

MODELO DE UN SISTEMA DE PÉNDULO PARAMÉTRICO Y GENERADOR ELÉCTRICO CON MIRAS A APLICACIONES EN ENERGÍA UNDIMOTRIZ

MODEL OF A PARAMETRIC PENDULUM SYSTEM AND ELECTRIC GENERATOR WITH A VIEW IN WAVE ENERGY APPLICATIONS

Lisandro M. Rojas, Lucas Oxarango, J. Nicolás Virla y Franco E. Dotti

*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad
Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, gimap@frbb.utn.edu.ar,
<http://www.frbb.utn.edu.ar>*

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET, Argentina

Palabras clave: Péndulo paramétrico, energía ambiental, dinámica no lineal.

Resumen. Se presenta un modelo matemático simplificado de un sistema compuesto por un péndulo sometido a una excitación armónica vertical, y sobre cuyo eje pivot se adosa un generador eléctrico de corriente continua. El modelo se implementa computacionalmente para abordar la dinámica del sistema electromecánico acoplado. El estudio se centra en comprender la compleja dinámica no lineal involucrada, haciendo especial énfasis en la identificación de rangos de los parámetros de forzamiento en los cuales puedan obtenerse respuestas rotatorias robustas del péndulo. Estas rotaciones implican la máxima obtención de energía eléctrica mediante el generador adosado. El presente estudio representa un aporte importante en el marco la línea de investigación sobre convertidores pendulares de energía undimotriz que se desarrolla actualmente en el Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada.

Keywords: Parametric pendulum, ambient energy, nonlinear dynamics.

Abstract. A simplified mathematical model of a system composed by a pendulum under a vertical harmonic excitation and a DC generator attached to its own axis is presented. The model is computationally implemented to address the dynamics of the coupled electromechanical system. The study focuses on the understanding of the complex nonlinear dynamics involved, with special emphasis on identifying forcing parameter ranges in which robust pendulum rotational responses can be obtained. These solutions involve maximum power generation by the coupled generator. The present study represents a significant contribution to the line of research on wave energy harvesting, by means of pendulum converters, which is currently being developed by Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada.

1 INTRODUCCIÓN

El péndulo paramétrico ha desempeñado históricamente un importante rol en la dinámica no lineal, especialmente en la ilustración de sus técnicas fundamentales. Ha sido incluso la herramienta más comúnmente empleada en las primeras comprobaciones de la existencia de caos en sistemas mecánicos (McLaughlin, 1980; Leven y Koch, 1981). Actualmente, este sistema simple mantiene su utilidad pedagógica (Guo y Luo, 2020), pero además ha motivado nuevas direcciones de investigación en cuanto a su empleo como dispositivo recolector de energía ambiental, especialmente undimotriz. La idea de este sistema se basa en lograr, a partir del movimiento de las olas, un estado dinámico altamente energético del péndulo, que permita convertir parte de su energía cinética en energía eléctrica mediante un generador adosado al eje pivot.

El modelo de péndulo paramétrico más empleado en la aplicación undimotriz es el denominado ‘clásico’, el cual consiste en un péndulo plano de masa puntual cuyo punto de pivot es sometido a una excitación sinusoidal vertical. El movimiento que se desea alcanzar es una rotación estacionaria, que corresponde al de mayor energía cinética. La respuesta rotacional del péndulo paramétrico clásico fue estudiada en detalle por Clifford y Bishop (1995), quienes establecieron las regiones del espacio de parámetros de forzamiento donde es factible tal respuesta. En base a estos estudios, Wiercigroch et al. (2011) propusieron emplear un péndulo paramétrico como recolector undimotriz y, seguidamente, Nandakumar et al. (2012) mostraron que era posible la extracción energética si el sistema pendular contaba con baja fricción.

Si bien la idea resulta muy prometedora, dada la alta energía que puede alcanzar un péndulo en rotación y la simplicidad del mecanismo, la tecnología es aún incipiente y afronta varios desafíos (Yurchenko y Alevras, 2018). Uno de estos desafíos corresponde a la búsqueda de configuraciones que proporcionen una mayor generación de energía, y es en el que se enfoca el presente trabajo. En tal sentido, con base en investigaciones previas (Dotti et al., 2017; Dotti y Virla, 2021; Rojas y Dotti, 2022), se adoptan valores de parámetros que responden a características físico-geométricas del péndulo paramétrico, como así también del generador, que permitirán abordar el estudio numérico aquí desarrollado.

El artículo se estructura de la manera que a continuación se detalla. La segunda sección introduce el desarrollo del modelo matemático simplificado de un convertidor pendular, constituido básicamente por una rueda pendular sometida a una excitación armónica vertical y un generador de corriente continua solidario a su eje de rotación. La tercera sección, mediante la utilización de técnicas de dinámica no lineal, esto es, diagramas de bifurcaciones y espacios de parámetros, aborda de forma preliminar un estudio numérico, haciendo particular énfasis en la identificación de soluciones rotatorias del sistema. Estos resultados son utilizados en la cuarta sección donde, mediante un reacomodamiento de las ecuaciones, se implementa un estudio de continuación numérica, recurriendo a la utilización del paquete de continuación provisto por Matlab. Finalmente, los aspectos más significativos de la investigación son resumidos y expuestos en la sección cinco.

2 MODELO MATEMÁTICO

Los generadores de corriente continua son máquinas eléctricas que convierten energía mecánica en energía eléctrica. En la Figura 1a se muestra el circuito equivalente de un generador de corriente continua, en el que el flujo de campo se obtiene de una fuente de alimentación independiente separada del circuito del generador (Chapman, 2001).

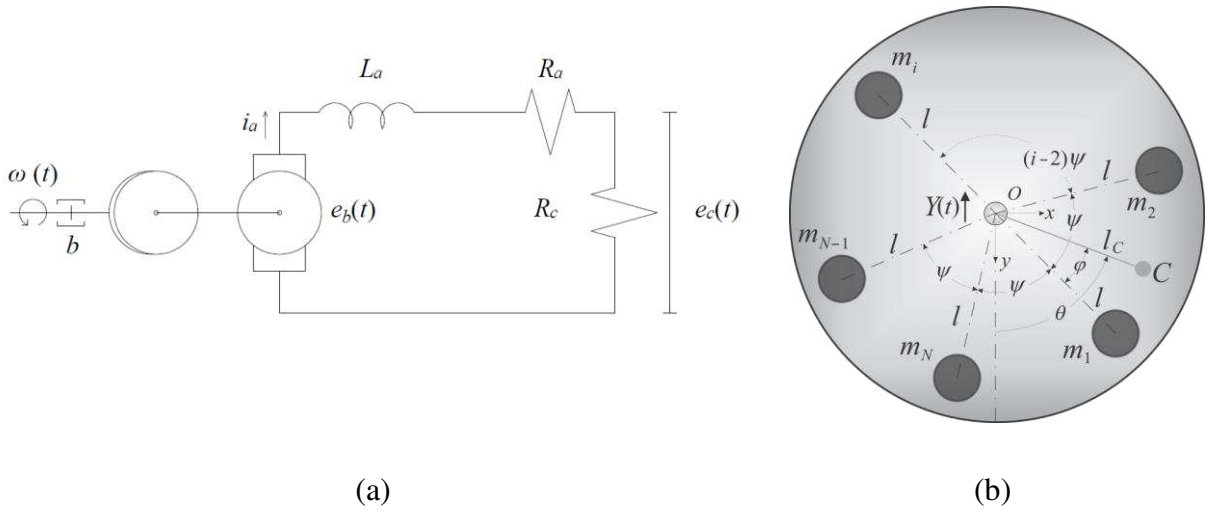


Figura 1: Esquema simplificado de un convertidor pendular compuesto por (a) circuito eléctrico de un generador de corriente continua y (b) rueda pendular de múltiples masas, sometida a un forzamiento vertical.

La ecuación diferencial que describe la dinámica del circuito de la [Figura 1a](#) es:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a - e_b(t) + e_c(t) = 0, \quad (1)$$

donde L_a e i_a son la inductancia y la corriente de la armadura respectivamente, mientras que R_a y R_c representan en ese orden las resistencias de la armadura y de la carga. No obstante, explícitamente, tanto el voltaje generado e_b , como el voltaje de carga e_c , resultan

$$e_b(t) = \kappa_n \omega(t), \quad e_c(t) = R_c i_a(t), \quad (2)$$

donde $\kappa_n = (2c)^{-1} \delta \rho$, representa la constante de construcción de la máquina eléctrica ([Rojas y Dotti, 2022](#)) y ω es la velocidad de entrada. En la fórmula de κ_n , $2c$ es el número de circuitos derivados o ramas en paralelo, ρ es el radio del rotor y $\delta = B L n$ es el factor de transducción, siendo B la inducción magnética, L el ancho del devanado en el rotor y n el número de espiras en el inducido. Sustituyendo (2) en (1)

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a - \kappa_n \omega(t) + R_c i_a(t) = 0. \quad (3)$$

Llamando a la corriente $i_a = q'$ y agrupando las resistencias del circuito tal que $R = R_a + R_c$, e introduciendo la ecuación gobernante del péndulo paramétrico ([Rojas y Dotti, 2022](#)), el modelo matemático acoplado es

$$\begin{cases} Lq'' + Rq' - \kappa_n \theta' = 0, \\ I\theta'' + b\theta' + \kappa_n q' + Ml_c^2 (Y'' + g) \sin \theta = 0, \end{cases} \quad (4)$$

donde θ es la posición angular relativa al eje y , g es la gravedad, b es el coeficiente de fricción viscosa y $(\bullet)'$ denota derivación con respecto al tiempo t . La masa total está representada por M , el momento de inercia viene dado por I y l_c es la distancia desde el eje al centro de masas C (véase la [Figura 1b](#)). Además, se asume un forzamiento dado por

$Y(t) = -H \cos \omega t$, donde la amplitud H puede asociarse a la altura significativa de ola y Ω , a la frecuencia del oleaje. De aquí en adelante se establece un sistema referencial positivo, cuando la rueda pendular realiza un movimiento antihorario.

Realizando ahora la derivación con respecto al tiempo adimensional $\tau = \omega_0 t$, donde $\omega_0 = \sqrt{gM l_c / I}$ es la frecuencia natural de la rueda pendular, y considerando el siguiente cambio de variables

$$\theta'' = \omega_0^2 \ddot{\theta}, \quad \theta' = \omega_0 \dot{\theta}, \quad q'' = \omega_0^2 \ddot{q}, \quad q' = \omega_0 \dot{q}, \quad (5)$$

se inyecta (5) en (4), y dividiendo todos los términos por $I \omega_0^2$, el sistema de ecuaciones resulta

$$\begin{cases} \frac{L}{I} \ddot{q} + \frac{R}{I \omega_0} \dot{q} - \frac{\kappa_n}{I \omega_0} \dot{\theta} = 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{b}{I \omega_0} \dot{\theta} + \frac{\kappa_n}{I \omega_0} \dot{q} + M l_c^2 (\Omega^2 H \cos \Omega \tau + g) \sin \theta = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Por último, introduciendo las magnitudes adimensionales

$$\frac{L}{I} = \lambda, \quad r = \frac{R}{I \omega_0}, \quad \kappa = \frac{\kappa_n}{I \omega_0}, \quad \beta = \frac{b}{I \omega_0}, \quad p = \frac{\Omega^2 H}{g}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad (7)$$

el sistema no autónomo de ecuaciones adimensionalizadas se reescribe, obteniendo

$$\begin{cases} \lambda \ddot{q} + r \dot{q} - \kappa \dot{\theta} = 0, \\ \ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} + \kappa \dot{q} + (1 + p \cos \omega \tau) \sin \theta = 0, \end{cases} \quad (8)$$

el cual representa de manera simplificada un sistema constituido por un péndulo paramétrico con un generador eléctrico de corriente continua adosado a su eje. El sistema cuenta con seis parámetros: p y ω se asocian a la amplitud y frecuencia del forzamiento externo respectivamente, β corresponde a la fricción propia del péndulo, κ se asocia a la constante de construcción del generador, λ a su inductancia y r a la resistencia.

3 ESTUDIO NUMÉRICO PRELIMINAR

Considerando el sistema no autónomo de ecuaciones obtenido en (8), se procede a reducir el orden de derivación del mismo. Para ello, se realiza la siguiente reestructuración en términos de variables de estado

$$q = x_1, \quad \dot{q} = x_2, \quad \theta = x_3, \quad \dot{\theta} = x_4, \quad (9)$$

lo que resulta,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{r}{\lambda}x_2 + \frac{\kappa}{\lambda}x_4, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\kappa x_2 - \beta x_4 - (1 + p \cos \omega \tau) \sin x_3. \end{cases} \quad (10)$$

Resolviendo numéricamente (10) mediante el método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden, se procede a estudiar el comportamiento dinámico. La Figura 2 muestra, para una determinada configuración de los parámetros intervinientes del sistema, las respuestas estacionarias que se pueden obtener mediante la imposición de un set de condiciones iniciales θ_0 y $\dot{\theta}_0$. Tales gráficas corresponden a las denominadas cuencas de atracción. Así, la cuenca de atracción de la Figura 2a exhibe que la única respuesta posible es la respuesta rotacional deseada del péndulo. La estructura muestra zonas robustas, esto es, zonas “no ruidosas”, donde hay predominancia de rotaciones puras, sean estas horarias o antihorarias. Puede identificarse, además, que el resto del espacio de fase se encuentra fractalizado, donde resulta impredecible el sentido de las rotaciones para un valor aleatorio de condiciones iniciales.

Por su parte, la Figura 2b, evidencia la sensible variación del sistema ante una mínima modificación de la constante del generador eléctrico κ . En este caso la respuesta oscilatoria y el caos coexisten y no se identifican atractores rotatorios.

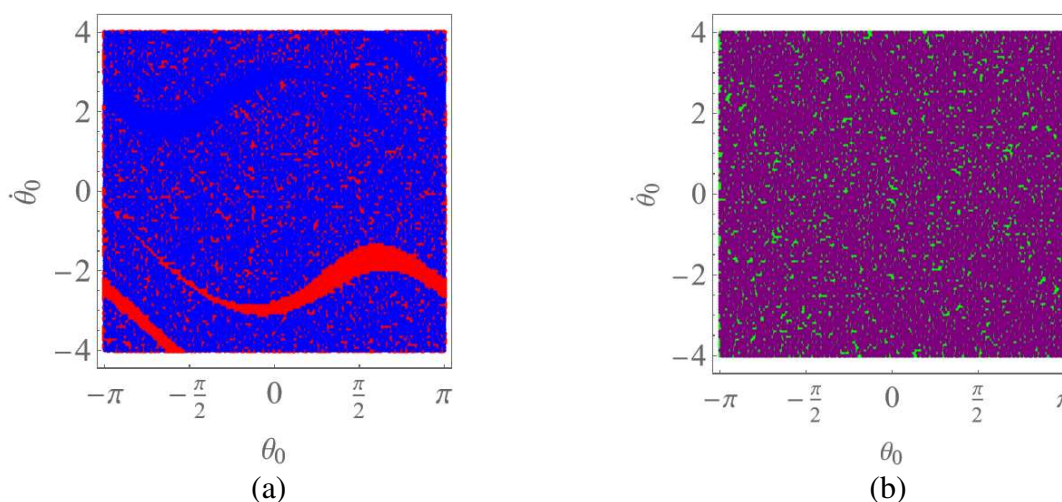


Figura 2: Cuencas de atracción para $p = 1.4$, $\omega = 2$, $\beta = 0.02$, $\lambda = 0.1$ y $r = 0.15$, (a) $\kappa = 0.21$ y (b) $\kappa = 0.22$. Referencia: Rotación antihoraria (●), Rotación horaria (●), Oscilación (●) y Caos (●).

La razón de este drástico cambio topológico con respecto al parámetro κ se evidencia en los diagramas de bifurcación de la Figura 3. Allí se plotean puntos de Poincaré de velocidad angular variando el parámetro p , construyéndose gráficas para distintos valores de κ . Comparando la Figura 3a y la Figura 3b se observa el nacimiento de un atractor caótico justo después de la desestabilización de las oscilaciones. Incrementando κ , también se incrementa el rango de p donde este nuevo atractor caótico está presente, resultando el mismo en una especie de divisoria de aguas entre las respuestas oscilatorias y rotatorias. Las rotaciones de la Figura 2a corresponden a $p = 1.4$, lo cual corresponde a rotaciones muy cercanas a este caos según lo indicado por la Figura 3b. Así, un pequeño aumento de κ , introduce al sistema en caos.

De la Figura 3 es muy importante observar que en todos los casos se cuenta con un amplio rango de p , esto es, de la amplitud de forzamiento, dentro del cual las rotaciones son las únicas respuestas posibles del sistema. En estas zonas, las cuencas de atracción son similares a la de la Figura 2a. Este resultado es clave para aplicaciones de extracción de energía, ya que la naturalidad de las respuestas rotatorias en ese rango hace innecesaria una acción de control para lograr rotaciones. En el caso de un forzamiento con H y Ω obtenidas por promediación (como puede ser la excitación del oleaje marino) el resultado obtenido implicaría un bajo gasto en acciones del control. Siendo κ un factor de diseño del generador, es posible seleccionar aspectos constructivos de éste con el fin de diseñar un sistema que se ubique en el mencionado rango favorable a las respuestas rotatorias.

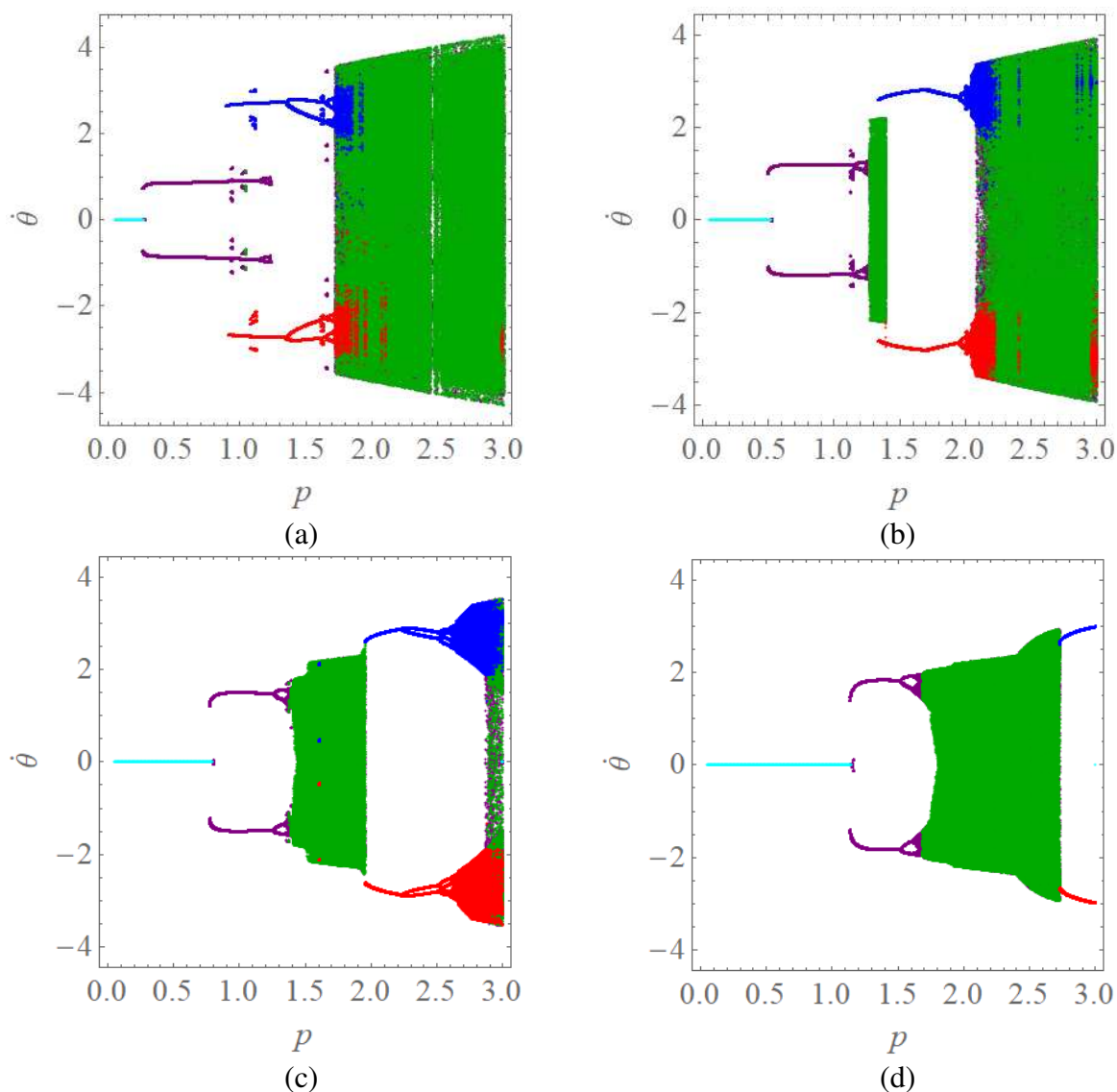


Figura 3: Diagramas de bifurcación variando el parámetro p , para $\omega = 2$, $\beta = 0.02$, $\lambda = 0.1$ y $r = 0.15$ y (a) $\kappa = 0.15$, (b) $\kappa = 0.21$, (c) $\kappa = 0.26$, (d) $\kappa = 0.31$. Referencia: Rotación antihoraria (\bullet), Rotación horaria (\bullet), Oscilación (\bullet) y Caos (\bullet).

4 CONTINUACIÓN DE LAS RESPUESTAS ROTATORIAS

Se procede a realizar el estudio del sistema mediante continuación numérica, valiéndose para ello del paquete de continuación MatCont, el cual es provisto por el programa Matlab. MatCont cuenta con herramientas para el estudio del comportamiento dinámico de sistemas autónomos, no permitiendo el tratamiento de sistemas no autónomos. Es necesario entonces, realizar un reacomodamiento del sistema original para su análisis. La aplicación del programa para un sistema no autónomo, como lo es el sistema (8), presenta tres dificultades que deben ser resueltas, adaptando el sistema original a uno análogo que permita realizar un estudio representativo de su dinámica (Najdecka, 2013).

Considerando el sistema (8), se procede a reducir el orden de derivación, redefiniendo las variables de la siguiente manera

$$q = x_1, \dot{q} = x_2, \theta = x_3 - \omega\tau, \dot{\theta} = x_4 - \omega, \cos \omega\tau = x_5, \sin \omega\tau = x_6. \quad (11)$$

Las rotaciones del péndulo no se identifican como periódicas en paquetes de continuación, debido al continuo crecimiento o decrecimiento del ángulo. Así, los términos $\omega\tau$ y ω propuestos en las sustituciones para x_3 y x_4 respectivamente, permiten al programa identificar las soluciones como periódicas. Este cambio, resulta de suponer que el péndulo gira en sentido antihorario, esto es, velocidad positiva y ángulo de rotación en continuo incremento, respetando el sistema de referencia adoptado inicialmente.

Reemplazando (11) en (8) y aplicando identidades trigonométricas, se procede a reconfigurar el sistema en uno autónomo equivalente de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = -\beta(x_4 - \omega) - \kappa x_2 - (1 + p x_5)(\sin x_3 x_5 - \cos x_3 x_6) = 0, \\ \dot{x}_2 = -\frac{r}{\lambda} x_2 - \frac{\kappa}{\lambda}(x_4 - \omega) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

No obstante, el requerimiento de que se identifiquen las soluciones como periódicas, hace necesario que todas las variables lo sean. Para ello, la introducción de dos nuevas ecuaciones diferenciales \dot{x}_5 y \dot{x}_6 , cuyas soluciones sean estables, serán necesarias (Najdecka, 2013; Roussel, 2019). En efecto, se obtiene un sistema de seis ecuaciones dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{r}{\lambda} x_2 - \frac{\kappa}{\lambda}(x_4 - \omega), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\beta(x_4 - \omega) - \kappa x_2 - (1 + p x_5)(\sin x_3 x_5 - \cos x_3 x_6), \\ \dot{x}_5 = x_5(1 - x_5^2 - x_6^2) + \omega x_6, \\ \dot{x}_6 = x_6(1 - x_5^2 - x_6^2) - \omega x_5. \end{cases} \quad (13)$$

El reacomodamiento propuesto reúne las condiciones que MatCont impone, para interpretar los crecientes incrementos del ángulo alcanzado por el péndulo en rotación. La resolución numérica de (13) mediante la integración de las ecuaciones hasta alcanzar un estado estacionario, permitirá encontrar un set de condiciones iniciales de posición y velocidad adecuadas para dar inicio a la respuesta rotacional.

Del estudio anterior se identifica una solución periódica rotatoria dentro de la zona de resonancia principal (centrada en $\omega = 2$ en el espacio de parámetros $p-\omega$, Dotti et al., 2015), correspondiente a una respuesta de alta energía cinética. Utilizando estos valores, se define el ciclo límite inicial para comenzar la continuación, mediante la selección de un parámetro de bifurcación.

La Figura 4 muestra una bifurcación silla-nodo obtenida de variar la frecuencia de forzamiento. Para $\omega = 2.17$, el ciclo en rojo (LPC) marca el nacimiento de un punto de bifurcación que da lugar a que, juntas, las rotaciones horarias y antihorarias emerjan. Así, el desarrollo del ciclo límite durante la continuación, permite identificar la frontera de existencia del movimiento rotacional del sistema. Además, un doblamiento de período (PD) para un valor de $\omega = 1.77$, es identificado durante la evolución.

La Figura 5 ha sido confeccionada a partir de realizar la variación de la amplitud de forzamiento. De similar manera al caso de la Figura 4, la silla-nodo indica el nacimiento de las rotaciones (LPC), para un valor de $p = 1.29$. Como consecuencia del cambio creciente del parámetro de bifurcación, una serie de cascadas de período doble son identificadas. La primera ocurre para $p = 1.69$, mientras que la siguiente sucede cuando la amplitud adopta el valor de $p = 3$.

El cambio que introduce la variación de los parámetros de bifurcación da como resultado un cambio en la forma de la gráfica en la medida que transcurre la continuación, lo que representa el comienzo del fin de las rotaciones, iniciando la ruta al caos.

Dada la transformación de variables realizada en (13), las rotaciones periódicas son presentadas por órbitas cerradas en el plano de fase. Cabe aclarar, que, dado el sistema en (10), descrito por las variables originales, las rotaciones periódicas equivalen a oscilaciones del mismo período en términos de las nuevas variables propuestas en (11).

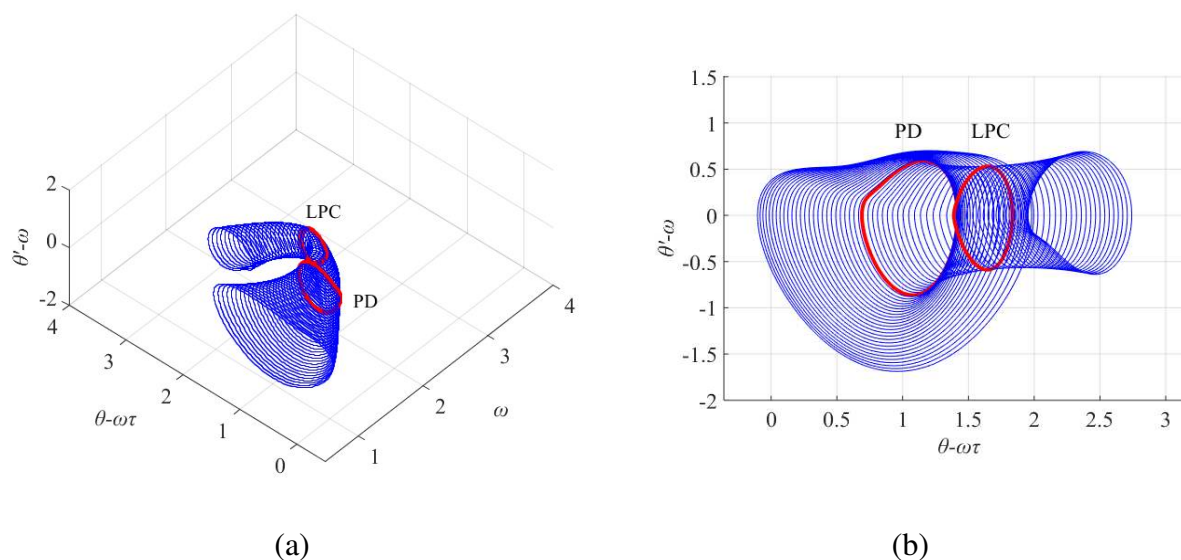


Figura 4: Representación (a) 3D y (b) 2D de una bifurcación silla-nodo y su evolución en el plano de fase de la solución rotatoria al variar el parámetro ω , para $p = 1.4$, $\beta = 0.02$, $\lambda = 0.1$, $r = 0.15$ y $\kappa = 0.21$.

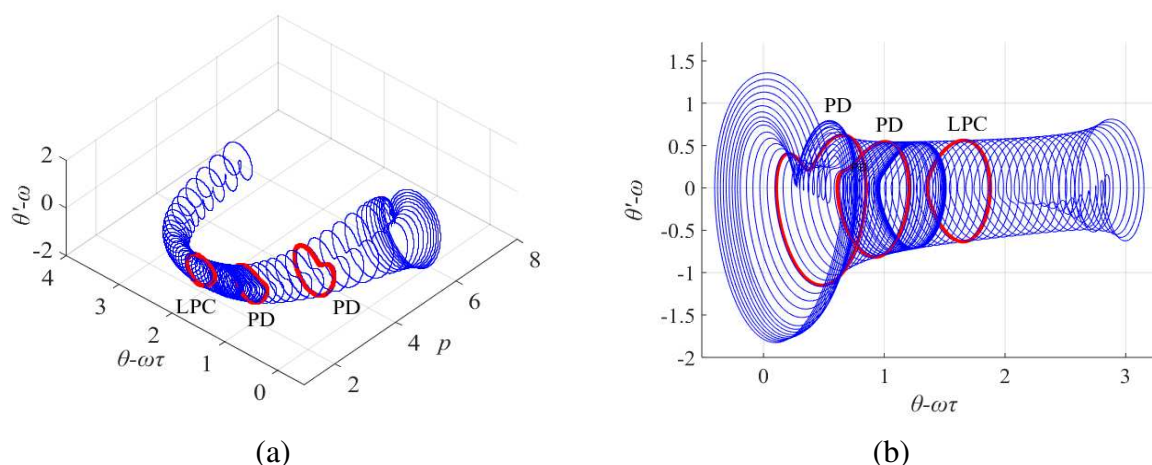


Figura 5: Representación (a) 3D y (b) 2D de una bifurcación silla-nodo y su evolución en el plano de fase de la solución rotatoria al variar el parámetro p , para $\omega = 2$, $\beta = 0.02$, $\lambda = 0.1$, $r = 0.15$ y $\kappa = 0.21$.

5 CONCLUSIONES

En este artículo se abordó el estudio de la dinámica no lineal rotatoria de un sistema compuesto por un péndulo paramétrico sometido a una excitación externa vertical y un generador de corriente continua adosado a su eje pivot. Se presentó a tal efecto un modelo matemático simplificado de este sistema. La investigación conducida tiene como objetivo incrementar el conocimiento acerca de este tipo de sistemas electromecánicos, apuntando a una futura implementación como convertidor de energía undimotriz.

El estudio computacional realizado se centró en comprender la compleja dinámica involucrada, haciendo especial énfasis en la identificación de rangos de los parámetros de forzamiento en los cuales puedan obtenerse respuestas rotatorias robustas del péndulo. Estas rotaciones implican la máxima obtención de energía eléctrica mediante el generador adosado. Se arribó a la conclusión de que, bajo determinadas condiciones de diseño, la respuesta rotatoria puede resultar la única posible del sistema dinámico. Además, mediante una reconfiguración del sistema, se identificó mediante continuación numérica, aquellos valores para los cuales los parámetros de bifurcación seleccionados conducen a valores límites donde las respuestas rotatorias del sistema son posibles. No obstante, se demostró que, para ciertas configuraciones, un pequeño cambio en aspectos constructivos del generador puede propiciar la desestabilización del movimiento rotatorio y la consecuente aparición de un comportamiento caótico. Esto refleja el desafío que la futura materialización del convertidor enfrentará, para lograr el efecto deseado. El refinamiento del modelo, junto con el estudio de configuraciones que permitan obtener respuestas rotatorias más robustas, como la posible implementación de un sistema de control de las rotaciones ante posibles respuestas oscilatorias o caóticas, son actualmente temas de investigación.

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional, el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica y la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.

REFERENCIAS

- Chapman, S. J. (2001). *Maquinas eléctricas* (3^{ra} ed.). McGraw-Hill Companies.
- Clifford, M. J., y Bishop, S. R., Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters. A*, 201(2-3), 191-196, 1995
- Dotti, F. E., Reguera, F., y Machado, S. P., A review on the nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting from ocean waves. *Proceedings of the 1st Pan-American Congress on Computational Mechanics*. PANACM 2015, 1516-1529, 2015.
- Dotti, F., y Virla, J., Nonlinear dynamics of the parametric pendulum with a view on wave energy harvesting applications. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2021.
- Dotti, Franco E., Reguera, F., y Machado, S. P., Damping in a parametric pendulum with a view on energy harvesting. *Mechanics research communications*, 81, 11-16, 2017.
- Guo, Y., y Luo, A. C. J., Bifurcation dynamics of a damped parametric pendulum. *Synthesis Lectures on Mechanical Engineering*, 3(5), 1-98, 2020.
- Leven, R. W., & Koch, B. P., Chaotic behavior of a parametrically excited damped pendulum. *Physics Letters A*, 86(2), 71-74, 1981.
- McLaughlin, J. B., Period-doubling bifurcations and chaotic motion for a parametrically forced pendulum. *Journal of Statistical Physics*, 24(2), 375-388, 1980.
- Najdecka, A., *Rotating dynamics of pendula systems for energy harvesting from ambient vibrations (Doctoral dissertation)*, 2013.
- Nandakumar, K., Wiercigroch, M., y Chatterjee, A., Optimum energy extraction from rotational motion in a parametrically excited pendulum. *Mechanics Research Communications*, 43, 7-14, 2012.
- Rojas, L. M., y Dotti, F. E., Prediseño de un Convertidor de Energía Undimotriz Basado en la Dinámica del Péndulo Paramétrico para una Aplicación a Pequeña Escala en Ambiente Real. *Mecánica Computacional*, 39(2), 87-96, 2022.
- Roussel, M. R., *Nonlinear dynamics: A hands-on introductory survey*. Morgan y Claypool, 2019.
- Wiercigroch, M., Najdecka, A., y Vaziri, V., Nonlinear dynamics of pendulums system for energy harvesting. *Vibration Problems ICOVP 2011: The 10th International Conference on Vibration Problems, Springer Proceedings in Physics* 139:35-42, 2011.
- Yurchenko, D. y Alevras, P., Dynamics of the N -pendulum and its application to a wave energy converter concept. *International Journal of Dynamics and Control* 1(4):290-299, 2013.