

## ATENUACIÓN DE VIBRACIONES EN VIGAS CON RESONADORES BASADOS EN “INERTERS” DISTRIBUIDOS PERIÓDICAMENTE

### ATTENUATION OF VIBRATIONS IN BEAMS WITH RESONATORS BASED IN "INERTERS" PERIODICALLY DISTRIBUTED

Cecilia I. Stoklas<sup>a</sup>, Víctor H. Cortínez<sup>a,b,c</sup>, Patricia N. Dominguez<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada (CIMTA), Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, [vcortine@frbb.utn.edu.ar](mailto:vcortine@frbb.utn.edu.ar)*

<sup>b</sup>*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, [pdoming@uns.edu.ar](mailto:pdoming@uns.edu.ar)*

<sup>c</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnica, CONICET*

**Palabras clave:** Viga Timoshenko localmente resonante, Bandgaps, Homogeneización.

**Resumen.** En el presente trabajo se desarrollan fórmulas analíticas para predecir bandas de atenuación, a partir de un enfoque de homogeneización de vigas Timoshenko con resonadores basados en “inerters” distribuidos longitudinalmente de forma regular. Se analiza la estructura de estos bandgaps y se compara su eficiencia en la atenuación de vibraciones con respecto a los clásicos resonadores masa-resorte.

**Keywords:** Timoshenko Beam Locally Resonant, Bandgaps, Homogenization.

**Abstract.** In the present work, analytical formulas are developed to predict attenuation bands, from a homogenization approach of Timoshenko beams with resonators based on "inerters" distributed longitudinally in a regular manner. The structure of these bandgaps is analyzed and its efficiency in vibration attenuation is compared with respect to the classic mass-spring resonators.

## 1 INTRODUCCIÓN

Una estrategia para el control de vibraciones en estructuras tipo viga que ha suscitado interés en los últimos años consiste en el acoplamiento de resonadores (sistemas masa-resorte) distribuidos periódicamente en su longitud. En efecto, se ha demostrado que estos sistemas vigas-resonadores presentan bandgaps (BG), que corresponden a rangos de frecuencias con amplitudes atenuadas de vibración de las vigas (Sun et al., 2010; Cortínez et al., 2022; Dominguez et al., 2022). Desde el punto de vista práctico, tiene interés ampliar el ancho de tales BG, lo que es posible a partir de aumentar la masa de los resonadores. Sin embargo, tal estrategia tiene aspectos negativos ya que implicaría un aumento en el peso de la estructura. Por tal motivo, es de interés el desarrollo de nuevos tipos de resonadores que puedan resolver este inconveniente (Han et. al, 2023). En tal sentido, recientemente se ha propuesto la utilización de resonadores basados en inerters (Zhou et al., 2022). Éstos son mecanismos que ofrecen una inercia independiente de la frecuencia, mucho más grande que su propia masa física. En un trabajo reciente, los autores presentaron un enfoque homogeneizado para analizar el problema de vibraciones transversales de vigas localmente resonantes (LR) tipo Bernoulli-Euler considerando resonadores tipo “inerters”. Continuando con el estudio, en este trabajo se propone analizar la dinámica de una viga tipo Timoshenko acoplada a una gran cantidad de resonadores tipo inerters periódicamente distribuidos a lo largo de la longitud.

Se realiza una formulación homogeneizada del sistema que conduce a una ecuación gobernante similar a la de una viga Timoshenko homogénea, aunque presentando una densidad efectiva dependiente de la frecuencia. Se analiza la estructura de BG de tal sistema a partir de una metodología analítica de simple resolución que permite determinar las frecuencias iniciales y finales de tales bandas. Se realizan estudios paramétricos para el diseño de los BG y se muestra un ejemplo donde se verifica la adecuada predicción de tales resonadores mediante un estudio analítico de vibraciones forzadas. Finalmente se compara la eficiencia en la atenuación de vibraciones con respecto a los clásicos resonadores masa-resorte.

## 2 MODELO HOMOGENEIZADO DE UNA VIGA TIMOSHENKO LR

Se considera una viga tipo Timoshenko con resonadores basados en “inerters” distribuidos de manera periódica sobre la longitud (véase la Figura 1a). Asumiendo que la estructura soporta una carga transversal armónica y distribuida, las ecuaciones gobernantes tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} GkA \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + F_t + q_0(x) \cos \omega t &= 0, \\ -EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - GkA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta \right) + \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1a,b)$$

mientras que para cada resonador  $i$ -ésimo se plantea el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= -k_a (u_1 - v) - b \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right), \\ k_b (u_2 - v) &= b \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right), \end{aligned} \quad (2a,b)$$

siendo  $v(x,t)$  el desplazamiento transversal de la viga,  $\theta$  el ángulo rotacional,  $G$  el módulo de

elasticidad transversal,  $k$  el coeficiente de corte,  $\rho A$  la masa por unidad de longitud de la viga huésped (sin resonadores),  $k_a$  y  $k_b$  las constantes de rigidez de los resortes del resonador,  $u_1$  y  $u_2$  los desplazamientos de los puntos del resonador (véase la Figura 1b),  $q_0(x)$  la amplitud de la carga transversal,  $\omega$  la frecuencia de excitación,  $EI$  la rigidez flexional,  $M$  la masa del resonador,  $b$  la inercia (Zhou et al., 2022) y  $F_I$  la fuerza de interacción del conjunto de resonadores que actúan en cada celda, definido como  $F_I = \sum_{j=1}^{NR} [k_a(u_1 - v) + k_b(u_2 - v)] \delta(x - x_j)$ , donde  $NR$  es el número de resonadores y  $\delta$  la función Delta de Dirac en los puntos  $j$ -ésimos.

Al sumar (2a) y (2b), y asumiendo que los resonadores se encuentran aproximadamente distribuidos de manera continua en la viga, esto es  $\delta(x - x_j) \approx \frac{1}{l}$  para  $|x - x_j| < \frac{l}{2}$  y 0 para  $|x - x_j| > \frac{l}{2}$ , el término  $F_I$  puede describirse como:

$$F_I = -\rho A \alpha \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \tag{3}$$

donde  $\alpha = \frac{M}{\rho A l}$  corresponde a la relación entre la masa del resonador y la viga huésped por unidad de longitud  $l$ . El sistema (1-3) se completa junto con las correspondientes condiciones de borde e iniciales.

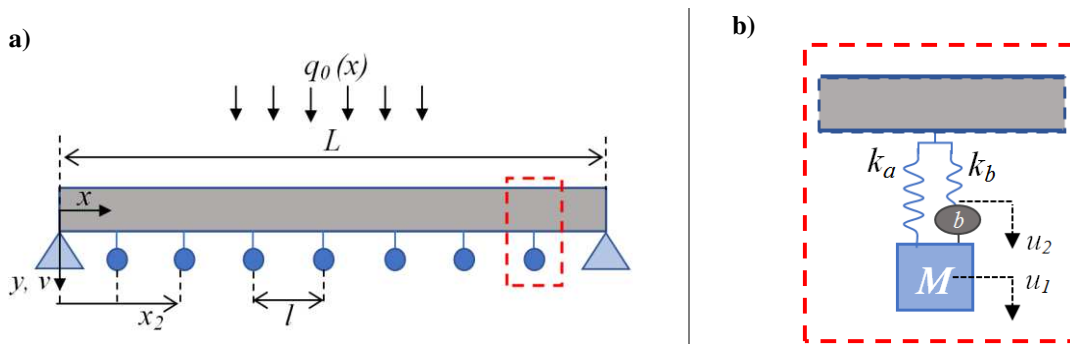


Figura 1: Viga con resonadores periódicamente distribuidos.

Asumiendo que la viga se encuentra sometida a vibraciones armónicas, la solución del estado estacionario del problema de vibraciones forzadas se obtiene mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} v &= V(x) \cos \omega t, & \theta &= \Psi(x) \cos \omega t, \\ u_1 &= U_1(x) \cos \omega t, & u_2 &= U_2(x) \cos \omega t. \end{aligned} \tag{4a,b,c,d}$$

Reemplazando tales soluciones en las ecuaciones (1-3), se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuyas incógnitas son  $V(x)$ ,  $\Psi(x)$  y  $U_1(x)$ :

$$\begin{aligned} GkA \frac{dV}{dx} \left( \frac{dV}{dx} - \Psi \right) + \rho A \omega^2 V + \alpha \rho A \omega^2 U_1 + q_0 &= 0, \\ EI \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + GkA \left( \frac{dV}{dx} - \Psi \right) + \rho I \omega^2 \Psi &= 0, \end{aligned} \tag{5a,b}$$

mientras que para cada resonador  $i$ -ésimo:

$$\begin{aligned} -M\omega^2 U_1 &= -k_a(U_1 - V) + b\omega^2(U_1 - U_2), \\ k_b(U_2 - V) &= -b\omega^2(U_1 - U_2). \end{aligned} \quad (6a,b)$$

Una vez resuelto (6a,b) se pueden obtener las amplitudes de los desplazamientos de los puntos 1 y 2 de cada resonador como  $U_1 = F_1 V$  y  $U_2 = F_2 V$ , donde:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\left[ 1 - \beta \left( \frac{\omega}{\lambda_b} \right)^2 - \beta \left( \frac{\omega}{\omega_M} \right)^2 \right]}{\left[ 1 - (1 + \beta) \left( \frac{\omega}{\omega_M} \right)^2 \right] \left[ 1 - \beta \left( \frac{\omega}{\lambda_b} \right)^2 \right] - \beta^2 \left( \frac{\omega}{\omega_M} \right)^2 \left( \frac{\omega}{\lambda_b} \right)^2}, \\ F_2 &= \frac{\left[ 1 - (1 + \beta) \left( \frac{\omega}{\omega_M} \right)^2 - \beta \left( \frac{\omega}{\lambda_b} \right)^2 \right]}{\left[ 1 - (1 + \beta) \left( \frac{\omega}{\omega_M} \right)^2 \right] \left[ 1 - \beta \left( \frac{\omega}{\lambda_b} \right)^2 \right] - \beta^2 \left( \frac{\omega}{\omega_M} \right)^2 \left( \frac{\omega}{\lambda_b} \right)^2}, \end{aligned} \quad (7a,b)$$

siendo  $\omega_M = \sqrt{\frac{k_a}{M}}$ ,  $\lambda_b = \sqrt{\frac{k_b}{M}}$  y  $\beta = \frac{b}{M}$ . Reemplazando  $U_1$  en (5a), se llega al siguiente sistema homogeneizado:

$$\begin{aligned} GkA \frac{dV}{dx} \left( \frac{dV}{dx} - \Psi \right) + \overline{\rho A} \omega^2 V + q_0 &= 0, \\ EI \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + GkA \left( \frac{dV}{dx} - \Psi \right) + \rho I \omega^2 \Psi &= 0, \end{aligned} \quad (8a,b)$$

donde  $\overline{\rho A}$  es la masa por unidad de longitud equivalente de la viga LR homogeneizada, definida como:

$$\overline{\rho A} = \rho A (1 + \alpha F_1(\beta, \omega_M, \lambda_b)). \quad (9)$$

El sistema se completa con las correspondientes condiciones de borde.

### 3 DETERMINACION DE LOS “BANDGAPS”: VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS LR

Al sustituir  $\overline{\rho A}$  por  $\rho A$  en la ecuación (8a), con  $q_0 = 0$ , se obtiene la siguiente ecuación de vibraciones libres de la viga huésped.

$$\begin{aligned} GkA \frac{dV}{dx} \left( \frac{dV}{dx} - \Psi \right) + \rho A \omega^2 V &= 0, \\ EI \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + GkA \left( \frac{dV}{dx} - \Psi \right) &= 0, \end{aligned} \quad (10a,b)$$

En (10b) se ha despreciado el término de inercia rotatoria, que en general tiene un efecto

menor, excepto para frecuencias muy altas.

Por otra parte, si se propone como solución del problema de vibraciones libres de la viga LR a las funciones  $V_n$ ,  $\Psi_n$  y  $\omega_n$ , sustituyéndolas luego en las ecuaciones (8a,b) y considerando las correspondientes ecuaciones para la viga huésped (10a,b), es posible obtener el Cociente de Rayleigh:

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L \left[ EI \left( \frac{d\Psi_n}{dx} \right)^2 + GkA \left( \frac{dV_n}{dx} - \Psi_n \right)^2 \right] dx}{\overline{\rho A} \int_0^L V_n^2 dx} \quad (11)$$

Para que la expresión (11) admita una solución real, es decir existan frecuencias naturales  $\omega_n$ ,  $\overline{\rho A}$  debe ser positiva. Por lo tanto, en un rango de frecuencias donde  $\overline{\rho A}$  sea negativo (dado por (9)), no pueden existir frecuencias naturales ni resonancias. Esto define una banda de atenuación (bandgap):

$$BG = \{ \omega : \overline{\rho A} < 0 \}. \quad (12)$$

Debe observarse que los (BG) son independientes de las condiciones de borde y de la carga de la viga. Por otra parte, la cantidad de bandas de atenuación dependerá del tipo de resonadores considerados. De acuerdo con el sistema desarrollado en (1-3) que contiene un sistema conformado por resorte-masa e inercia, se obtendrán dos BG.

### 3.1 Estructura de los BG: Enfoque analítico.

Es posible demostrar, al observar el comportamiento de (9), que el valor de las frecuencias de inicio de los (BG) comienzan cuando  $F_l$  tiende a  $-\infty$ . Por lo tanto, desarrollando y reordenando la expresión (7a) se llega a:

$$\omega^4 \left[ \frac{\beta}{\omega_M^2 \lambda_b^2} \right] + \omega^2 \left[ - \left( \frac{1+\beta}{\omega_M^2} + \frac{\beta}{\lambda_b^2} \right) \right] + 1 = 0, \quad (13)$$

cuya solución analítica permite determinar ambas frecuencias iniciales  $\omega_{Inicio1}$  y  $\omega_{Inicio2}$ :

$$\omega_{Inicio\ 1,2} = \frac{\left( \frac{1+\beta}{\omega_M^2} + \frac{\beta}{\lambda_b^2} \right) \mp \sqrt{\left( - \left( \frac{1+\beta}{\omega_M^2} + \frac{\beta}{\lambda_b^2} \right) \right)^2 - \frac{4\beta}{\omega_M^2 \lambda_b^2}}}{\frac{2\beta}{\omega_M^2 \lambda_b^2}} \quad (14)$$

Procediendo de forma similar, es posible determinar a su vez el valor de las frecuencias finales de los (BG), dado que éstas se producen cuando el término  $(1 + \alpha F_l(\beta, \omega_M, \lambda_b))$ , de (9), es nulo. Desarrollando y reordenado dicho término se llega a:

$$\omega^4 \left[ \frac{\beta}{\omega_M^2 \lambda_b^2} \right] + \omega^2 \left[ - \frac{(1+\beta)}{\omega_M^2} - \frac{\beta}{\lambda_b^2} - \alpha \beta \left( \frac{1}{\omega_M^2} + \frac{1}{\lambda_b^2} \right) \right] + [1 + \alpha] = 0, \quad (15)$$

cuya solución permite conocer las dos frecuencias de finalización  $\omega_{Fin1}$  y  $\omega_{Fin2}$  de los BG.

#### 4 SOLUCIÓN ANALÍTICA DE VIBRACIONES PARA UNA VIGA (LR) SIMPLEMENTE APOYADA

Se considera la solución analítica del problema de vibraciones forzadas del de la viga LR simplemente apoyada (8a,b)  $V(0)=0$ ,  $V(L)=0$ ,  $d\psi/dx(0)=0$ ,  $d\psi/dx(L)=0$ , donde la carga externa se expresa en series de senos  $q_0(x) = \sum_n Q_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ . La respuesta forzada resultante puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{V}(x) &= \sum_{n=1}^N \bar{A}_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \\ \bar{\Psi}(x) &= \sum_{n=1}^N \bar{B}_n \cos \frac{n\pi x}{L}.\end{aligned}\tag{16a,b}$$

Reemplazando (16a,b) en (8) se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\bar{A}_n \left\{ -GkA \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \overline{\rho A \omega^2} \right\} + \bar{B}_n \left\{ GkA \left( \frac{n\pi}{L} \right) \right\} &= -Q_n, \\ \bar{A}_n \left\{ GkA \left( \frac{n\pi}{L} \right) \right\} + \bar{B}_n \left\{ -GkA - EI \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \rho I \omega^2 \right\} &= 0.\end{aligned}\tag{17a,b}$$

Una vez calculadas  $\bar{A}_n$  y  $\bar{B}_n$  se obtienen las respuestas definidas en (16a,b).

#### 5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Para diseñar la estructura de los BG es importante conocer sus frecuencias de inicio y anchos de banda. Una vez conocidas las propiedades del material de la viga, es posible diseñar la estructura de los BG a partir de la ecuación (12). De esta forma, con los parámetros adecuados de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega_M$ , y  $\lambda_b$ , es posible lograr bandas de atenuación que contengan a la frecuencia  $\omega_n$  de la viga.

Para estudiar la influencia de tales parámetros en la estructura de los BG, como ejemplo inicial se fijaron los valores de los resonadores en  $k_a=2.85E4 \text{ N/m}$ ,  $k_b=2.85E4 \text{ N/m}$ ,  $M=221 \text{ kg}$ ,  $\beta=0.02$  y se consideraron diferentes relaciones entre la masa del resonador y el de la viga huésped.

Los comportamientos de los BG para cada  $\alpha$  se muestran en la Figura 2 donde se observa que se generan dos bandas de atenuación (BG1) y (BG2), como era de esperar por el tipo de resonador considerado. Los valores de las frecuencias iniciales y finales de ambos BG se calculan a partir de las soluciones analíticas dadas por las expresiones (13) y (15). Se ve además que las frecuencias finales de ambos disminuyen a medida que se reduce la relación entre las masas, es decir, se acortan los anchos de banda sin alterar las frecuencias de inicio.

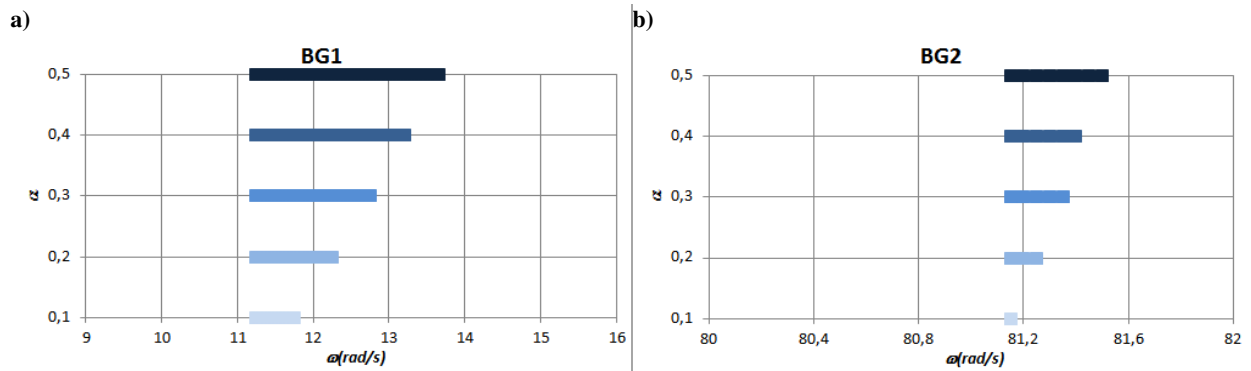


Figura 2: Estructura de BG para diferentes relaciones de masas.

Para estudiar el efecto de la relación de inercancia, se mantienen los parámetros anteriores, adoptando en este caso un  $\alpha=0.5$  y diferentes valores de  $\beta$ .

Se observa (ver Figura 3) que las frecuencias iniciales de BG1 y BG2 disminuyen a medida que  $\beta$  aumenta y que el ancho de banda de BG2 aumenta gradualmente con  $\beta$ , mientras que el ancho de BG1 adopta un comportamiento opuesto, se vuelve cada vez más estrecho.

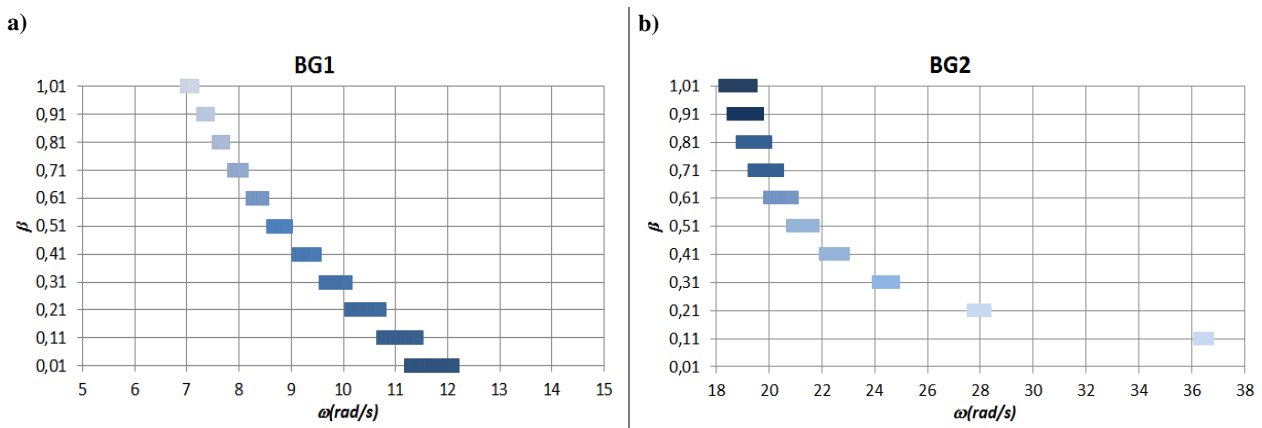


Figura 3: Estructura de BG para diferentes relaciones de inercia  $\beta$ .

En la Figura 4 se grafica el comportamiento de los bandgap al variar la relación entre los resortes de los resonadores. En este caso se mantuvieron constantes los parámetros  $\alpha=0.5$ ,  $\beta=1$  y  $M=221 \text{ kg}$ . Se observa que cuanto mayor es la relación entre  $k_b$  y  $k_a$ , los anchos de banda para ambos BG aumentan, así como también sus frecuencias iniciales.

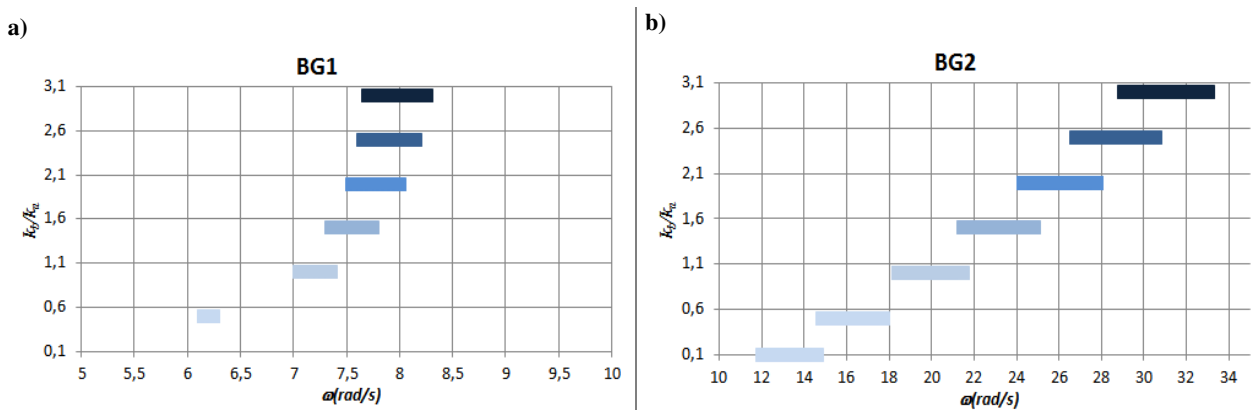


Figura 4: Estructura de BG para diferentes  $k_b/k_a$ .

Finalmente se variaron los valores de  $\omega_M$ , manteniendo el valor de los otros parámetros en los valores fijos indicados anteriormente. Se observa en la [Figura 5](#), que al igual que el caso anterior las frecuencias de inicio aumentan conforme crece  $\omega_M$ , como también el ancho de banda del BG2. Sin embargo, los anchos de BG1 se reducen.

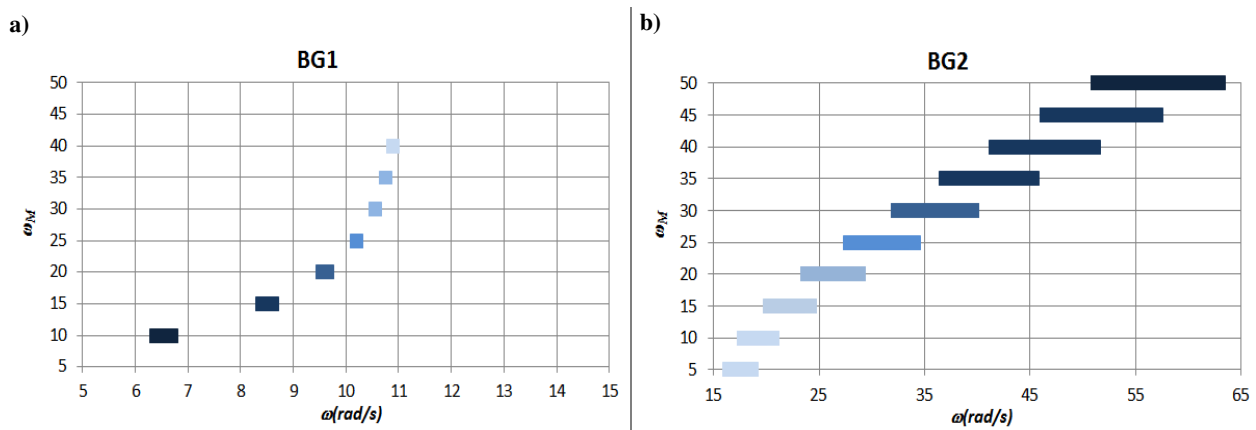


Figura 5: Estructura de BG para diferentes  $\omega_M$ .

Se han realizado otros ejemplos de diseño con el enfoque analítico propuesto para el cálculo de la estructura de los BG, combinando en cada caso distintos valores de parámetros de resonadores. En todos los casos los resultados obtenidos indicaron el mismo comportamiento.

En el ejemplo que se da a continuación, se pretende disminuir la amplitud que puede generarse cuando la viga huésped es sometida a una excitación externa, cuya respuesta pueda darse próxima a alguna de sus frecuencias naturales. En tal sentido, se contempla el diseño de resonadores distribuidos de forma regular a lo largo de la viga para atenuar las vibraciones forzadas. Para ejemplificar el modelo presentado, se considera una viga huésped simplemente apoyada con las siguientes características:  $E=2.1E11$  MPa,  $G=8E10$  MPa,  $I=0.3576$  m<sup>4</sup>,  $\rho=7500$  kg/m<sup>3</sup>,  $k=0.8$ ,  $A=0.3628$  m<sup>2</sup> y  $L=50$  m. Las primeras frecuencias naturales  $\omega_n$  de la viga huésped, resultaron ser de 20.17 rad/s y 78.81 rad/s. La viga es sometida a una carga ficticia cuya amplitud es  $q_0 \text{sen}(2\pi x/L)$ .

A partir del estudio paramétrico realizado en los ejemplos anteriores, se adoptan los valores de los resonadores en  $\alpha=0.35$ ,  $\beta=5$ ,  $\omega_M = 35$  rad/s y  $\lambda_b= 60.62$  rad/s (estos dos últimos implican una relación de rigidez de resorte  $k_b/k_a=3$ ) a los efectos de generar bandas de atenuación que anulen, por ejemplo, la resonancia asociada a la segunda frecuencia natural  $\omega_2$ . Se calculan los BG con la expresión (12), obteniéndose dos bandas de atenuación (ver [Figura 6a](#)). Como se muestran en la [Figura 6b](#), las frecuencias de inicio y fin de ambos BG, obtenidas con (13) y (15), son  $\omega_{Inicio1}=12.82$ ,  $\omega_{Fin1}=13.01$ ,  $\omega_{Inicio2}=73.96$  y  $\omega_{Fin2}=84.74$  rad/s. Se observa que la segunda banda presenta un ancho de 11 rad/s, aproximadamente, y contiene a la frecuencia deseada.

Se ha verificado la atenuación de las vibraciones forzadas en dicha banda, comparando las amplitudes forzadas para la viga huésped y la viga LR a partir de la expresión (16). Las respuestas correspondientes se muestran en escala logarítmica calculadas en  $L/4$ . Se aprecia claramente la atenuación de la respuesta de la viga LR en comparación con la estructura huésped.



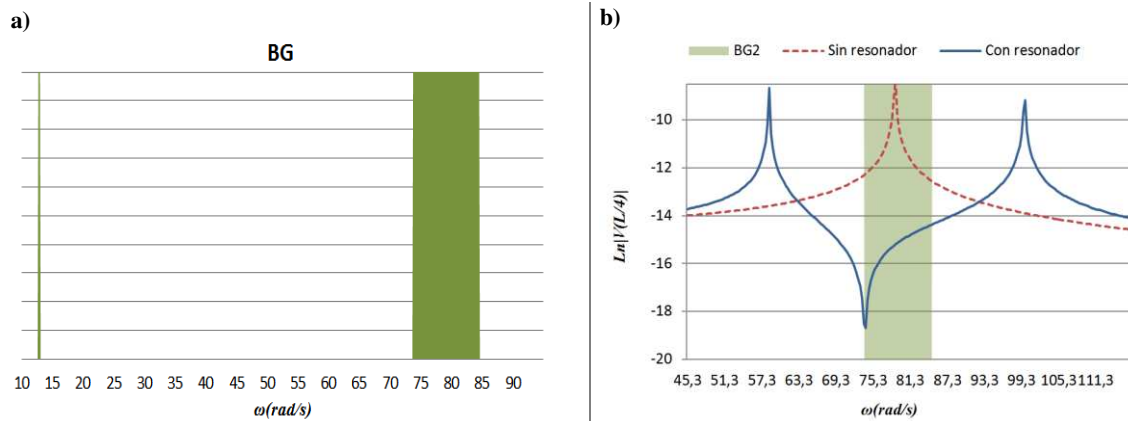


Figura 6: Zona de atenuación con resonadores: a) BG, b) Respuesta dinámica de las vigas huésped y LR para el BG2.

A continuación, se muestra una comparación entre la eficiencia del resonador basado en inerter y el clásico masa-resorte. Para ello se calculan los cocientes entre anchos de banda de los resonadores basados en inerters y el correspondiente a un resonador clásico como:

$$RBG1 = \frac{(\omega_{Fin1} - \omega_{Inicio1}) / \omega_{Inicio1}}{\sqrt{1 + \alpha} - 1}, \quad RBG2 = \frac{(\omega_{Fin2} - \omega_{Inicio2}) / \omega_{Inicio2}}{\sqrt{1 + \alpha} - 1}, \quad (18a,b)$$

siendo el denominador un término que describe el ancho de banda del resonador clásico. Tales razones se muestran en las Figuras 7a,b,c,d. Se observa que con los distintos valores de parámetros de diseño utilizados no se ha detectado mejora sustancial respecto al resonador clásico.

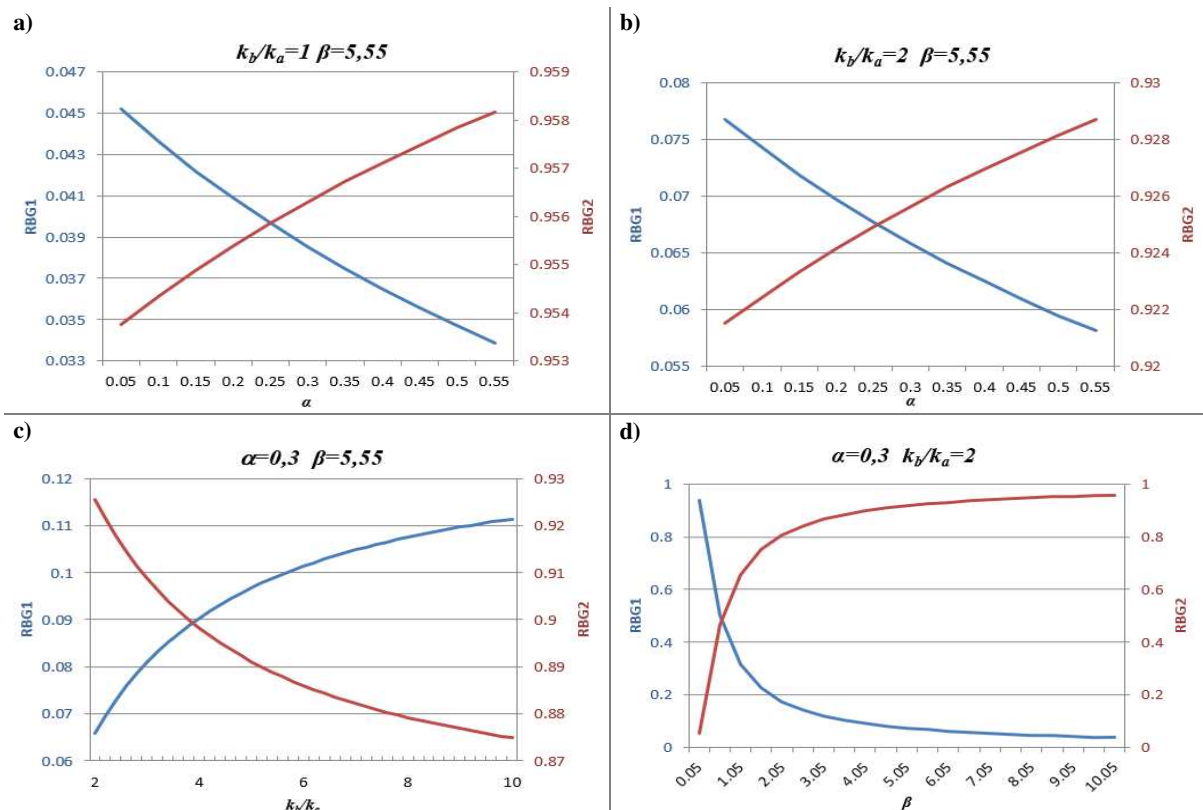


Figura 7: Comparación de la eficiencia entre el resonador basado en inerter y el clásico.

## 6 CONCLUSIONES

Se ha propuesto un enfoque homogeneizado para analizar el problema de vibraciones transversales de una viga LR tipo Timoshenko, acoplada a resonadores tipo inerters distribuidos periódicamente en su longitud. Tal enfoque es mucho más simple que el presentado por Zhou et al. (2022). Mediante la presente metodología analítica se pudo determinar la estructura de las bandas de atenuación, las cuales son independientes de las condiciones de borde y de la carga de la viga. Mediante un estudio de vibraciones forzadas se verificó la atenuación de la respuesta forzada en los BG. Debe mencionarse que los cálculos numéricos realizados no han detectado mejoras sustanciales respecto al uso de resonadores clásicos, a diferencia de lo que se indica en el trabajo de Zhou et al. (2022). Para dilucidar completamente esta cuestión se está estudiando actualmente el efecto del amortiguamiento interno de los resonadores tipo inertes sobre la respuesta dinámica.

## REFERENCIAS

- Cortínez V. H. y Dominguez P. N. Una teoría general para la estimación de bandgaps en la vibración flexo-torsional de vigas Vlasov. *Mecánica Computacional*, 39, 531-540, 2022.
- Dominguez P. N., Cortínez V. H. y Piovan M. T. Attenuation bands for flexural-torsional vibrations of locally resonant Vlasov beams. *Thin-Walled Structures*, 181, 110115, 2022.
- Sun H., Du X. y Frank Pai P. Theory of Metamaterial beams for Broadband Vibration Absorption. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 21, 1086-1101, 2010.
- Zhou, L., Han W. y S. Wan. Low frequency band gap for box girder attached IDVAs. *Thin-Walled Structures*, 174, 109088, 2022.
- Han, W., Wan, S. Flexural Wave Bandgaps in a Prestressed Multisupported Timoshenko Beam with Periodic Inerter-Based Dynamic Vibration Absorbers. *Sustainability* 15, 3680, 2023.