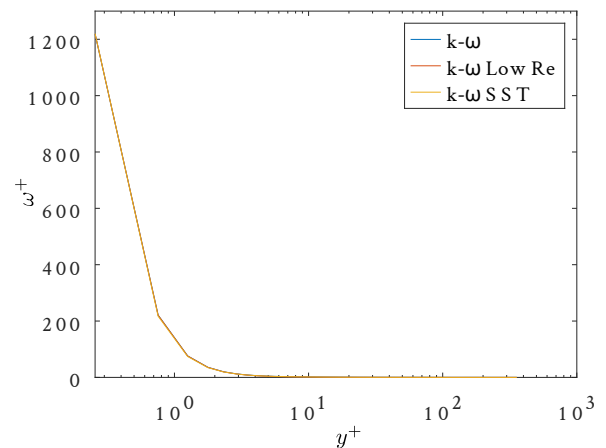


Figura 4: Perfil de disipación turbulenta específica adimensional ( $\omega^+$ )

En la Figura 4 se observa que los tres modelos predicen perfiles similares para  $\omega$ . Sin embargo, al ser  $\omega$  una variable que no representa una cantidad física, no se puede comparar con datos experimentales. Por esta razón, se procedió a comparar la disipación de energía cinética turbulenta  $\epsilon$ , como se presenta en la Figura 5 donde se aprecia que ningún modelo logra capturar adecuadamente esta cantidad. Para llevar a cabo la comparación, es necesario utilizar la relación,

$$\epsilon = \beta^* \omega k \tag{30}$$

Si bien para el modelo corregido el valor en las cercanías de la pared mejora, los resultados se encuentran aun alejados de la referencia obtenida mediante DNS (Moser et al., 1999).

Durante este estudio se modificaron los coeficientes  $\alpha^*$  y  $\beta^*$  de las ecuaciones de cierre con el objetivo de mejorar el perfil de  $\epsilon$ . Los resultados indican que cualquier alteración en estos coeficientes de manera individual conlleva a una disminución drástica del perfil de  $\omega$  y genera una



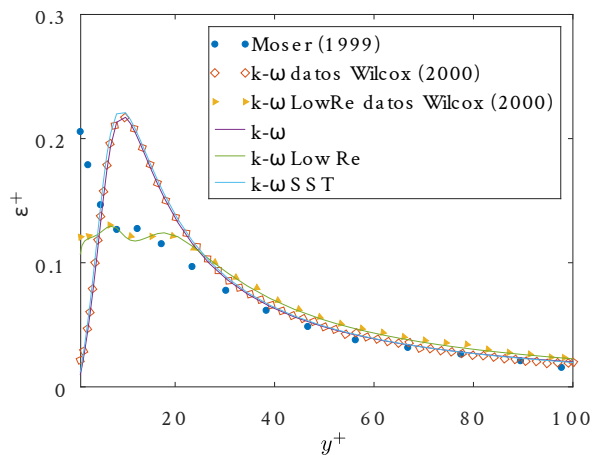


Figura 5: Perfil de disipación turbulenta adimensional,  $\epsilon^+$ . Símbolos, referencias de Moser et al. (1999) y Wilcox (2000). Líneas continuas, resultados obtenidos por los autores.

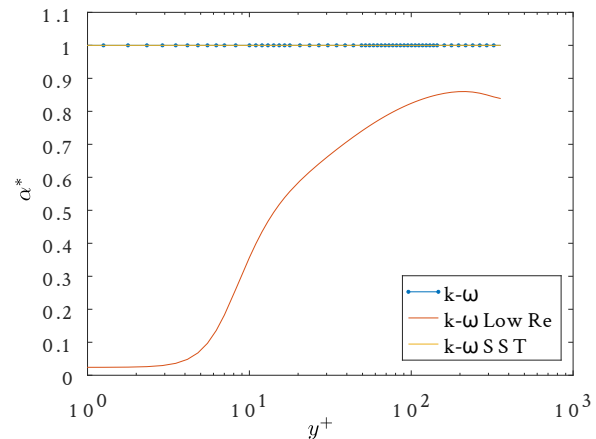


Figura 6: Perfil  $\alpha^*$

mayor distorsión en el perfil de  $\epsilon$  en las cercanías de la pared. Existen relaciones específicas y tendencias asintóticas que deben cumplirse simultáneamente, las cuales serán objeto de estudio en investigaciones futuras.

No obstante, regresando a la discusión sobre el cálculo de  $\nu_t$ , se puede observar que además de  $k$  otro parámetro clave que se ve afectado en este modelo es  $\alpha^*$ . En la Figura 6, se observa que experimenta una modificación significativa, generando un decaimiento hacia la pared, de manera que compensa el aumento de  $k$ .

## 5. CONCLUSIONES

Como conclusión principal, podemos afirmar que tras haber implementado los modelos  $k-\omega$  y  $k-\omega$  Low Reynolds y basándonos únicamente en el número de  $Re_{2h}$ , se logró reproducir los resultados numéricos presentados por Wilcox (2000). Con respecto a la falta de exactitud para el perfil de  $\epsilon$ , es importante aclarar que (Wilcox, 2006) presenta el mismo modelo con algunas modificaciones, aun así estas dificultades persisten hasta hoy.

Para este problema, es crucial destacar que, aunque en una primera instancia al estudiar las ecuaciones de transporte para  $k$  y  $\omega$  podría inferirse la relación de los  $s$   $\alpha$  en la ecuación de  $\omega$  a través del término fuente  $G_\omega$  y del coeficiente  $\beta^*$  en la ecuación de  $k$  mediante el término sumidero  $\beta^*k\omega$ , existen términos adicionales, como el término de difusión, que relacionan ambas ecuaciones mediante la viscosidad turbulenta. Estos términos adicionales dificultan el análisis paramétrico.

Aunque por limitaciones espacio no se incluyeron los resultados de todas las mallas utilizadas en el trabajo, se puede afirmar que aquellas con  $y^+ < 1$  en la primera celda presentaron valores aceptables aunque se observaron pequeñas variaciones en el pico de  $k$  en comparación con la malla con  $y^+ = 0, 2$ . Las modificaciones propuestas de los coeficientes  $\alpha$ ,  $\alpha^*$  y  $\beta^*$  pueden aplicarse en el modelo  $k-\omega$  SST mejorando la captura del perfil de  $k$  en las cercanías de la pared y ofreciendo una aproximación más precisa que la actualmente disponible.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el financiamiento provisto por la ANPCyT mediante el proyecto PICT-2018-03106 “Simulación computacional de flujos particulados turbulentos aplicados a sistemas fluido-sólido y fluido-fluido”. Se reconoce también el aporte de los desarrolladores y las comunidades asociadas a los proyectos OpenFOAM®, Octave, Inkscape y Paraview® cuyas herramientas fueron utilizadas en este trabajo.

## REFERENCIAS

- Degraaff D.B. y Eaton J.K. Reynolds-number scaling of flat-plate turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, vol. 422, pp. 319-346., 2000.
- Hellsten A. Some improvements in Menter’s k-omega-sst turbulence model. *29th AIAA Fluid Dynamics Conference, AIAA-98-2554*, 1998.
- Kolmogorov A. Equations of turbulent motion of an incompressible fluid. *Izv. Akad. Nauk, SSSR Ser. fiz. VI, no 1-2*, pp. 56-58, 1941.
- Menter F.R. Improved two-equation k-omega turbulence models for aerodynamic flows. *Ames Research Center, Moffett Field, California*, 1992.
- Menter F.R. Two equation eddy-viscosity turbulence modeling for engineering applications. *AIAA Journal*, 32, 1598-1605., 1994.
- Menter F.R. y Esch T. Elements of industrial heat transfer prediction. *16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering (COBEM)*, 2001.
- Menter F.R., Kuntz M., y Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4*, ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers, Begell House, Inc., 625 - 632, 2003.
- Moser R., Kim J., y Mansour. Direct numerical simulations of turbulent channel flow up to  $Re = 590$ . *Phys. Fluids 11*, 943–945, 1999.
- OpenFOAM. <https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/guide-bcs-wall-turbulence-omegawallfunction.html>. v2106.
- Rodi W. y Scheuerer G. Scrutinizing the k-epsilon turbulence model under adverse pressure gradient conditions. *ASME J. Fluids Eng.*, 108, pp. 174–179, 1986.
- Saffman P.G. A model for inhomogeneous turbulent flow. *Proc. R. Soc. Lond. A* 1970 317, 417-433, 1970.
- Spalart P.R. y Rumsey C.L. Effective inflow conditions for turbulence models in aerodynamic calculations. *AIAA Journal*, 45(10), 2544 - 2553, 2007.
- Spalding D.B. A single formula for the "law of the wall". 1961.
- Tomboulides A. A novel numerical treatment of the near-wall regions in the k omega class of rans models. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2018.
- Wilcox D. y Mansour J. The remarkable ability of turbulence model equations to describe transition. *DCW Industries, Inc.*, 1992.
- Wilcox D.C. *Turbulence Modeling for CFD*, volumen second Edition. DCW Industries, Inc., 2000.
- Wilcox D.C. *Turbulence Modeling for CFD*, volumen Third Edition. DCW Industries, Inc., 2006.