

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO A BAJO NÚMERO DE REYNOLDS EN UN
MICRORESONADOR DEL TIPO PLACA. PARTE 4: PLACAS CUADRADAS CON $M \times M$
PERFORACIONES**

**NUMERICAL SIMULATION OF THE LOW REYNOLDS NUMBER FLOW AROUND A
PLATE-TYPE MICRO-RESONATOR. PART 4: SQUARE PLATES WITH $M \times M$ HOLES**

**Sofía S. Sarraf^a, Ezequiel J. López^a, Gustavo A. Ríos Rodríguez^b, Luciano Garelli^b,
Laura Battaglia^{b,c} y Jorge D'Elía^b**

^a*Instituto de Investigación en Tecnologías y Ciencias de la Ingeniería, Universidad Nacional del
Comahue-CONICET, Buenos Aires 1400, 8300 Neuquén, Argentina, (sofia.sarraf,
ezequiel.lopez)@fain.uncoma.edu.ar*

^b*Centro de Investigación en Métodos Computacionales, Universidad Nacional del Litoral-CONICET,
Predio CONICET "Dr. Alberto Cassano", colec. RN 168 s/n – Par. El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina,
(gusadr, lbattaglia)@santafe-conicet.gov.ar, (lgarelli, jdelia)@cimec.unl.edu.ar*

^c*Grupo de Investigación en Métodos Numéricos en Ingeniería (GIMNI), Universidad Tecnológica
Nacional (UTN), Facultad Regional Santa Fe (FRSF) Lavaysse 610, Santa Fe (3000), Argentina*

Palabras clave: flujo de Stokes, MEMS, factor de calidad, OpenFOAM, Galerkin-BEM.

Resumen. Se presenta una modelización numérica del flujo tridimensional de un fluido viscoso newtoniano en régimen oscilatorio alrededor de un microresonador de tipo placa utilizado en sistemas microelectromecánicos (MEMS). El microresonador consiste en una placa de oro cuadrada, de muy bajo espesor, perforada con $M \times M$ orificios cuadrados equiespaciados, donde $M = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. La placa está sostenida por cuatro vigas soporte empotradas en sus extremos y vibrando en su primer modo natural por encima de un sustrato fijo. Se calcula el factor de calidad del dispositivo, expresado como el cociente entre la energía total del sistema y aquella que disipa al fluido en un ciclo de oscilación, tanto con OpenFOAM, como con Galerkin BEM (Galerkin *Boundary Element Method*).

Keywords: Stokes flow, MEMS, quality factor, OpenFOAM, Galerkin BEM.

Abstract. We present a numerical modeling of the three-dimensional flow of a Newtonian viscous fluid in oscillatory regime around a plate-type micro-resonator used in microelectromechanical systems (MEMS). The micro-resonator consists of a squared gold plate having a very low thickness and perforated with $M \times M$ equally spaced square holes, where $M = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. The plate is held up by four supporting beams clamped at its ends and vibrates above a fixed substrate at its first natural mode. The quality factor of the device is computed, which is expressed as the ratio between the total energy of the system and the energy dissipated to the fluid in an oscillation cycle, both OpenFoam and Galerkin BEM (Galerkin *Boundary Element Method*) were used for these simulations/computations.

1. INTRODUCCIÓN

En un trabajo anterior (Sarraf *et al.*, 2022) se considera el empleo del método de elementos de borde (BEM, por *Boundary Element Method*) para una modelización numérica del flujo tridimensional (3D) de un fluido viscoso newtoniano en régimen oscilatorio alrededor de un microresonador de tipo placa, de aquellos utilizados en sistemas microelectromecánicos (MEMS, por *microelectromechanical systems*). En particular, interesa el comportamiento dinámico de las placas vibrantes de estos dispositivos teniendo en cuenta el amortiguamiento viscoso. La cinemática de la placa se asumirá conocida, i.e. el esquema numérico no será de interacción fluido-estructura (FSI, por *Fluid Structure Interaction*).

El BEM se basa en la formulación de un problema de valores de borde de tipo elíptico, como una ecuación integral de contorno, o ecuación integral de borde (BIE, por *Boundary Integral Equation*).

En trabajos anteriores (Sarraf *et al.*, 2018b, 2014a) se consideró el empleo de BEM en este tipo de problemas, mediante una BIE en velocidades con un operador integral completado, usualmente denotado en la literatura como CIV-BIE (por *Completed Indirect Velocity BIE*), o bien CDL-BIE (por *Completed Double-Layer BIE*) (Power y Wrobel, 1995), e.g. ver también los textos de Kim y Karrila (1991); Pozrikidis (1992). En cualquier caso, la CIV-BIE es una ecuación integral de tipo indirecta y de segunda clase, donde utiliza simultáneamente las densidades superficiales de doble y simple capa, mientras que su término fuente está determinado a partir de la velocidad del flujo no-perturbado. La solución numérica de la CIV-BIE puede hacerse, en particular, mediante una técnica de colocación al centroide de los elementos, o bien con una ponderación de Galerkin (GBEM, por Galerkin BEM), e.g. ver Sarraf *et al.* (2014b); D'Elía *et al.* (2011); D'Elía *et al.* (2014); Sarraf *et al.* (2018a).

A diferencia de trabajos previos, en este trabajo: (i) además de GBEM se emplea OpenFOAM® como segundo método numérico; y (ii) se modela una serie de casos conformados por placas cuadradas metálicas con $M \times M$ orificios cuadrados, y que cuenta con validaciones tanto experimentales como numéricas, en base a los experimentos de De Pasquale *et al.* (2010) sobre 28 casos, y con los siguientes esquemas de distribución de los orificios: 4×4 , 9×9 , 16×16 , 25×25 , 36×36 , 49×49 , y 64×64 .

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Se trata de dispositivos MEMS conformados por placas de oro con orificios cuadrados que fueron utilizadas en los experimentos de De Pasquale *et al.* (2010), donde las placas fueron excitadas electrostáticamente para que vibraran en su modo fundamental, midiendo ópticamente las amplitudes de vibración, mientras que el factor de calidad Q lo extrajeron utilizando un método basado en la potencia media. En dichos experimentos se rotularon las diversas muestras experimentales con un índice topológico I_T .

La dimensión nominal a , la longitud s_0 de los lados de las orificios cuadrados, y el esquema de los orificios $M \times M$ son dados en la Tabla 1. Dicha tabla incluye además la frecuencia de resonancia f y el factor de calidad Q , siguiendo la nomenclatura definida por De Pasquale *et al.* (2010). Las propiedades del material están dadas en la Tabla 2. Notar que en el sistema de coordenadas adoptado, el eje x es paralelo al lado de mayor dimensión de la placa, mientras que el eje z es perpendicular al sustrato (véase esquema de la Fig. 1).

| Índice topológico I_T | Número de orificios $M \times M$ | Lado de la placa a [μm] | Lado del orificio s_0 [μm] | Espesor de la placa h [μm] | Frecuencia de resonancia f [kHz] | Factor de calidad Q |
|----------------------------|-------------------------------------|---|--|--|---------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 4 | 55.91 | 7.20 | 6.297 | 71.04 | 96.14 |
| 2 | 4 | 55.07 | 9.31 | 6.291 | 74.54 | 104.35 |
| 3 | 4 | 55.70 | 10.70 | 6.302 | 76.67 | 153.40 |
| 4 | 4 | 55.89 | 12.59 | 6.322 | 79.21 | 198.82 |
| 5 | 9 | 76.25 | 7.18 | 6.311 | 58.16 | 94.23 |
| 6 | 9 | 76.40 | 9.29 | 6.303 | 59.65 | 97.74 |
| 7 | 9 | 76.47 | 10.68 | 6.311 | 61.57 | 116.96 |
| 8 | 9 | 76.41 | 12.62 | 6.299 | 63.58 | 163.52 |
| 9 | 16 | 96.45 | 7.21 | 6.309 | 47.78 | 57.59 |
| 10 | 16 | 96.51 | 9.31 | 6.298 | 48.76 | 75.18 |
| 11 | 16 | 96.33 | 10.68 | 6.307 | 50.69 | 96.37 |
| 12 | 16 | 96.12 | 12.61 | 6.296 | 54.06 | 98.52 |
| 13 | 25 | 115.47 | 7.21 | 6.304 | 41.27 | 46.77 |
| 14 | 25 | 115.42 | 9.31 | 6.275 | 42.28 | 71.27 |
| 15 | 25 | 115.39 | 10.71 | 6.298 | 43.80 | 84.72 |
| 16 | 25 | 115.74 | 12.60 | 6.302 | 45.66 | 81.43 |
| 17 | 36 | 137.14 | 7.21 | 6.307 | 34.17 | 44.19 |
| 18 | 36 | 137.08 | 9.31 | 6.296 | 35.03 | 60.71 |
| 19 | 36 | 137.13 | 10.68 | 6.332 | 36.61 | 69.88 |
| 20 | 36 | 137.11 | 12.61 | 6.286 | 39.72 | 71.68 |
| 21 | 49 | 157.31 | 7.18 | 6.303 | 29.82 | 33.56 |
| 22 | 49 | 157.28 | 9.29 | 6.278 | 29.86 | 47.36 |
| 23 | 49 | 157.63 | 10.69 | 6.285 | 31.00 | 52.20 |
| 24 | 49 | 157.13 | 12.59 | 6.285 | 33.60 | 57.60 |
| 25 | 64 | 185.96 | 7.19 | 6.312 | 22.04 | 28.31 |
| 26 | 64 | 185.28 | 9.33 | 6.321 | 25.36 | 42.89 |
| 27 | 64 | 185.97 | 10.70 | 6.287 | 26.28 | 47.00 |
| 28 | 64 | 185.13 | 12.58 | 6.297 | 28.13 | 50.38 |

Tabla 1: Datos para los MEMS de oro con orificios cuadrados obtenidos por [De Pasquale et al. \(2010\)](#).

2.1. Factor de calidad

A continuación recordamos el cálculo del factor de calidad Q en un resonador, e.g. ver [Sarraf et al. \(2018b\)](#), factor que se define como

$$Q = 2\pi \frac{E_{\text{total}}}{\Delta E} \quad (1)$$

donde E_{total} es la energía total ingresada al sistema y ΔE la energía disipada por ciclo de oscilación debida al trabajo de las fuerzas viscosas y de presión sobre la placa. La E_{total} corresponde al contenido de energía inicialmente entregado a la placa, la cual se puede calcular con

$$E_{\text{total}} = K_{p,\text{máx}} = \int_{V_p} \frac{1}{2} \rho_p \mathbf{u}_{p,\text{máx}} \cdot \mathbf{u}_{p,\text{máx}} dV \quad (2)$$

donde $K_{p,\text{máx}}$ es la energía cinética máxima de la placa (cuando $t = 0$), $\mathbf{u}_{p,\text{máx}}$ es la velocidad máxima de la placa, ρ_p es la densidad del material de la placa y V_p es su volumen. Dado que el

| Propiedad | Valor |
|--------------------------------|---|
| módulo de Young de la placa | $Y = 1.5 \times 10^{14} \mu\text{g}/(\text{s } \mu\text{m})$ |
| densidad de la placa | $\rho_p = 19.32 \times 10^{-6} \mu\text{g}/\mu\text{m}^3$ |
| densidad del fluido (aire) | $\rho_f = 1.1786 \times 10^{-9} \mu\text{g}/\mu\text{m}^3$ |
| viscosidad dinámica del fluido | $\mu = 1.86 \times 10^{-2} \mu\text{g}/(\text{s } \mu\text{m})$ |

Tabla 2: Propiedades físicas de la placa (oro) y del fluido (aire).

movimiento de la placa se asume sólo en la dirección z , su velocidad está dada por

$$\mathbf{u}_p(x, t) = (0, 0, \dot{Z}(x, t)) = (0, 0, A\omega Z_0(x) \cos(\omega t)) \quad (3)$$

En la expresión anterior A es la amplitud del movimiento, $Z_0(x)$ es el primer modo de deformación de la placa, y ω es la frecuencia angular. Luego, $\mathbf{u}_{p,\text{máx}} = (0, 0, A\omega Z_0(x))$. Reemplazando esta expresión en la Ec. (2) se obtiene

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} \rho_p A^2 \omega^2 \int_{V_p} [Z_0(x)]^2 dV \quad (4)$$

La energía disipada por ciclo se calcula como el negativo del trabajo realizado por las fuerzas viscosa y de presión sobre la superficie de la placa a lo largo de un ciclo, $-W_{d,\text{ciclo}}$,

$$\Delta E = -W_{d,\text{ciclo}} = - \int_{\text{ciclo}} \delta W_d \quad (5)$$

El diferencial de trabajo δW_d se lo calcula como

$$\delta W_d = \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{u}_p dt dS = (\mathbf{f}_p + \mathbf{f}_v) \cdot \mathbf{u}_p dt dS, \quad (6)$$

donde \mathbf{f}_p y \mathbf{f}_v son las fuerzas de presión y viscosa sobre la placa, respectivamente, y dS es el diferencial de superficie sobre el cual actúa la fuerza \mathbf{f}_d . Luego

$$\Delta E = - \int_0^T \int_{S_p} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{u}_p dS dt = -A\omega \int_0^T \left[\int_{S_p} f_d^z Z_0(x) dS \right] \cos(\omega t) dt \quad (7)$$

donde S_p es la superficie total de la placa, T el período de oscilación y f_d^z la componente de la fuerza \mathbf{f}_d en la dirección z .

3. RESOLUCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE VOLÚMENES FINITOS

Una de las metodologías empleadas para la resolución de los casos planteados es el Método de Volúmenes Finitos (FVM, por *Finite Volume Method*). Para tal fin se utiliza en este trabajo un método de mallas colocadas aplicando el software de código abierto **OpenFOAM®**.

La simetría de la geometría respecto de dos planos mutuamente perpendiculares que pasan por el centroide de la placa y son perpendiculares a la misma, además de la simetría esperada para el flujo, permite acotar el dominio de flujo a 1/4 de la placa, disminuyendo de este modo el costo computacional. La placa oscila por encima de un sustrato fijo, el cual se asume que se extiende infinitamente de manera horizontal, es decir, la frontera inferior del dominio es una pared sólida. La placa se encuentra inmersa en un medio infinito, por lo tanto el dominio computacional debe limitarse con fronteras ubicadas suficientemente lejos de la misma con el objetivo de

que no influyan de forma apreciable a la solución numérica del problema. Estas fronteras fueron ubicadas aproximadamente a $50 \mu\text{m}$ del extremo de los soportes en la dirección longitudinal de la placa, a $100 \mu\text{m}$ del borde de la misma en la dirección transversal y a $190 \mu\text{m}$ por encima. La Fig. 1 muestra un esquema del dominio computacional donde se indican estas distancias desde la placa a las superficies frontera. En dicha figura se indica, además, la disposición de ejes coordenados cartesianos adoptada.

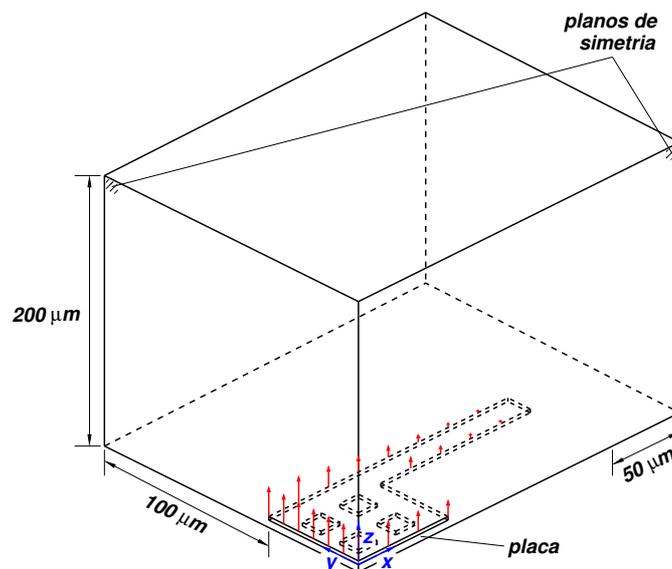


Figura 1: Esquema del dominio computacional y disposición de ejes coordenados adoptada.

Las mallas fueron generadas con la utilidad `snappyHexMesh` provista con la distribución oficial de **OpenFOAM**[®]. Debido a que el tamaño de las placas es variable, lo cual, a su vez, modifica el tamaño del dominio computacional, la cantidad de celdas varió entre un total de 670 Kceldas para la placa con índice topológico 1 y 1.6 Mceldas para la placa con índice 28. El tamaño de las celdas en las zonas relativamente alejadas de la placa es de $3 \mu\text{m}$, mientras que en cercanías de la placa es de $0.75 \mu\text{m}$, alcanzado valores del orden de $0.3 \mu\text{m}$ en el interior de los agujeros. La Fig. 2 presenta un detalle de las mallas sobre las placas de índice topológico 25 y 28.

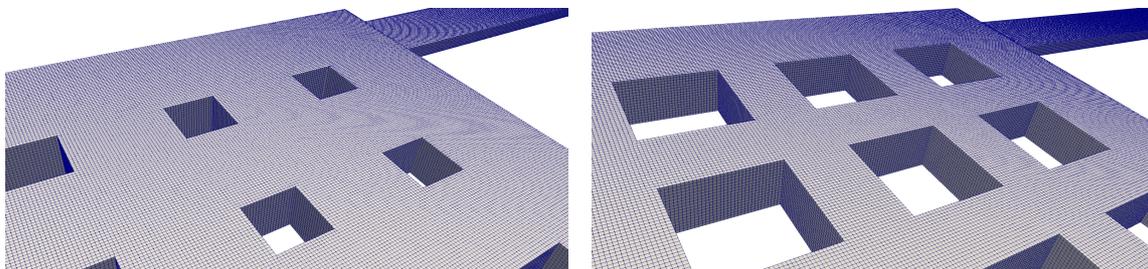


Figura 2: Detalle de la malla sobre la superficie de las placas de índice topológico 25 (izq.) y 28 (der.).

Debido a que el movimiento de la placa provoca la modificación del dominio de flujo, la posición de los vértices de las celdas debe actualizarse en el tiempo. Esta tarea se realiza utilizando la clásica técnica laplaciana para el desplazamiento de los vértices con un coeficiente de difusividad inversamente proporcional con la distancia a la placa. Como condición de contorno

para la resolución numérica de este problema se fijaron los desplazamientos sobre las superficies sólidas: desplazamiento sólo en la dirección z para la placa y nulo para el plano inferior. En el resto de las fronteras se permite el deslizamiento tangencial de los puntos.

Se asume que el desplazamiento de la placa en la dirección z corresponde al primer modo de deformación de la misma modulado por una función trigonométrica dependiente del tiempo y de la frecuencia de oscilación. Este primer modo de deformación fue calculado numéricamente empleando el software **Elmer FEM** considerando a la placa como una superficie elástica debido a que su espesor es pequeño respecto de sus otras dimensiones. Para el cálculo del modo fundamental se incorporan a la placa sus respectivos soportes, los cuales se asumen empotrados en sus extremos.

Se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible, laminar e isotérmico empleando un esquema *upwind* de segundo orden acotado en el espacio para los términos convectivos, interpolación lineal con corrección por no ortogonalidad para los términos difusivos, a fin de mantener segundo orden para la aproximación, y el esquema de Crank-Nicolson en el tiempo. Como condiciones de contorno se imponen sobre paredes sólidas no deslizamiento para la velocidad y gradiente normal nulo para la presión, simetría en sendos planos de simetría, y presión total fija en el resto de las fronteras. La velocidad impuesta para las caras de las celdas ubicadas sobre la placa corresponde a la derivada temporal del desplazamiento de la misma. Inicialmente el fluido se encuentra en reposo y la placa en su posición no deformada, adquiriendo el movimiento correspondiente súbitamente en $t = 0$ s. La presión se inicializa con un valor nulo en todo el dominio. El paso de tiempo se mantiene constante durante cada simulación con un valor $\Delta t = T/200$, donde T es el período de oscilación correspondiente. En todos los casos se simularon un total de 3 ciclos, donde cabe mencionar que rápidamente, a partir del segundo ciclo, se alcanza una solución aproximadamente periódica.

Como ejemplo de los resultados obtenidos, la Fig. 3 presenta la distribución de presiones sobre la cara inferior de la placa (enfrentada a la pared inferior) en el instante correspondiente a la mitad del período de oscilación para placas con diferentes índices topológicos. Este instante de tiempo corresponde a la placa sin deformación y con movimiento hacia la pared inferior. Se observa que para una misma cantidad de agujeros, al aumentar el tamaño de los mismos los valores de presión máximos se reducen y se desplazan desde la zona central de la placa hacia sus laterales. Este comportamiento de la presión coincide con el reportado por [De Pasquale et al. \(2010\)](#). Además, para un mismo tamaño de agujero el aumento de su cantidad provoca una disminución de los valores máximos alcanzados por la presión. Interesa en particular analizar la distribución de presión sobre las placas debido a que es la principal componente de la energía disipada por la placa en casos de placas con sustratos (véase la sección §2.1).

4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE ELEMENTOS DE BORDE

Con BEM, el presente caso es asimilado a un flujo exterior a un cuerpo cerrado e inmerso en una corriente que se extiende en un dominio no acotado, para lo cual resulta aplicable la BIE de Power-Miranda-Hebeker (PMH, [Pozrikidis \(1992\)](#)). En esa alternativa, la geometría del dominio se la aproxima mediante una malla finita de elementos colocados únicamente en las superficies del cuerpo (placa y sustrato) y, en particular, con triángulos planos. Dos variantes clásicas dentro de BEM son: (i) una técnica de colocación en los centroides de los elementos, y (ii) una ponderación de Galerkin en los nodos de los elementos ([Sarraf et al., 2014b](#); [D'Elía et al., 2011](#); [D'Elía et al., 2014](#); [Sarraf et al., 2018a](#)). En el presente trabajo solo se emplea BEM mediante ponderación de Galerkin (Galerkin BEM, o GBEM ([Sutradhar et al., 2008](#))), mientras que BEM con colocación se lo descartó debido a un costo computacional relativamente elevado

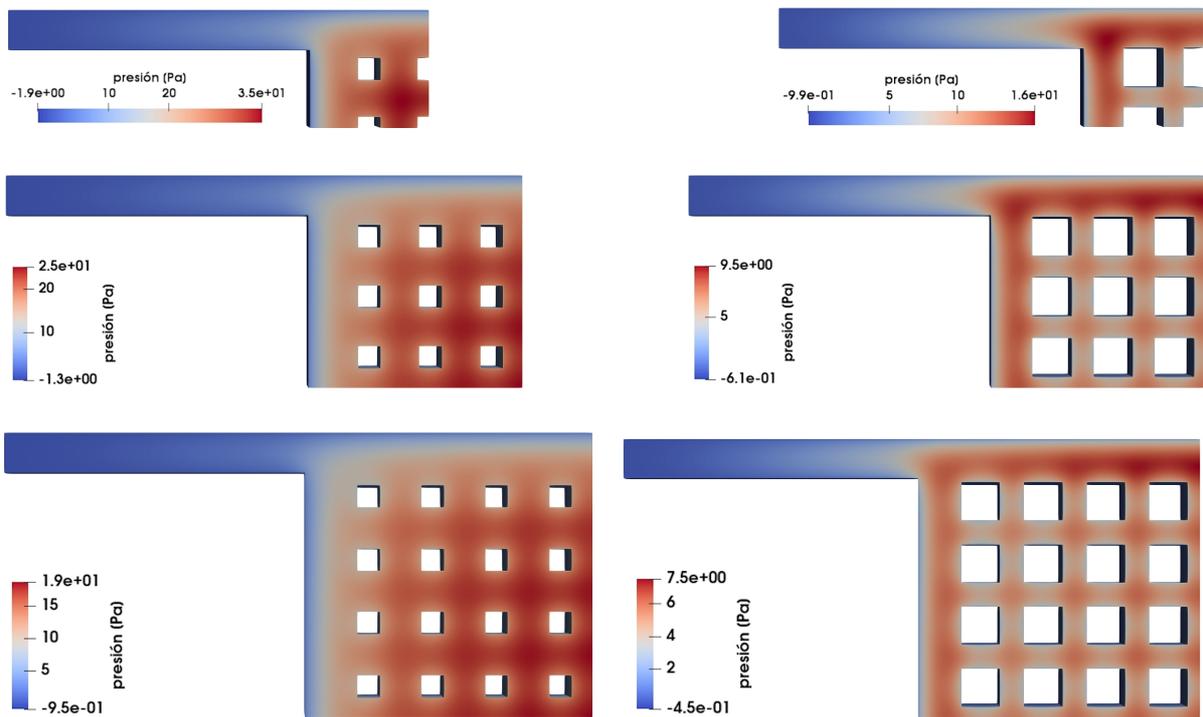


Figura 3: Distribución de presiones sobre la cara inferior de la placa en la mitad del período de oscilación. De arriba a abajo y de izquierda a derecha, índices topológicos 5, 8, 17, 20, 25 y 28.

en recursos de hardware.

En un BEM con geometría fija, la condición de borde es la velocidad impuesta en los nodos y que surge de la derivada en el tiempo del desplazamiento del modo impuesto. En el caso del primer modo de vibración de la placa perforada, la velocidad impuesta es la derivada en el tiempo del desplazamiento modal, mostrado en la Fig. 4.

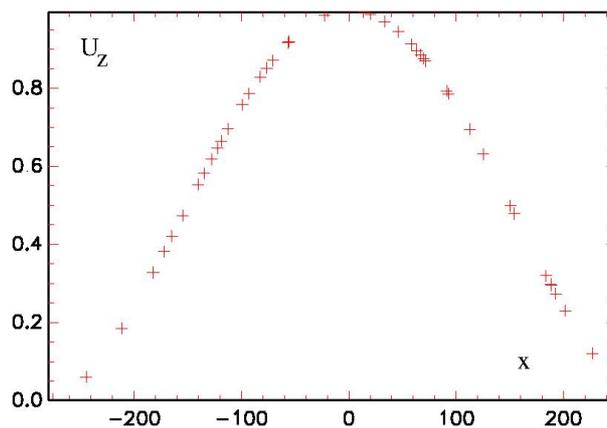


Figura 4: Desplazamiento (virtual) del primer modo que da lugar a la velocidad (impuesta) en el GBEM.

En las Figs. 5 y 6 se muestran los mallados de los casos con índices topológicos $I_T = 4$ (con 2×2 orificios cuadrados) e $I_T = 28$ (con 8×8 orificios cuadrados), respectivamente, donde cada placa está sostenida por cuatro vigas soporte empotradas en sus extremos, y vibrando en su primer modo natural por encima de un sustrato fijo.

En la Tabla 3 se muestran algunos datos del hardware de los servidores utilizados. Para resolver el Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL) se utilizó la rutina **ZGESVX**, la cual utiliza

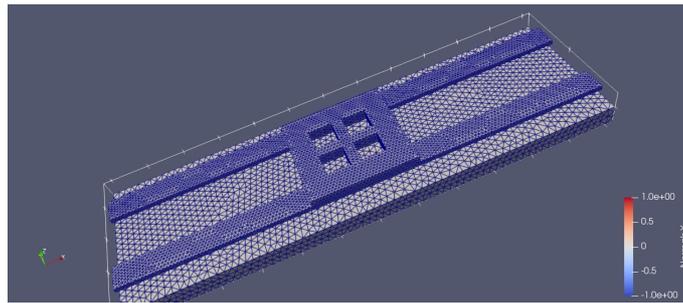


Figura 5: Una vista de una malla para GBEM del caso $I_T = 4$ (con 2×2 orificios cuadrados).

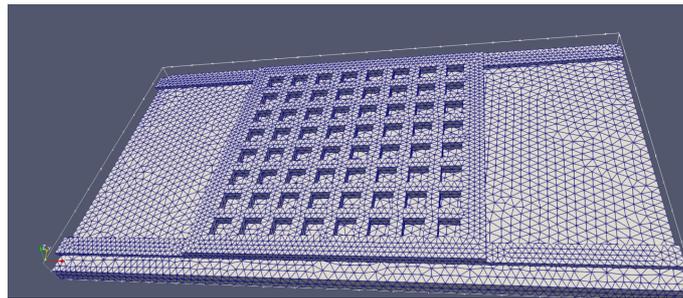


Figura 6: Una vista de una malla para GBEM del caso $I_T = 28$ (con 8×8 orificios cuadrados).

la factorización LU para calcular la solución de un SEL en variable compleja $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde \mathbf{A} es la matriz del sistema de $n \times n$, mientras que \mathbf{X} y \mathbf{B} son matrices de $n \times n_b$, donde n_b es el número de términos independientes en el lado derecho del SEL, retornando además cotas de error en la solución, y una estimación del número de condición, lo cual requiere una matriz auxiliar del mismo tamaño que la del sistema \mathbf{A} . En cambio, la rutina **ZGESV** hace la misma tarea sin dicha matriz auxiliar pero al precio de no retornar cotas de error en la solución, ni una estimación del número de condición. En los experimentos numéricos con GBEM se utilizó un integrador numérico de los coeficientes de la matriz del sistema de ecuaciones que está basado en la cuadratura de Taylor cuádruple suplementado con una Transformación Asinh descrita en [D'Elía et al. \(2017\)](#). En dicho integrador se empleó la regla de cuadratura de Gauss-Legendre (GL) con n_{1d} puntos de cuadratura a lo largo de cada coordenada de integración, implicando un total de n_{1d}^4 puntos por cada par de interacción. Además, se utilizó una regla Q_{22} , en donde el primer subíndice 2 denota el número de puntos de GL en las autointegrales y en la primera capa de elementos vecinos, mientras que el segundo subíndice 2 es el número de puntos de GL presentes en las remanentes capas de elementos.

| | Modelo | Frecuencia [GHz] | cores | memoria cache [MiB] | memoria RAM [GiB] | CPUMark (al 20230910) |
|----|---------------------|------------------|-------|---------------------|-------------------|-----------------------|
| S1 | AMD Ryzen 7 3700X | 2.2 | 8 | 32 | 64 | 22632 |
| S2 | Threadripper 2970WX | 3.0 | 24 | 64 | 128 | 29851 |

Tabla 3: Algunos datos de los servidores utilizados en las simulaciones numéricas de la Tabla 1 hechas con GBEM.

En la Fig. 7 se muestran los factores de calidad Q : experimental, cómputo por **OpenFOAM**[®], cómputo por otro código de mecánica de fluidos computacional (o CFD, por *Computational Fluid Dynamics*), cómputo semi-analítico (los dos últimos de [De Pasquale et al. \(2010\)](#)), y cómputo (parcial) por GBEM, en función del índice topológico I_T . Notar que los saltos en las

curvas de la Fig. 7 se relacionan con las cantidades de orificos $M \times M$ listadas en la Tabla 4.

| Salto | Intervalo I_T | Número de orificos $M \times M$ |
|-------|-----------------------|---------------------------------|
| 1 | $1 \leq I_T \leq 4$ | 4 |
| 2 | $5 \leq I_T \leq 8$ | 9 |
| 3 | $9 \leq I_T \leq 12$ | 16 |
| 4 | $13 \leq I_T \leq 16$ | 25 |
| 5 | $17 \leq I_T \leq 20$ | 36 |
| 6 | $21 \leq I_T \leq 24$ | 49 |
| 7 | $25 \leq I_T \leq 28$ | 64 |

Tabla 4: Saltos en las curvas de la Fig. 7: su relación con el índice topológico I_T y el número de orificos $M \times M$.

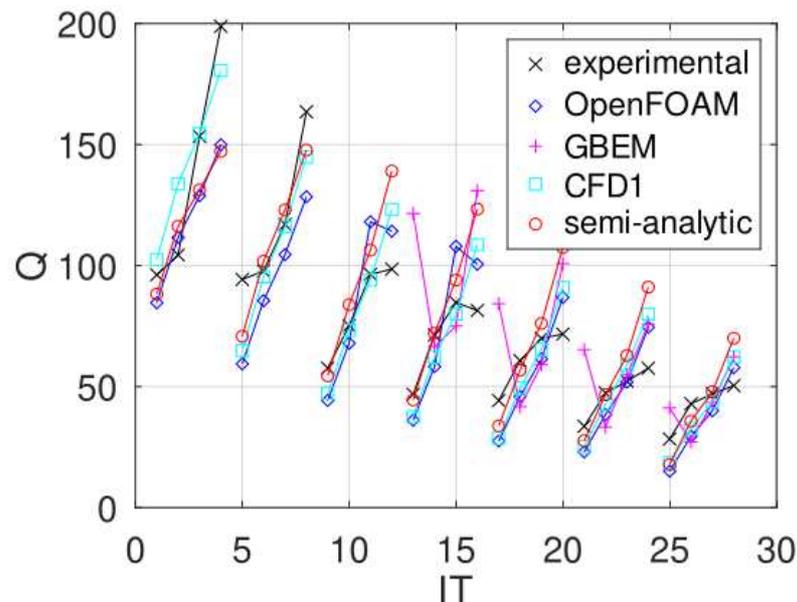


Figura 7: Factores de calidad Q : experimental (\times en color negro), por **OpenFOAM**[®] (\diamond en color azul), por otro código CFD (\square en color azul-verdoso (*cyan*)), semi-analítico (\circ en color rojo), los dos últimos hechos por [De Pasquale et al. \(2010\)](#), y por GBEM ($+$ en color magenta), en función del índice topológico I_T .

5. CONCLUSIONES

Los factores de calidad Q mostrados en la Fig. 7 indican que el grado de concordancia con las curvas experimentales (y con los obtenidos con otros métodos numéricos de otros autores) son muy buenos con **OpenFOAM**[®], mientras que los presentes resultados con GBEM son provisionales y, a la fecha, se trabaja en mejorar su calidad, lo que puede atribuirse el haber utilizado reglas de cuadratura de Gauss-Legendre (GL), las cuales funcionan muy bien en problemas de flujo oscilatorio a frecuencias bajas, mientras que aquí cabría utilizar reglas de cuadratura aptas para integrandos muy oscilatorios, i.e. para frecuencias elevadas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, proyecto PIP 112-201501-00588CO), la Agencia Nacional de Promoción

Científica y Tecnológica (ANPCyT, proyectos PICT-2018-1607, PICT-2018-2920), Universidad Nacional del Litoral (UNL, proyectos CAI+D 2020-506-201901-00110-LI, CAI+D 2020-506-201901-00140-LI), Universidad Tecnológica Nacional (UTN, proyecto PID-UTN-8132), Universidad Nacional del Comahue (UNCo, proyecto PIN 04/I-251), y ha sido parcialmente realizado con los recursos del *Free Software Foundation/GNU-Project*, tales como GNU–Linux–OS, GNU–GFortran, GNU–Octave, GNU–Git, GNU–Doxygen, y GNU–GIMP, así como otros recursos de código abierto, tales como \LaTeX , PGF, TikZ, y PGFPlots.

REFERENCIAS

- De Pasquale G., Veijola T., y Somà A. Modelling and validation of air damping in perforated gold and silicon MEMS plates. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 20(1):015010, 2010. doi:10.1088/0960-1317/20/1/015010.
- D’Elía J., Battaglia L., Cardona A., y Storti M. Full numerical quadrature of weakly singular double surface integrals in Galerkin boundary element methods. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 27(2):314–334, 2011.
- D’Elía J., Battaglia L., Cardona A., Storti M., y Ríos Rodríguez G. Galerkin boundary elements for a computation of the surface tractions in exterior Stokes flows. *J Fluids Eng- Trans ASME*, 136(11):111102–111117, 2014.
- D’Elía J., Sarraf S., López E., Battaglia L., y Ríos Rodríguez G. Integración numérica en ecuaciones integrales de superficie con núcleos débilmente singulares. Transformación de coordenadas asinh. En *Mecánica Computacional*, vol. XXXV. La Plata, 2017.
- Kim S. y Karrila S.J. *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*. Butterworth-Heinemann, 1991.
- Power H. y Wrobel L.C. *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1995.
- Pozrikidis C. *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*. Cambridge University Press, New York, USA, 1992.
- Sarraf S., López E., Battaglia L., Ríos Rodríguez G., y D’Elía J. Amortiguamiento viscoso en un microresonador en flujo reptante simulado con elementos de borde. En *Mecánica Computacional*, volumen XXXIII, páginas 263–272. 2014a.
- Sarraf S., López E., Battaglia L., Ríos Rodríguez G., y D’Elía J. An improved assembling algorithm in boundary elements with Galerkin weighting applied to three-dimensional Stokes flows. *J Fluids Eng- Trans ASME*, 140(1):011401, 2018a. doi:10.1115/1.4037690.
- Sarraf S., López E., Battaglia L., Ríos Rodríguez G., y D’Elía J. Simulación numérica del flujo a bajo número de Reynolds en un microresonador del tipo placa. Parte 1: OpenFOAM y GBEM. En *Mecánica Computacional*, vol. XXXVI. Tucumán, 2018b.
- Sarraf S., López E., Ríos Rodríguez G., y D’Elía J. Validation of a Galerkin technique on a boundary integral equation for creeping flow around a torus. *Comp. Appl. Math.*, 33(1):63–80, 2014b.
- Sarraf S., López E., Ríos Rodríguez G., Garelli L., Battaglia L., y D’Elía J. Simulación numérica del flujo a bajo número de Reynolds en un microresonador del tipo placa. parte 3: variaciones en la geometría. En *Mecánica Computacional*, vol. XXXIX. Bahía Blanca, BsAs, 2022.
- Sutradhar A., Paulino G.H., y Gray L.J. *Symmetric Galerkin Boundary Element Method*. Springer, London, England, 2008.