

## MODELADO DE FALLO DE VIGAS DE HORMIGÓN REFORZADO CON FIBRAS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS Y MÉTODOS DE CONTROL DE DESPLAZAMIENTOS

### MODELING POST COLLAPSE FAILURE OF FIBER REINFORCED CONCRETE BEAMS USING FINITE ELEMENT AND DISPLACEMENT CONTROL METHODS

Joaquín Viera y Jorge M. Pérez Zerpa

*Instituto de Estructuras y Transporte, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay*

**Palabras clave:** Método de Elementos Finitos, Control de desplazamientos, Hormigón reforzado con fibras, Integración numérica

**Resumen.** A partir del aumento a nivel global de la preocupación por el fenómeno del cambio climático, la industria de la construcción se encuentra ante desafíos que no había tenido en toda su historia. Esta industria es responsable por el 39 % de las emisiones de gases de efecto invernadero, donde solo la manufactura, transporte y uso de acero, cemento y vidrio representan el 11 % de las emisiones a nivel global. A raíz de esto, el desarrollo de nuevos materiales o procedimientos que reduzcan el impacto ambiental ha recibido un gran interés. El Hormigón Reforzado con Fibras (HRF), en el cual se sustituyen las barras de refuerzo de acero por fibras (de diversos materiales), puede contribuir en la búsqueda de soluciones a este problema. Para el uso seguro de este nuevo material, es necesario desarrollar tanto herramientas de modelado computacional en la caracterización, como también técnicas prácticas para el diseño estructural de vigas y/o losas. En este trabajo se aplican estrategias numéricas para la simulación del comportamiento de vigas considerando leyes no lineales tensión-deformación basadas en HRF. Se realizó una implementación de código abierto, en el lenguaje Julia, utilizando elementos finitos de viga, integración numérica por puntos de Gauss y los métodos de Newton-Raphson y Longitud de Arco para las iteraciones con carga y desplazamientos controlados. Se resuelven ejemplos de verificación y se confirma la correcta implementación y la capacidad de la metodología para resolver casos post-colapso de forma eficiente. Se logra reproducir resultados experimentales de la literatura y se identifican y presentan líneas de trabajo a continuar.

**Keywords:** Finite Element Method, Displacement control, Fiber Reinforced Concrete, Numerical integration

**Abstract.** Due to the Climate Change phenomenon, the construction industry is facing huge challenges. This industry is responsible for 39 % of the global greenhouse gas emissions. The development of new materials to reduce this impact has received increasing interest. The adoption of Fiber Reinforced Concrete (FRC) might represent a solution for this problem. The safe use of this material requires the development of efficient computational tools for both modeling and design of structural elements, such as beams or slabs. In this work non-linear analysis numerical techniques are applied to the modeling of FRC beams submitted to bending tests. An open source implementation in Julia was developed, using Beam Finite Elements, numerical integration and Newton-Raphson arc-length methods. Verification examples are solved and it is confirmed that the methodology presented can reproduce post-collapse behaviors presented in the literature.

## 1. INTRODUCCIÓN

Como consecuencia del fenómeno del cambio climático, la industria de la construcción se encuentra ante un gran desafío, el cual requiere el desarrollo de nuevos materiales y métodos constructivos. Esta industria es responsable por el 39 % de las emisiones de gases de efecto invernadero, donde solo la manufactura, transporte y uso de acero, cemento y vidrio representan el 11 % de las emisiones a nivel global (UN-Environment-Programme, 2022).

A raíz de esto, el desarrollo de nuevos materiales y/o procedimientos que reduzcan el impacto ambiental ha recibido gran interés (Jayasinghe et al., 2022; Cabrera Serrenho et al., 2019; Gauch et al., 2022). El Hormigón Reforzado con Fibras (HRF), en el cual se sustituyen las barras de refuerzo de acero por fibras (de diversos materiales), puede contribuir en la búsqueda de soluciones a este problema (Hawkins et al., 2019). El uso de este nuevo material en la construcción, exige el desarrollo de herramientas eficaces de modelado y caracterización de su comportamiento, para luego poder ser aplicado de forma segura en el diseño de vigas y/o losas.

El proceso de falla del HRF es altamente no lineal ya que luego de que el hormigón (la matriz en la cual están las fibras) se fisura, se comienza a producir el deslizamiento de las fibras y la propagación de la fisura. La caracterización en materiales con comportamiento altamente no lineal suele estar basada o bien principalmente en procedimientos experimentales (Segura-Castillo et al., 2018) o en procedimientos numéricos con algún modelo que brinde la historia de desplazamientos o deformaciones para cada conjunto de parámetros materiales durante el proceso de optimización (Pérez Zerpa et al., 2017).

En este trabajo se aplican estrategias numéricas para la simulación del comportamiento de vigas, considerando leyes constitutivas no lineales orientadas al modelado de HRF. Se realizó una implementación en código abierto en el lenguaje Julia<sup>1</sup> de rutinas de elementos finitos de viga, integración numérica y métodos de Newton-Raphson y Longitud de Arco con carga y desplazamientos controlados. Se presentan los resultados obtenidos al resolver dos ejemplos con solución conocida.

## 2. METODOLOGÍA

En esta sección se presenta esquemáticamente la metodología teórica usada. Se comienza presentando las ecuaciones del modelo y luego las técnicas empleadas para su resolución.

### 2.1. Formulación de Elementos Finitos

Para el ensamblado del modelo y las ecuaciones que gobiernan el problema se considera una estrategia inspirada en la formulación de elementos de viga con interpolación cúbica del desplazamiento transversal y lineal para el desplazamiento axial (Oñate, 2013). A través del principio de trabajos virtuales se obtienen fuerzas nodales considerando no linealidad de la relación constitutiva (Wriggers, 2008) y también se aplica integración numérica para integrar en cada sección transversal (Bonet et al., 2006). A continuación se presentan las ecuaciones fundamentales de este procedimiento.

Se considera un elemento de viga de dos nodos, de largo  $\ell^e$  y sección transversal uniforme de área  $A$ . Se asume que la tensión axial está dada por una función  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  donde  $\varepsilon$  es la

---

<sup>1</sup>Ver: <https://julialang.org/>

deformación axial en la fibra. El principio de trabajos virtuales puede ser escrito como:

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{ext}(t) \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} \int_A \int_{\ell^e} \sigma(\varepsilon(x, y, \mathbf{u}^e)) \cdot \delta \varepsilon^e(x, y) \, dx dA \quad (1)$$

Se está asumiendo que este modelo es válido únicamente para análisis de falla, donde no se desea modelar el comportamiento al retirar la carga, por lo que solo se requiere una ley tensión-deformación sin discriminar cuanta de esa deformación es elástica, o lo que es equivalente, cuanta de la energía interna es almacenada elásticamente. El diagrama de tensiones es considerado dado por una función no lineal como se muestra en la Figura 1.

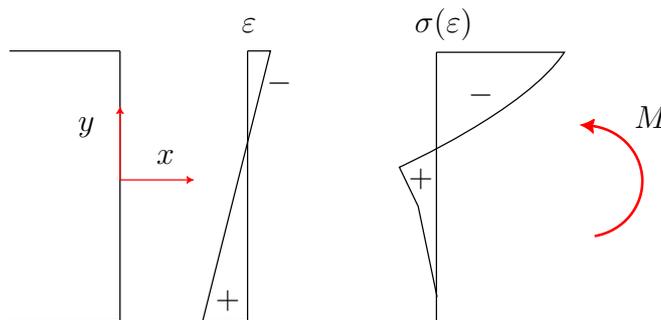


Figura 1: Diagrama de deformaciones y tensiones en una sección para un flector positivo.

Tanto la deformación axial real como la virtual pueden ser escritas en función de los desplazamientos nodales generalizados del elemento  $\mathbf{u}^e$  (axiales y transversales) y combinaciones de las derivadas de las funciones de interpolación  $\mathbf{B}_a^e(x)$  y  $\mathbf{B}_b^e(x)$ :

$$\varepsilon^e(x, y, \mathbf{u}^e) = -\mathbf{B}_b^e(x) \mathbf{u}^e y + \mathbf{B}_a^e(x) \mathbf{u}^e, \quad \delta \varepsilon^e(x, y, \delta \mathbf{u}^e) = -\mathbf{B}_b^e(x) \delta \mathbf{u}^e y + \mathbf{B}_a^e(x) \delta \mathbf{u}^e. \quad (2)$$

Sustituyendo la variación de deformación en la expresión de trabajos virtuales, se obtiene:

$$\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{u}^e) = \int_{\ell^e} \int_A (\mathbf{B}_a^e)^T \sigma^e(\varepsilon(x, y, \mathbf{u}^e)) \, dA dx + \int_{\ell^e} \int_A (-\mathbf{B}_b^e y)^T \sigma^e(\varepsilon(x, y, \mathbf{u}^e)) \, dA dx. \quad (3)$$

Finalmente, en los métodos iterativos de resolución, es necesario calcular la matriz tangente para cada desplazamiento

$$\mathbf{K}_T^e(\mathbf{u}^e) = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{u}^e)}{\partial \mathbf{u}}$$

donde usando la regla de la cadena se puede ver que

$$\mathbf{K}_T^e(\mathbf{u}^e) = \int_{\ell^e} \int_A (\mathbf{B}_a^e)^T \frac{d\sigma}{d\varepsilon}(\varepsilon(x, y, \mathbf{u}^e)) (\mathbf{B}_a^e) \, dA dx + \int_{\ell^e} \int_A (-\mathbf{B}_b^e y)^T \frac{d\sigma}{d\varepsilon}(\varepsilon(x, y, \mathbf{u}^e)) (\mathbf{B}_b^e) \, dA dx \quad (4)$$

## 2.2. Técnicas numéricas

El sistema de ecuaciones no lineales dado por la Ecuación (1) es resuelto numéricamente empleando métodos iterativos. En el caso de control de cargas se utiliza Newton-Raphson (Bazzano y Pérez Zerpa, 2017) mientras que para análisis con control de desplazamientos se utiliza Longitud de Arco ya sea su versión cilíndrica (de Souza Neto et al., 2008) como versiones basadas en un único grado de libertad (Jirasek y Bazant, 2001). En este trabajo se utiliza control de desplazamientos en un único grado de libertad.

Las integrales dadas por las Ecuaciones (3) y (4) pueden ser calculadas numéricamente utilizando Cuadratura de Gauss de forma similar a como es realizado en (Bonet et al., 2006). Se debe elegir una cantidad de puntos de Gauss para la integración en el largo de cada elemento, y una cantidad de puntos para la integración en la altura de la sección en cada una de esas posiciones  $x$  en las que se integra en el largo. Por ejemplo uno de los términos de las fuerzas internas es calculado como:

$$\mathbf{f}_{int,b}^e(\mathbf{u}^e) = \sum_{i=1}^{nGP_\ell} \left( \sum_{j=1}^{nGP_y} (t_z(y_j) (-\mathbf{B}_b^e(x_i))^T) y_j \sigma^e(\varepsilon^e(x_i, \mathbf{u}^e)) \omega_j \right) \omega_i \quad (5)$$

donde  $(x_i, y_j)$  y  $w_k$  con  $k = i, j$ , denotan los puntos de Gauss y los pesos respectivamente y  $t_z$  es el ancho en cada altura ( $y$ ). La matriz tangente es calculada de forma análoga.

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos para dos problemas tomados de la literatura. Los códigos, escritos en el lenguaje de programación Julia, utilizados para generar los resultados están públicamente disponibles<sup>2</sup>. Los ejemplos fueron resueltos usando un computador portátil sin técnicas específicas de paralelismo.

#### 3.1. Ejemplo 1 - Ménsula con endurecimiento lineal

En este ejemplo se busca mostrar que el método numérico propuesto es capaz de resolver la integración numérica y que la implementación es correcta, a través de la comparación de la solución numérica obtenida con una solución analítica del problema. El problema a resolver consiste en una ménsula de largo  $\ell = 1$  m, cargada en el extremo libre con una fuerza  $P$ , como se muestra en la Figura 2. La sección transversal es cuadrada y maciza de lado 10 cm.

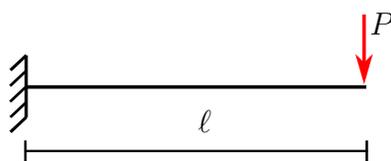


Figura 2: Esquema estructural.

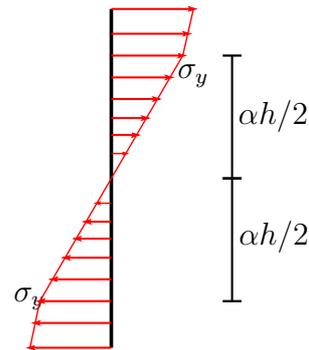
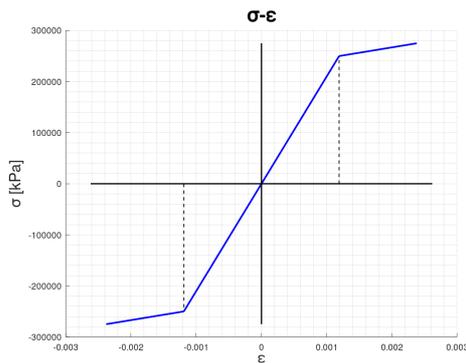
La ley constitutiva está dada por un modelo elastoplástico con endurecimiento isótropo y lineal, representado por la función:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E & \varepsilon \in [-\varepsilon_Y, \varepsilon_Y] \\ \text{signo}(\varepsilon) (\sigma_Y + K(|\varepsilon| - \varepsilon_Y)) & \varepsilon \notin [-\varepsilon_Y, \varepsilon_Y] \end{cases} \quad (6)$$

con  $E = 210$  GPa,  $\sigma_Y = 250$  MPa,  $\varepsilon_Y = \sigma_Y/E$  y  $K = E/100$ . El gráfico de la función tensión-deformación utilizada en el código es mostrado en la Figura 3a.

Para escribir la solución analítica se define el parámetro  $\alpha$  tal que  $\alpha h$  representa la altura de sección en la cual la tensión no ha alcanzado (en módulo) el valor  $\sigma_Y$ , como se muestra en la Figura 3b. Siguiendo un procedimiento similar al presentado en (Ochsner, 2014), se puede

<sup>2</sup><https://github.com/JoaquinViera/materialNonLinearity.jl>



(a) Gráfico de ley constitutiva  $\sigma - \epsilon$  utilizada en modelo.

(b) Diagrama de tensiones normales en la sección.

Figura 3: Ejemplo 1: diagramas de ley constitutiva.

obtener la expresión analítica del momento en función de  $\alpha$  para una viga de sección rectangular de ancho  $b$  y altura  $h$ :

$$M = \frac{\sigma_Y b h^2}{12} \left[ 3 - \alpha^2 + \frac{E_{tan}}{\alpha E} (2 - 3\alpha + \alpha^3) \right] \quad \text{con} \quad E_{tan} = \frac{EK}{E + K}. \quad (7)$$

Para resolver numéricamente el problema se considera una malla de 20 elementos finitos de viga. Se resuelve el problema utilizando el método Newton-Raphson con 60 incrementos de carga y tolerancia de convergencia en incremento de desplazamientos de  $10^{-4}$  y en fuerzas residuales de  $10^{-6}$ . En la Figura 4 se muestra el diagrama momento-curvatura obtenido para la sección en el empotramiento, con la solución analítica y los resultados numéricos obtenidos.

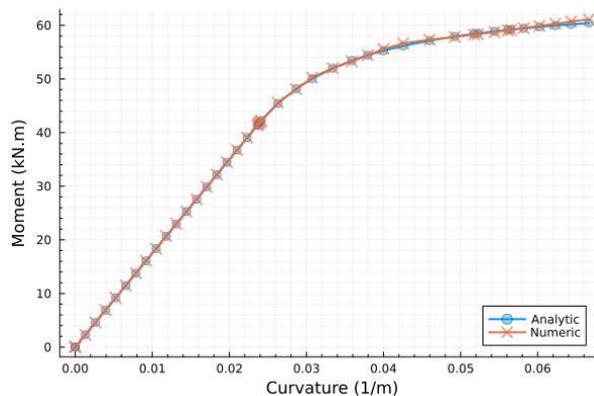


Figura 4: Ejemplo 1 - Diagramas Momento curvatura analítico y numérico.

A partir de los resultados obtenidos se concluye que la implementación brinda resultados correctos. La singularidad en la tensión de límite elástico no representó un problema para la metodología propuesta por lo que es una estrategia adecuada.

### 3.2. Ejemplo 2

El objetivo de este ejemplo es la verificación de la capacidad de la técnica numérica de simulación, para reproducir el comportamiento de una viga de HRF.

El problema, presentado en (Kusel y Kearsley, 2019), consiste en una viga de sección cuadrada de lado 0.10 m y longitud 0.45 m correspondiente al ensayo de cuatro puntos (es decir una viga simplemente apoyada con cargas verticales iguales aplicadas a los cuartos de la longitud). La viga considerada está formada por un hormigón reforzado con una cuantía de 1 % de fibras de acero y sin refuerzo de barras de acero. En la referencia se pueden ver los gráficos y comportamientos obtenidos para otras cuantías, sin embargo en este trabajo se elige una única cuantía gráfica por representar un resultado preliminar.

La ley constitutiva considerada a compresión es lineal, mientras que a tracción está dada por la unión de rectas conectando los puntos ( $\sigma$  [MPa],  $\varepsilon$ [%]): (0, 0), (6.44, 0.174), (2.8, 0.174), (3.4, 9), (1.35, 25) y (0, 100). En la Figura 5 se muestra el gráfico de la ley constitutiva

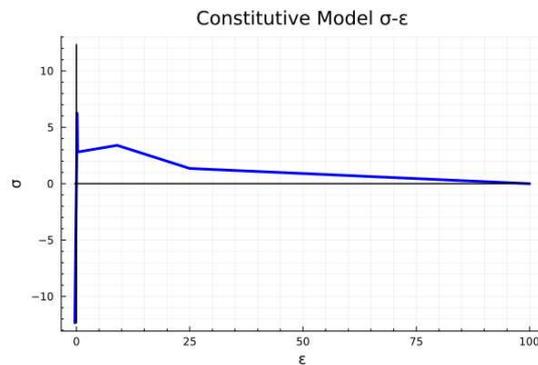


Figura 5: Relación constitutiva  $\sigma - \varepsilon$ .

Se puede considerar (según este modelo simplificado) que para la deformación 0.174 se produce la fisuración y una pérdida instantánea de rigidez. Para intentar resolver los problemas de esta inestabilidad, se propone aplicar el método de longitud de arco con control del desplazamiento de los nodos de aplicación de la carga. En la Figura 6 se muestra el diagrama Momento-curvatura para una de las secciones en las que se aplica la carga y se superpone el gráfico de los valores experimentales presentados en (Kusel y Kearsley, 2019). Se puede observar cualitativamente que existe correlación entre los resultados numéricos y experimentales.

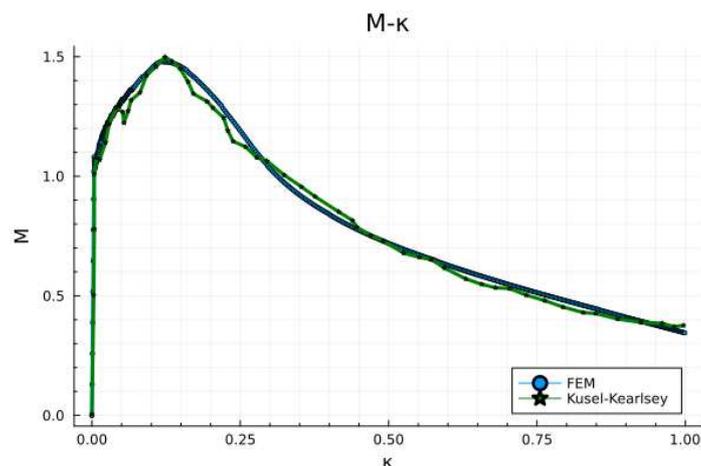


Figura 6: Ejemplo 2 - Diagramas momento-curvatura.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron resultados numéricos obtenidos al aplicar una estrategia de análisis computacional, basado en el MEF y técnicas de control de desplazamientos, a la simulación del comportamiento de vigas de HRF. En el ejemplo 1 se logró verificar los resultados usando una solución analítica. Esto confirma que la implementación es correcta y que la metodología considerada permite resolver problemas de vigas con leyes constitutivas con endurecimiento lineal.

En el ejemplo 2 se logró validar cualitativamente la implementación y el modelo al contrastar los resultados numéricos con datos experimentales de la literatura. Se concluye que la estrategia de longitud de arco con control de desplazamiento puede ser útil al simular procesos de fallas en vigas.

El método propuesto cuenta con ventajas en término de eficiencia ya que utiliza elementos finitos de viga, permitiendo resultados aceptables sin una cantidad elevada de grados de libertad de modelos de elementos planos. Por otra parte, la implementación es abierta, por lo que se brinda una librería para modificar y con pocas modificaciones poder realizar otras simulaciones, pudiendo por ejemplo cambiar la función de tensión deformación de manera relativamente sencilla.

Se considera necesario continuar realizando otros estudios, por ejemplo en estrategias numéricas más robustas que permitan reproducir las no linealidades del material, así como también la geométrica (en estructuras). Por otra parte, se considera necesario continuar explorando el efecto que produce el uso de distintas leyes constitutivas  $\sigma$ - $\varepsilon$  en los resultados de la simulación, así como también el desarrollo de métodos para identificar los parámetros de estas leyes a partir de mediciones experimentales en laboratorio.

#### AGRADECIMIENTOS

Parte del trabajo realizado fue financiado con fondos del Proyecto titulado *Evaluación Teórica y Experimental de Losas de Hormigón Reforzado con Fibras*. Se agradece al responsable de dicho proyecto, Prof. Luis Segura, por las discusiones mantenidas, en particular en el planteo del Ejemplo 2. Los autores agradecen al Prof. Marcelo Forets por su colaboración en el diseño del código Julia. Finalmente los autores agradecen a la Comisión Sectorial de Investigación Científica y a la Agencia Nacional de Investigación e Innovación por su apoyo.

#### REFERENCIAS

- Bazzano J.B. y Pérez Zerpa J. *Introducción al Análisis No Lineal de Estructuras*. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, 2017. ISBN 978-9974-0-1525-8.
- Bonet J., Barros M., y Romero M. Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending. *Computers & Structures*, 84(31-32):2184–2193, 2006. ISSN 00457949. doi:10.1016/j.compstruc.2006.08.065.
- Cabrera Serrenho A., Drewniok M., Dunant C., y Allwood J.M. Testing the greenhouse gas emissions reduction potential of alternative strategies for the english housing stock. *Resources, Conservation and Recycling*, 144:267–275, 2019. ISSN 0921-3449. doi:https://doi.org/10.1016/j.resconrec.2019.02.001.
- de Souza Neto E.A., Peri D., y Owen D.R.J. *Computational Methods for Plasticity*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, 2008. ISBN 9780470694626. doi:10.1002/9780470694626.
- Gauch H., Hawkins W., Ibell T., Allwood J., y Dunant C. Carbon vs. cost option mapping: A

- tool for improving early-stage design decisions. *Automation in Construction*, 136:104178, 2022. ISSN 0926-5805. doi:<https://doi.org/10.1016/j.autcon.2022.104178>.
- Hawkins W., Orr J., Shepherd P., y Ibell T. Design, construction and testing of a low carbon thin-shell concrete flooring system. *Structures*, 18:60–71, 2019. ISSN 2352-0124. doi:<https://doi.org/10.1016/j.istruc.2018.10.006>. Advanced Manufacturing and Materials for Innovative Structural Design.
- Jayasinghe A., Orr J., Ibell T., y Boshoff W.P. Minimising embodied carbon in reinforced concrete flat slabs through parametric design. *Journal of Building Engineering*, 50:104136, 2022. ISSN 2352-7102. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2022.104136>.
- Jirasek M. y Bazant Z.P. *Inelastic Analysis of Structures*. Wiley, 2001. ISBN 978-0-471-98716-1.
- Kusel F. y Kearsley E. Effect of steel fibres in combination with different reinforcing ratios on the performance of continuous beams. *Construction and Building Materials*, 227, 2019. doi:<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.07.279>.
- Ochsner A. *Elasto-Plasticity of Frame Structure Elements*. Springer, 1 edición, 2014. ISBN 978-3-662-44224-1.
- Oñate E. *Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics: Volume 2. Beams, Plates and Shells*. Springer, 1 edición, 2013. ISBN 978-1-4020-8743-1.
- Pérez Zerpa J., Castrillo P., y Baño V. Development of a method for the identification of elastoplastic properties of timber and its application to the mechanical characterisation of *Pinus taeda*. *Construction and Building Materials*, 139(308-319), 2017. doi: [10.1016/j.conbuildmat.2017.02.058](https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.02.058).
- Segura-Castillo L., Monte R., y de Figueiredo A.D. Characterisation of the tensile constitutive behaviour of fibre-reinforced concrete: A new configuration for the wedge splitting test. *Construction and Building Materials*, 192:731–741, 2018. ISSN 0950-0618. doi: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.10.101>.
- UN-Environment-Programme. Global status report for buildings and construction towards a zero-emissions, efficient and resilient buildings and construction sector. 2022.
- Wriggers P. *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008. ISBN 978-3-540-71000-4. doi:10.1007/978-3-540-71001-1.