

## WAVELET STUDY OF SPONGE LAYER IN 3D SHALLOW WATER

Leandro Ferreyra, Walter E. Legnani

Área de Matemática Aplicada - UDB Matemática  
Facultad Regional Buenos Aires - Universidad Tecnológica Nacional  
Avda. Medrano 951, C1179AAQ, Buenos Aires, Argentina. TE: 54-(011)-48677530  
e-mail: lferreyra@cedi.frba.utn.edu.ar  
e-mail: walter@cedi.frba.utn.edu.ar

**Palabras clave:** wavelets, sponge layer, shallow water, dinámica estratosférica, métodos espectrales.

**Resumen.** *En el presente estudio se ha aplicado el análisis de la transformada wavelet discreta para caracterizar matemáticamente la estructura vertical de una capa de esponja que desempeñó un papel fundamental en un modelo de aguas poco profundas. El modelo se ha empleado para el estudio de la dinámica del vórtice polar austral, este posee una frontera inferior por donde se le aplica el forzante y una superior libre. Estas características particulares en las condiciones de borde originan numerosas perturbaciones espúreas que inestabilizan computacionalmente las integraciones numéricas. La estabilización numérica del modelo físico-computacional se logró mediante el adecuado diseño de dicha capa absorbente aplicada al campo de temperaturas solamente. La propuesta comprende un modelo de circulación atmosférica general que emplea armónicos de Hough como base de autofunciones del operador de aguas poco profundas en la integración de las ecuaciones fluidodinámicas en el plano horizontal (latitud y longitud), mientras que en la vertical se emplea un esquema de interpolación basado en splines cúbicas. Los resultados obtenidos del modelo de aguas poco profundas fueron validados frente a mediciones satelitales, mostrando así el éxito en el diseño de la capa de esponja. Este éxito se evidencia en que la presencia de la misma no afectó de manera sensible las integraciones de las ecuaciones del modelo y en cambio consiguió estabilizarlo computacionalmente. Las propiedades de la capa de esponja que finalmente se empleó en los experimentos computacionales, quedaron totalmente reveladas mediante el estudio realizado en base a la descomposición en wavelets, lo que contribuye a sistematizar su diseño y optimizar su operación.*

## 1 INTRODUCCIÓN

El vórtice polar regula la circulación en la región antártica y es el contenedor natural del agujero de ozono que aparece durante la primavera austral. El estudio de la forma del vórtice polar es por lo tanto sumamente importante, pues de su dinámica surge el patrón de formas que va adoptando el agujero de ozono.

La dinámica del vórtice polar depende de los procesos termodinámicos y dinámicos que tienen lugar a su alrededor y en la troposfera por debajo de él. La relación entre la actividad de ondas y su incidencia sobre el agujero de ozono ha sido estudiada extensamente en trabajos tanto observacionales como sobre modelos. Estudios como los de Charney y Drazin<sup>1</sup> y Dickinson<sup>2</sup> evaluaron la presencia de ondas de escala planetaria en la atmósfera. Edmon<sup>3</sup> y Andrews<sup>4</sup> verificaron las características de propagación y el forzado del flujo medio por estas ondas. Más recientemente, se puede encontrar en el trabajo de Bodeker y Scourfield<sup>5</sup> una correlación negativa entre la actividad de la onda 1 y la pérdida de ozono sobre el polo. Un año más tarde Kawahira y Shiratori<sup>6</sup> ratificaron este supuesto extendiendo la influencia de ondas de mayor número en la pérdida de ozono sobre el polo.

Según lo expusieron Shindell<sup>7</sup> la relación entre el forzado de ondas provenientes de la tropósfera y la deformación del agujero de ozono o del vórtice polar aún no se halla bien comprendida.

En el presente trabajo se implementó un modelo del vórtice polar que reprodujo las condiciones dinámicas y termodinámicas del fenómeno en estudio. Para lograr esto se requirió del desarrollo de gran cantidad de algoritmos numéricos y de software a medida que se convirtieron en un nuevo modelo físico-computacional de mecánica de fluidos aplicado a la dinámica de la atmósfera, que, en su forma actual, no revista antecedentes en la literatura a nivel mundial.

En la sección 2 se plantea el sistema de ecuaciones que describe el modelo empleado, las que coinciden con un sistema de ecuaciones de aguas poco profundas cuasi-tridimensional. En este punto se discuten ciertas características principales de dicho sistema pertinentes al interés de este trabajo. El sistema de coordenadas empleado fue el isentrópico, que se mostró como apropiado para dicha labor (debido principalmente a la cuasi conservación de la vorticidad potencial que es empleada como un trazador dinámico).

Para poder implementar con éxito el modelo se requirió el diseño de distintas etapas para preparar los datos necesarios y coordinar su ingreso en la estructura principal del mismo.

También se hizo necesario el desarrollo de recursos numéricos a medida, que se muestran en la sección 3. El forzante lo constituyó la temperatura de tropopausa, que también debió ser preprocesada antes de incorporarla al cuerpo principal del modelo.

La resolución en el plano horizontal se realizó a través de los armónicos de Hough que forman una base de autofunciones del operador de aguas poco profundas. En la vertical se hizo uso de bases de splines.. Se encontró que los valores del forzante debieron ser filtrados para que no se desarrollaran inestabilidades que causaban la interrupción no deseada de la integración.

Entre los recursos numéricos que se desarrollaron se encuentra la implementación de una

capa de esponja en la frontera superior del modelo. Las propiedades de esta capa son el objeto del presente trabajo y fueron analizadas en profundidad mediante el uso de la transformada wavelet.

## 2 ECUACIONES DEL MODELO

El modelo de aguas poco profundas se planteó siguiendo el trabajo de Legnani<sup>8</sup>.

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{W}$  es el vector de incógnitas,  $\mathbf{L}$  es el operador lineal de aguas poco profundas y  $\mathbf{F}$  es el vector de forzantes del sistema que además contiene todos los aportes no lineales del sistema de ecuaciones.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ h \end{bmatrix}, \quad (2)$$

En forma detallada resultan ser:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -f & \frac{\mathbf{g}}{\cos(f)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \\ f & 0 & \mathbf{g} \frac{\partial}{\partial f} \\ \frac{\mathbf{g}}{\cos(f)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} & \frac{\mathbf{g}}{\cos(f)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} [\cos(f)] & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g} \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} - s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} + \mathbf{g} \nabla h - u \tan(f) \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v} - \mathbf{g} \nabla \Psi_B - \mathbf{g} \int_{s_B}^s \nabla h ds' - \mathbf{D} \\ -\mathbf{g} \mathbf{v} \cdot \nabla h - s \frac{\partial h}{\partial s} + \dot{q} + \mathbf{g} \nabla \cdot \mathbf{v} + \left( \frac{h_T}{h} \right)^{\frac{1}{k}-1} e^{-\frac{s_T-s}{k}} \left[ \frac{\partial h_T}{\partial t} - \dot{q}_T \right] \\ -\mathbf{g} \frac{e^{\frac{s}{k}}}{h^{\frac{1}{k}-1}} \int_{s_T}^s \frac{h^{\frac{1}{k}-1}}{e^{\frac{s'}{k}}} \left[ \nabla \cdot \mathbf{v} \left( \frac{\partial h}{\partial s'} - h \right) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s'} \cdot \nabla h \right] ds' \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Donde  $u$  es la velocidad en la dirección longitudinal,  $v$  su análogo en la dirección latitudinal,  $f$  es el ángulo que indica la latitud,  $h$  es la entalpía,  $s$  es la coordenada vertical que denota a un nivel isentrópico dado,  $\Psi_B$  es la puesto corriente de Montgomery,  $q$  es la cantidad de calor,  $D$

representa la fuerza de rozamiento y  $k$  es la constante de Boltzman,  $f$  es el término de la fuerza de Coriolis, y  $\lambda$  es la coordenada que indica la longitud.

Los factores de escala correspondientes son: para la velocidad  $v_0 = \sqrt{g H_0}$  (también llamada velocidad de fase para las aguas poco profundas según la altura de referencia  $H_0$ ), para el geopotencial  $g H_0$ , el tiempo y el parámetro de Coriolis se normalizan por  $2 \Omega$ , y  $\nabla_z$  por  $1/a$ .

El operador resultante se parametriza por  $\gamma$ , que es

$$\mathbf{g} = \frac{\sqrt{g H_0}}{2 \Omega a}, \quad (5)$$

donde  $H_0$  es la altura de fluido sin perturbar ( $\Phi_0 = g H_0$ ), también llamada altura equivalente por algunos autores.

El sistema de ecuaciones del modelo se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, s, t)}{\partial t} + \mathbf{L}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, t) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, s, t) = \mathbf{F}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, s, t), \quad (\mathbf{I}, \mathbf{f}, s) \in D, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

donde  $D$  es el dominio espacial del problema con contorno  $\partial D$ ,  $\mathbf{L}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, s)$  es el operador diferencial lineal de aguas poco profundas (en el espacio físico). Los términos no lineales del sistema de ecuaciones del modelo se incluyen en  $\mathbf{F}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, s, t)$  y las variables a integrar se hallan representadas en forma vectorial en la variable  $\mathbf{W}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, s, t)$ .

El vector de incógnitas se puede desarrollar en serie en base a un conjunto de funciones dadas Gottlieb y Orszag<sup>9</sup>.

$$\mathbf{W}_{k,j}(s, t) = \sum_{m,n}^{M,N} \Xi_{k,j}(s, t) \mathbf{H}_{k,j}(\mathbf{I}, \mathbf{f}), \quad (7)$$

donde  $\mathbf{X}_{k,j}$  son los coeficientes del desarrollo y  $\mathbf{H}_{k,j}$  son una base de funciones del subespacio en cuestión. En este punto cabe resaltar el hecho de que las funciones  $\mathbf{H}_{k,j}$  están definidas en el plano horizontal del modelo, resultando los  $\mathbf{W}_{k,j}$  ser funciones de la coordenada vertical y del tiempo; en tal sentido, para la coordenada vertical se empleará interpolación en función de bases de splines cúbicas, y con respecto al tiempo se empleó un esquema semi-implícito tipo LeapFrog. (Para ver mayores detalles de la integración temporal como espacial ver detalles en Legnani<sup>8</sup>).

### 3 CAPA DE ESPONJA

Dado que la densidad disminuye monótonamente con la altura, las ondas que se propagan en la alta atmósfera aumentan su amplitud por el principio de conservación de energía. Si éstas aumentan espúreamente transfiriendo gran cantidad de momento y energía al contorno superior del modelo, éste termina inestabilizándose, provocando que la condición de estabilidad hidrostática no se mantenga, lo que conduce a una interrupción de la integración

del sistema de ecuaciones. Para mitigar este efecto se añadió un término fuente al sistema de ecuaciones que provocase la relajación lineal del campo de temperatura al estado medio de fondo. Esto se conoce como capa de esponja.

El término que la representa tiene la forma siguiente

$$SL = S_L (T' - T_o), \tag{8}$$

siendo  $S_L$  el coeficiente que define la actividad de la capa de esponja, que en el caso del presente modelo se halla representado en la figura 1,  $T'$  la desviación de la temperatura respecto de un valor medio, y  $T_o$  el valor medio o de fondo.

Esta tenía aproximadamente el aspecto de una tangente hiperbólica, y se aplicaba sobre el campo térmico sin afectar directamente a los campos dinámicos y fue diseñada *ad hoc* durante la implementación del presente modelo.

La actividad de ondas que alcanzan la zona de acción de la capa de esponja es absorbida totalmente. La disipación térmica de la capa de esponja no introduce una modificación en el patrón de circulación medio zonal.

En la figura 1 se puede apreciar el aspecto que adoptó la capa de esponja que se empleó en las integraciones computacionales del sistema de ecuaciones del modelo. Este diseño resultó ser el más adecuado para brindar una fuerte disipación a la actividad de ondas en la frontera superior del modelo que se hallaba muy alejado de la zona de interés de los estudios realizados.

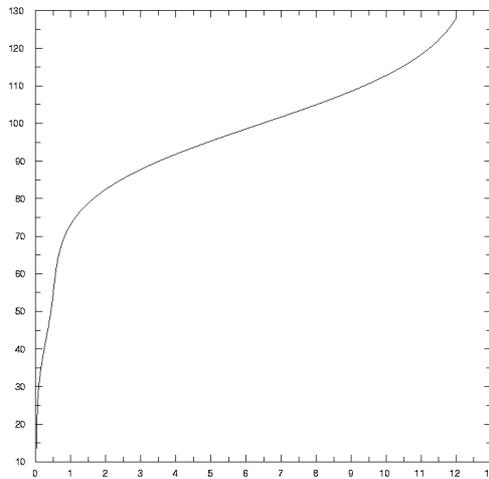


Figura 1

Amortiguamiento lineal - Capa de esponja

El eje vertical es la altura aproximada en kilómetros, el eje horizontal es el valor Del coeficiente de amortiguamiento lineal del campo térmico en ciclos por día ( $S_L$ ).

La transferencia de energía en la atmósfera de la Tierra envuelve a la radiación en dos bandas de longitudes de onda diferentes. Una es la radiación de longitud de onda más corta

(en inglés SW) proveniente del Sol, y otra de longitud de onda más larga emitida por la Tierra hacia el espacio (en inglés LW). Dentro de la aproximación de enfriamiento al espacio (Salby, 1996) el balance entre la radiación SW incidente y la LW saliente se puede modelar por la expresión

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\mathbf{r} c_p} B[T(z)] \frac{dT_v(z-\infty)}{dz}, \quad (9)$$

donde  $T$  es la temperatura en grados Kelvin,  $\mathbf{r}$  la densidad del aire,  $c_p$  la constante de calor a presión constante,  $T_n$  la transmisividad de la radiación de frecuencia media  $\nu$ ,  $B(T)$  la expresión de la ley de Planck para radiación de cuerpo negro,  $z$  la altura y  $\infty$  el valor de  $z$  que define un contorno alejado suficientemente de la zona de estudio.

Si consideramos una perturbación de la forma  $T'(z,t)$  respecto de un perfil de temperatura de equilibrio  $T_0(z)$ , y si  $T/T_0 \ll 1$ , aplicando la expresión anterior en su versión linealizada para la temperatura primada se obtiene

$$\frac{dT'}{dt} = -\frac{1}{\mathbf{r} c_p} B[T_0(z)] \frac{dT_v(z-\infty)}{dz} T' = \mathbf{a}(z) T', \quad (10)$$

que se conoce como aproximación de enfriamiento newtoniano, y que en el presente modelo gobierna la evolución de las anomalías en la temperatura. El coeficiente de enfriamiento newtoniano  $\mathbf{a}(z)$  varía espacialmente a lo largo de la estructura de equilibrio térmico  $T_0(z)$ .

Esta aproximación tiene una importancia práctica muy grande porque elimina relaciones complejas entre las variables involucradas y brinda una expresión muy sencilla que depende solamente de la temperatura local y es lineal respecto de la perturbación.

#### 4 RESULTADOS DEL MODELO

Para validar los resultados del modelo se emplearon datos de mediciones satelitales corregidos por reanálisis del centro Goddard (fuente National Center for Environmental Products (NCEP)) mientras que los datos del forzante (valores del contorno inferior del recinto de integración) para el presente modelo fueron tomados a partir de datos de temperatura del European Center for Medium Weather Forecast (ECMWF). Esta estrategia de validar las pruebas del modelo con resultados de otros centros se planteó como metodología para darle fuerza a las conclusiones del trabajo incrementando el punto de vista objetivo.

También se debe tener presente que los gráficos en contornos de color fueron realizados empleando la proyección ortográfica mientras que los de contornos del centro Goddard se realizaron en proyección estereográfica.

Se muestra a continuación el resultado de la integración del modelo para el día 7 de Octubre de 1990. De la comparación de ambos gráficos se puede concluir:

- a) La orientación del vórtice polar en ambos gráficos es la misma, coincidiendo la orientación de los semiejes mayor y menor de los elipsoides.

- b) La prominencia que se encuentra en el resultado del modelo se halla presente en los datos del centro Goddard.
- c) La prominencia por fuera del vórtice que se extiende próxima a los 240° de longitud oeste se puede ver en ambos gráficos.
- d) La lengua de vorticidad que se observa claramente definida en el resultado del modelo se observa en el gráfico 2.

Cabe destacar que los resultados de los modelos en la generalidad de los casos poseen mayor simetría zonal (a lo largo de un anillo de latitud constante) que los datos observacionales

En la tabla siguiente se compara el cociente de los semiejes de los elipsoides de ambas fuentes:

Modelo	Cociente entre semiejes	Diferencia Porcentual Relativa
Goddard Space Flight Center	1.31	2.29 %
Este trabajo	1.28	
Tabla 1 Validación de resultados		

Posición de los ejes del elipsoide de vorticidad potencial

Goddard Space Flight Center		Este trabajo		Diferencia Porcentual Relativa	
Eje Mayor	Eje Menor	Eje Mayor	Eje Menor	Eje Mayor	Eje Menor
191°	98°	188°	100°	1.57 %	2.04 %
Diferencia entre ejes: 93° (*)		Diferencia entre ejes: 88° (*)			
Tabla 2 Validación de resultados					

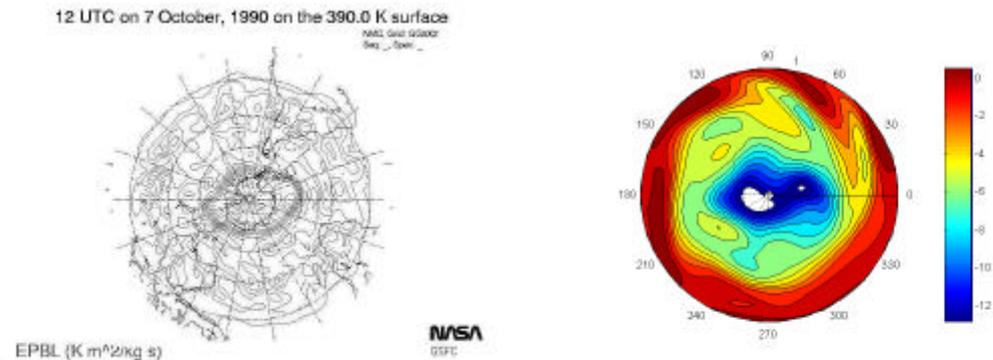


Figura 2  
 Contornos de PV Día 7 de Octubre de 1990  
 Datos del Goddard Space Flight Center (izquierda). Resultado modelo (derecha)

## 5 ANALISIS WAVELET DE LA CAPA DE ESPONJA

### 5.1 Marco Teórico

La transformada wavelet puede ser utilizada para analizar series de datos que contienen potencia estacionaria o no para diferentes frecuencias Daubechies<sup>10</sup>. Sea por ejemplo una serie de datos  $x_n$ , con intervalo de muestreo  $dt$  y  $n = 0 \dots N-1$ . Asumiendo también que una existe una *función wavelet*  $y_0(\mathbf{h})$  que depende de un parámetro de “tiempo” adimensional  $\mathbf{h}$ . Para que la función seleccionada como wavelet sea “admisible” esta debe tener media cero y ser localizada tanto en el espacio del tiempo como en el de frecuencia Farge<sup>11</sup>. Un ejemplo es la wavelet Morlet, que consiste en la modulación de una onda plana a través de una Gaussiana:

$$y_0(\mathbf{h}) = p^{-1/4} e^{i w_0 h} e^{-h^2/2}, \quad (11)$$

donde  $w_0$  es la frecuencia no dimensional,

El término “función wavelet” es usado genéricamente para referirse tanto para wavelets ortogonales como no ortogonales. El término “bases de wavelets” se refiere únicamente a un conjunto de funciones ortogonales. El uso de una base ortogonal implica el uso de *la transformada wavelet discreta* mientras que una función wavelet no ortogonal puede ser usada tanto para una transformada wavelet continua como una discreta Farge<sup>11</sup>. En este

trabajo se usará solamente la transformada continua. La transformada wavelet continua de una secuencia discreta  $x_n$  se define como la convolución de  $x_n$  con una versión trasladada y en escala de  $\mathbf{y}_0(\mathbf{h})$ :

$$W_n(s) = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \Psi * \left[ \frac{(n'-n)dt}{s} \right], \quad (12)$$

donde (\*) indica el complejo conjugado. Variando la *escala wavelet*  $s$  y trasladando a lo largo del *índice de tiempo localizado*  $n$ , se puede construir un gráfico mostrando tanto la amplitud de cualquier figura frente a la escala como la variación de esa amplitud con el tiempo. El subíndice 0 en  $\Psi$  se coloca para indicar que también ha sido normalizada. Aunque es posible calcular la transformada wavelet usando (12), es considerablemente más rápido hacer los cálculos en el espacio Fourier.

Para aproximar la transformada wavelet continua, la convolución (12) debe ser hecha  $N$  veces para cada escala, donde  $N$  es el número de puntos en la serie de tiempo Kaiser<sup>12</sup>. (La elección de hacer las  $N$  convoluciones es arbitraria, se puede elegir un número menor saltando algunos puntos en  $n$ ). Eligiendo  $N$  puntos, el teorema de convolución permite las  $N$  convoluciones simultáneas en el espacio Fourier utilizando la transformada de Fourier discreta (DFT).

Usando (11) y una rutina standard de la transformada de Fourier, se puede calcular la transformada wavelet continua (para un  $s$  dado) para todo  $n$  simultanea y eficientemente.

### Normalización

Para asegurar que la transformada wavelet (12) para cada escala  $s$  sea directamente comparable entre sí y con la transformada de otra serie de tiempo, la función wavelet para cada escala  $s$  es normalizada para tener uniformidad de escalas de energía, como se muestra a continuación:

$$\hat{\Psi}(s\mathbf{w}_k) = \left( \frac{2ps}{dt} \right)^{1/2} \hat{\Psi}_0(s\mathbf{w}_k), \quad (13)$$

### Potencia espectral wavelet

Debido a que la función wavelet  $\Psi(\mathbf{h})$  es en general compleja, la transformada wavelet  $W_n(s)$  es también compleja. La transformada puede ser entonces dividida en parte real  $\Re\{W_n(s)\}$  y parte imaginaria  $\Im\{W_n(s)\}$ , o amplitud  $|W_n(s)|$  y fase  $\tan^{-1}[\Im\{W_n(s)\}/\Re\{W_n(s)\}]$ . Finalmente se puede definir el espectro de energía wavelet como  $|W_n(s)|^2$ . Para valores reales de funciones wavelet como ser las DOGs (derivadas de una Gaussiana) la parte imaginaria es cero y la fase es indefinida.

### Funciones wavelet

Una de las críticas al análisis wavelet es la arbitrariedad en la elección de la función wavelet,  $\Psi_0(\mathbf{h})$ . (Se debe notar que la misma elección arbitraria ocurre en las transformadas más tradicionales como la de Fourier, Bessel, Legendre, etc.). En la elección de la función wavelet hay numerosos factores que deben ser considerados. (Para mayor discusión ver Farge<sup>11</sup>).

*Ortogonal o no ortogonal.* En el análisis ortogonal, el número de convoluciones para cada escala es proporcional al ancho de la base wavelet en dicha escala. Esto genera un espectro wavelet que contiene “bloques” discretos de energía wavelet que es útil tanto para el procesamiento de la señal como para la representación más compacta de la señal. Desafortunadamente para el análisis de series de tiempos donde los cambios no son periódicos produce un espectro wavelet diferente. Recíprocamente un análisis no ortogonal (como el de este estudio) es sumamente redundante a gran escala, donde el espectro wavelet en tiempos adyacentes es altamente correlativo. La transformada no ortogonal es útil para análisis de series de tiempo, donde no hay variación (suave), es de esperarse la continua variación en la amplitud wavelet.

*Complejo o real.* Una función wavelet compleja brindará información tanto en la amplitud como en la fase y capta mejor los comportamientos oscilatorios. Una función wavelet real brinda sólo un componente simple y puede ser usado para picos aislados o discontinuidades.

*Extensión.* Concretamente la amplitud de la función wavelet se define aquí como tiempo e-folding de la amplitud wavelet. La resolución de una función wavelet se determina por el balance entre la amplitud en el espacio real y la amplitud en el espacio Fourier. Una función estrecha o angosta como función del tiempo tendrá buena resolución en tiempo, pero pobre resolución en frecuencia, mientras que una función amplia tendrá pobre resolución en tiempo y buena resolución en frecuencia.

*Forma.* La función wavelet debe reflejar el tipo de forma presente en la serie de tiempo. Para las series de tiempos con saltos o escalones, se puede elegir una función tipo boxcar como lo es la de Harr, mientras que para series de tiempo con variaciones suaves se puede elegir una función suave como es el coseno amortiguado. Si primeramente interesa la energía espectral wavelet entonces la elección de la función wavelet no es crítica, es decir una función u otra darán la misma calidad de resultado.

Algunas de las aplicaciones del análisis wavelet son:

- 1 - Detección de discontinuidades y puntos de quiebre de funciones y series de datos.
- 2 - Detección de comportamientos a largo plazo en series de tiempo.
- 3 - Detección de estructuras autosimilares (aplicaciones al estudio de fractales)
- 4 - Identificación de frecuencias, análisis de series de datos en el plano tiempo frecuencia.
- 5 - Multiplicación de matrices de grandes dimensiones.
- 6 - Filtrado de señales, supresión de ruido.

Las técnicas convencionales de descomposición wavelet producen una familia de descomposiciones jerárquicas organizadas. La selección de un nivel apropiado para la jerarquía dependerá de la señal en particular. Frecuentemente el nivel se elige basado sobre una propiedad deseada que se desea analizar con mayor profundidad.

A cada índice  $j$ , se le asocia el nivel  $j$  de aproximación de la función o serie de datos  $A_j$ , y una señal de desviación denominada el nivel  $j$  de detalle  $D_j$ . Nosotros podemos considerar la señal original como aproximación al nivel 0, denotado por  $A_0$ . Las palabras la aproximación y el detalle son justificados por el hecho ese  $A_1$  es un acercamiento de  $A_0$  tomando en cuenta las frecuencias bajas de  $A_0$ , considerando el detalle  $D_1$  corresponde a la corrección alta de frecuencia.

Reconstruir aproximaciones y detalles, constituye en buena medida el estudio armónico de datos basados en el análisis wavelet.

Una manera de comprender esta descomposición consiste de usar una analogía. Las imágenes consecutivas  $A_1, A_2, A_3$  de un objeto determinado se van construyendo, mientras nosotros usamos el mismo tipo de dispositivo fotográfico, pero con la resolución cada vez más pobre. Las imágenes son los acercamientos consecutivos; un de detalle es la discrepancia entre dos las imágenes consecutivas lo conforma cada uno de los  $D_j$ . La imagen  $A_2$  es, por lo tanto, la suma de imagen  $A_1$  y los detalles intermedios  $D_1, D_2$ .

Para clarificar estos conceptos se puede recurrir a la figura 3, en donde se muestra el árbol de descomposición jerárquico de las wavelets.

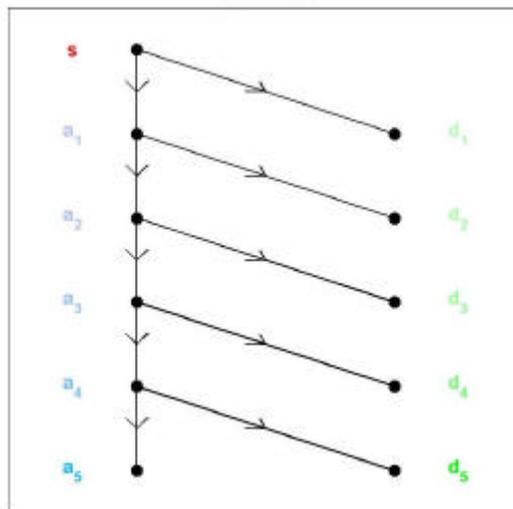


Figura 3

Arbol de descomposición jerarquica empleado en el análisis wavelet

## 5.2 Resultados

Como la capa de esponja tiene una longitud finita se analizó la incidencia de los efectos de borde en el análisis wavelet. Para este fin se realizó un gráfico en el plano tiempo frecuencia de la transformada wavelet, empleando una base de wavelets de Daubechies de orden 3, para determinar los efectos de borde, esto se puede apreciar en la figura 4.

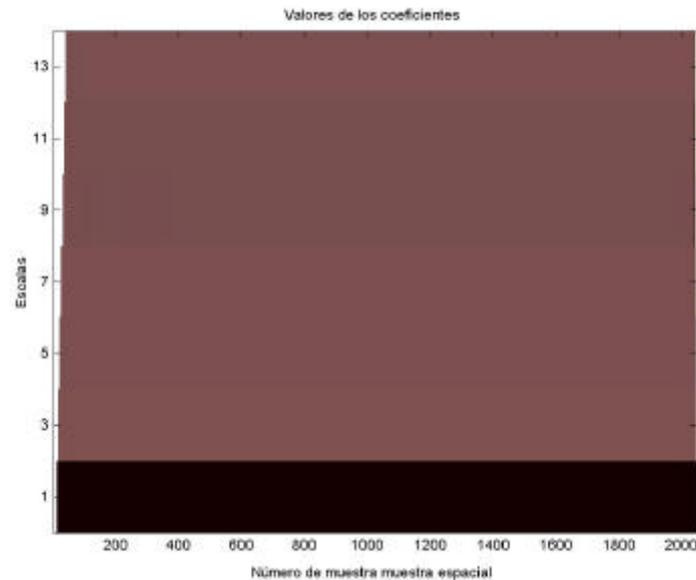


Figura 4  
Espectro tiempo frecuencia de la capa de esponja de la figura 1

De la figura anterior se desprende que los efectos de borde mas relevantes (zona de color blanco del gráfico) se hallan para los primeros segmentos de la capa de esponja, en la zona mas baja de su rango de aplicación y en donde es muy débil su influencia. Además para todas las otras frecuencias actúa en forma uniforme tal como lo muestra el distribución de color del resto del gráfico.

Tal como se indicara previamente la descomposición wavelet implica la separación de la información de la señal en un conjunto de niveles que asociados con cada escala de la wavelet correspondiente brindarán información sobre el comportamiento de la misma en dichas escalas.

Por ejemplo a nivel cero se tiene la señal original. A nivel uno se tiene la aproximación de orden cero, la aproximación de orden 1 y los detalles de orden 1. Estos últimos brindan información acerca de los cambios de comportamiento de la serie de datos. Cada uno de los picos que se pueden o no manifestar en los niveles de análisis mas bajos estan asociados bien con discontinuidades en el comportamiento de los datos o bien con cambios en la forma de la señal.

En la figura 5 se hallan graficados de arriba hacia abajo los niveles de análisis waveletes para una base de Daubechies con una longitud o profundidad de análisis hasta el quinto nivel.

El nivel de análisis y el orden de la wavelet no tienen dependencia funcional, pero ambos están emparentados por la longitud de la serie de datos y esta a su vez condiciona fuertemente el nivel máximo de descomposición wavelet posible.

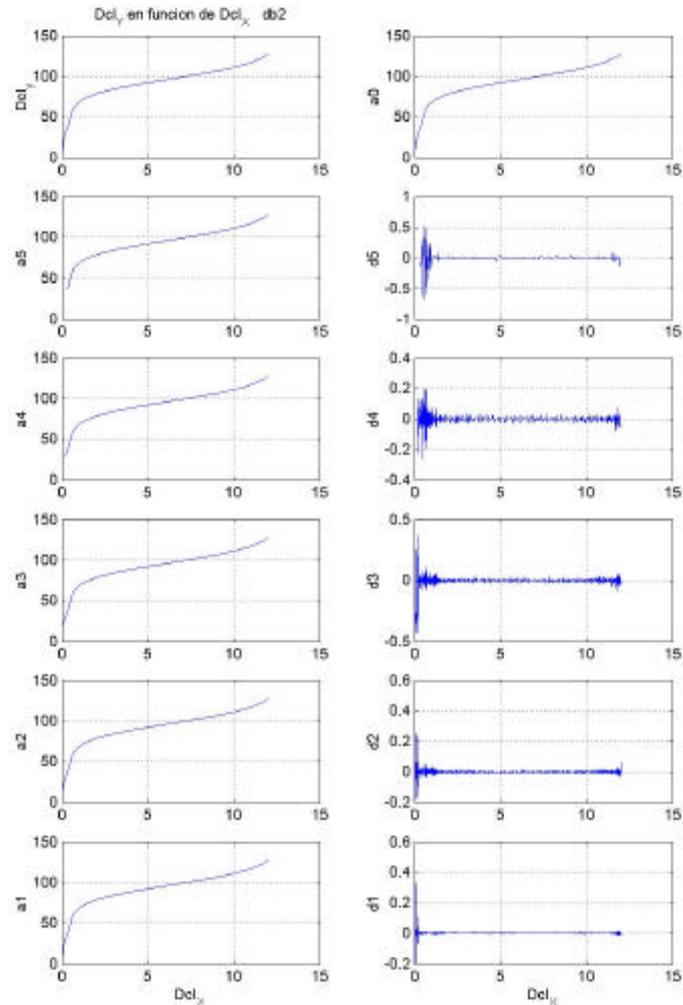


Figura 5  
Descomposición completa en base de wavelets Daubechies nivel 3  
Se graficaron los detalles y los análisis para cada nivel

## 6 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En base a los resultados que se muestran en a figura 5 se pueden extraer las siguientes observaciones:

1 - En todos los niveles de aproximación del análisis wavelet la estructura de la capa de

esponja es prácticamente la misma. Esto contribuye a impedir que por acción de su presencia en el modelo se generasen reflexiones espúreas.

2 - En todos los niveles de detalles no se observan picos relevantes en la mayoría de la capa de esponja. Sólo en la sección más baja de la misma hay una zona de actividad que se debe principalmente al efecto de borde según se puede contrastar con el resultado de la figura 4.

3 - En todos los niveles de detalles no se aprecian transiciones ni cambios de comportamiento en la estructura de la capa de esponja. Esto contribuye a que las ondas sean atenuadas uniformemente impidiendo la aparición de perturbaciones numéricas adicionales.

4 - Para todos los niveles de los detalles las amplitudes de la información contenida es muy baja, lo que indica que la capa de esponja utilizada posee una estructura suave, con ínfimos cambios de comportamiento. Resultando estos estar distribuidos uniformemente a lo largo de toda la misma.

## 7 CONCLUSIONES

En base a lo observado en el apartado anterior este trabajo muestra que el diseño de una capa de esponja exitosa, en modelos numéricos complejos como el detallado aquí, debe poseer las siguientes propiedades:

- Ser lo suficientemente suave para que no se generen perturbaciones numéricas adicionales.
- Debe constituirse por segmentos de funciones con una transición que empalme perfectamente, tal como se muestra en el análisis de los detalles de la capa de esponja utilizada aquí.
- Debe estar aplicada sobre uno de los campos involucrados, que en este caso es el que coincide con el forzante del modelo. Cuando se probó un diseño similar de capa de esponja para los campos dinámicos (velocidades) el efecto continuaba siendo dominado por la acción de la capa de esponja en el campo de temperaturas.
- La actividad de la capa de esponja es máxima en la zona mas alejada de la región de interés, por lo que aún pudiendo haber ejercido una acción atenuante muy intensa los resultados no afectan los valores de las integraciones del modelo en la zona de interés (por debajo de los 50 km. de altura).

Finalmente se puede afirmar que, con las propiedades de capa de esponja descriptas en este trabajo, un modelo de aguas poco profundas como el presentado aquí logra una integración exitosa de las ecuaciones y que con la herramienta empleada en este trabajo el análisis de dichas propiedades se cuenta con una metodología sistemática de estudio.

## 7 REFERENCIAS

- [1] Charney J. G. y Drazin P. G., Propagation of planetary-scale disturbances from the lower into the upper atmosphere. *Atmosphere Journal of Geophysical Research*, **66**, 83-107 (1961).
- [2] Dickinson, R. E., Theory of planetary wave zonal flow interaction. *J. Atmos. Sci.* **26**, 73-81 (1969).
- [3] Edmon, H. J., Hoskins, B. J., y McIntyre, M. E., Eliassen Palm cross sections of the troposphere., *J. Atmos. Sci.* **37**, 2600-2616 (1980).
- [4] Andrews, D. G., Holton, J. R., y Leovy, C. B., *Middle atmosphere dynamics.*, Academic Press (1987).
- [5] Bodeker, G. E. y Scourfield, M. W., Planetary wave in total ozone and their relation to Antarctic ozone depletion. , *Geophys. Res. Lett.*, **22**, 2949-2952 (1995).
- [6] Kawahira K, y Shiratori L., Development and changes of the horizontal structure of the ozone hole in Antarctica. , *Proc. XVIII Adudrenial Ozone Symp. L'Aquila, Italy. Int. Ozone Commission* (1996).
- [7] Shindell, D. T., Wong, S., y Rind, D. , Interannual variability of the antarctic ozone hole in a GCM, Part I: the influence of tropospheric wave variability., *J. Atmos. Sci.*, **54**, 2308-2319 (1997).
- [8] Walter E. Legnani, Rolando R. García, Pablo O. Canziani, Pablo M. Jacovkis. *Modelado 3D del Vórtice Polar Austral.*, *Mecánica coputacional*, vol. **20** pp. 62-69. Fernando G. Flores Ed.
- [9] Gottlieb, D. y Orszag, S., *Numerical analysis of spectral methods.* SIAM, Philadelphia, Pennsylvania (1989).
- [10] Daubechies, I, "Ten Lectures on wavelets", *CBMS, SIAM*, **61**, 76,1994.
- [11] Farge, M., "Wavelet Transforms and their applications to turbulence", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **24**, 395-457. (1992)
- [12] Kaiser, G., 1994: *A Friendly Guide to Wavelets.* Birkhäuser, 300 pp