

PAUTAS DE MODELIZACIÓN PARA ESTRUCTURAS BIDIMENSIONALES

María Laura Godoy*, Patricia Mónica Ciancio*

* Área estructuras, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Avda del Valle 5735, B7400JWI Olavarría, Argentina. TE: 54-(02284)-451055–Interno 273-272
e-mail: mgodoy@fio.unicen.edu.ar
<http://www.fio.unicen.edu.ar/>

Palabras clave: elementos finitos, vigas de gran altura, modelos numéricos, solución aproximada.

Resumen. *En la creación de un modelo de elementos finitos, se desarrolla una idealización de un sistema físico real. La mayor parte de las estructuras en ingeniería son de naturaleza continua, y por tanto su comportamiento no puede expresarse en forma precisa en función de un número pequeño de variables discretas. Sin embargo con modelados correctos se obtienen soluciones precisas. En los casos en que la formulación analítica de un problema es difícil de desarrollar, o no se dispone de la solución analítica exacta, se ha comprobado que el modelado por elementos finitos es uno de los métodos más fiables para afrontar el problema. El modelado siempre debería basarse en la comprensión conceptual del sistema físico y en el discernimiento anticipado del comportamiento de la estructura. Además, el analista debería comprender la base teórica del método de los elementos finitos, de manera de evitar resultados absurdos.*

En el presente trabajo, se presenta una aplicación del método a estructuras bidimensionales, y en particular al caso de estado plano de tensiones.

Se presentan vigas con diferentes relaciones luz / altura, en las cuales se analiza el modelo más adecuado, para lograr una representación lo más cercana posible al comportamiento real de la estructura.

1 INTRODUCCION

Estudiar el comportamiento mecánico de un cuerpo implica, desde el punto de vista ingenieril, idealizar al cuerpo y plantear un modelo matemático el cual conducirá a la obtención de ecuaciones diferenciales que gobiernan su comportamiento y que a su vez deberán cumplir con las condiciones de borde del problema estudiado.

Los problemas tridimensionales pueden reducirse a problemas bidimensionales si ellos cumplen condiciones de tensión plana.

La teoría de la elasticidad sólo consigue estudiar de un modo riguroso los casos de cuerpos correspondientes a sistemas muy sencillos. En los casos en que la placa delgada sólo está solicitada por fuerzas en el plano medio, se pueden despreciar las tensiones $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ y considerar las tensiones $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ repartidas uniformemente en el espesor de la placa.

Las chapas sustentadas como vigas constituyen las vigas pared o vigas de gran altura¹. El límite entre vigas esbeltas y vigas de gran altura se establece según la distribución de las deformaciones ϵ_x , que para esbelteces l/d aproximadamente mayores o iguales a 2, para vigas de un solo tramo y l/d aproximadamente mayores o iguales a 3, para tramos intermedios de vigas continuas aún se mantiene aproximadamente lineal, de modo que las tensiones σ_x pueden calcularse mediante la teoría común de flexión (Bernoulli – Navier). En la Figura 1 se muestran las relaciones de esbelteces que pueden considerarse como límite de las vigas de gran altura.

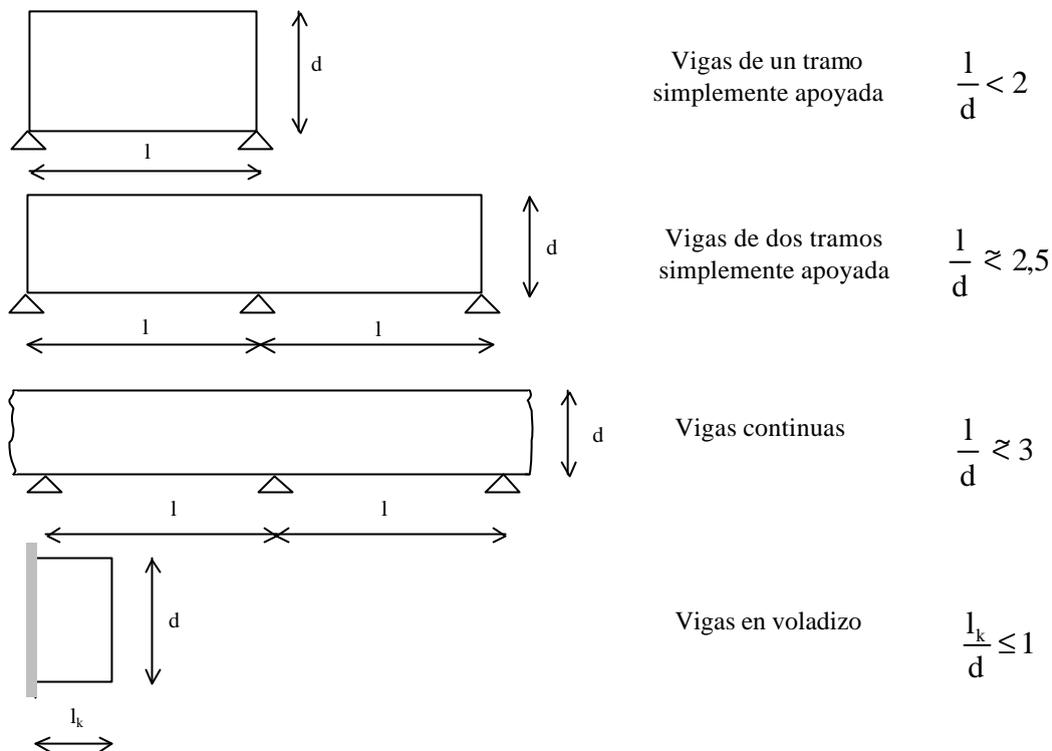


Figura 1: Esbelteces límite de las vigas de gran altura

La teoría común de flexión con $\sigma_x = M/W$, etc., no es aplicable para vigas de gran altura y ménsulas, pues por efecto de la carga, las secciones no se mantienen planas (hipótesis de Bernoulli, diagrama de ϵ_x lineal) y por ello, aún para un material idealmente elástico la distribución de las tensiones σ_x ya no es lineal. Tampoco es posible despreciar en este caso las componentes de tensión σ_y y las de resbalamiento τ_{xy} debidas a las cargas exteriores. Por ello es necesario determinar las tensiones en chapas y vigas de gran altura teniendo en cuenta todas las condiciones de equilibrio y compatibilidad de los esfuerzos internos.

El problema a solucionar tiene dos alternativas a contemplar. Uno de ellos es encontrar la solución exacta, si ésta es posible, y segunda encontrar una solución aproximada.

En este trabajo se utiliza un método numérico como es el Método de los Elementos Finitos, de utilidad para la comprobación de los resultados de la teoría de la elasticidad y como medio para el estudio de los problemas para los cuales las soluciones analíticas no están disponibles o son difíciles de obtener.

2 MARCO TEORICO

Un problema típico de estado plano de tensiones es una placa cargada con una carga uniforme a lo largo de uno de sus lados. De acuerdo a la teoría clásica^{2,3} tomando un elemento cuadrado de pared de dimensiones dx , dy y b , sobre el cual el material circundante ejerce fuerzas normales N_x , N_y , tangenciales T_{xy} , T_{yx} , y el peso propio del elemento $G = \gamma_0 \cdot b \cdot dx \cdot dy$, siendo γ_0 el peso específico del material de la pared. De las condiciones de equilibrio de las fuerzas se obtiene, expresando las fuerzas N y T en forma de tensiones, de acuerdo a la Figura 2.

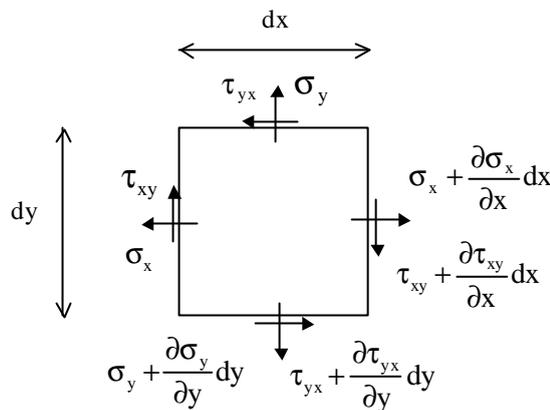


Figura 2: Elemento cuadrado de pared

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \gamma_1 = 0 \quad (1)$$

Las deformaciones según las direcciones de los ejes coordenados vienen dadas por las expresiones

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2)$$

y las variaciones angulares

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3) se obtiene la condición de compatibilidad

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

Según la ley de Hooke, las tensiones y las deformaciones están ligadas por las expresiones

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \quad (5)$$

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones (4) se obtiene

$$2(1+\mu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \quad (6)$$

Las ecuaciones (1) se satisfacen idénticamente si se representan las tres tensiones que aparecen en ellas por las derivadas segundas de la función de Airy $F(x,y)$, es decir

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

Combinando las expresiones (6) y (7) se obtiene

$$\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial y^4} - \mu\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^4} - \mu\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} = -2(1+\mu)\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}$$

O bien

$$\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial y^4} = 0 \quad (8)$$

Esta ecuación diferencial en derivadas parciales de cuarto orden se denomina ecuación de la viga pared.

Las funciones que satisfacen la ecuación (8) reciben el nombre de biarmónicas.

La ecuación (8) no contiene ninguna constante del material (E, μ, G) y es válida para cualquier material homogéneo e isótropo que cumpla la ley de Hooke.

Cuando actúan esfuerzos de volumen (por ejemplo peso propio), de componentes G_x y G_y , se pueden expresar nuevamente las tensiones σ_x y σ_y mediante la función de tensión según (7), cambiando solo la expresión de la tensión cortante

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} - G_x y - G_y x, \quad (9)$$

Al diferenciar τ_{xy} desaparecen, sin embargo, las fuerzas de volumen, obteniéndose nuevamente la ecuación (8).

3 FUNDAMENTOS DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

La concepción de los problemas tridimensionales como problemas planos o bidimensionales, permite una reducción sustancial del esfuerzo computacional.

La solución de las ecuaciones que gobiernan el problema tiene dos alternativas de solución: la solución exacta y la aproximada.

Dentro de esta última, es posible trabajar con una formulación integral equivalente a un planteo débil o “promediado” de la forma fuerte o diferencial. Es decir, la inexistencia de una solución exacta de validez punto a punto del continuo obliga a una consideración “estructural”, integral o débil en la cual la solución tiene validez en el conjunto pero no en cada punto. A pesar de la gran simplificación de la forma integral respecto de la diferencial, la solución de este problema continúa siendo compleja. Por ese motivo las técnicas de solución que prevalecen son las numéricas frente a las analíticas. En otras palabras, las ecuaciones íntegro-diferenciales que definen el problema estructural en forma débil son reemplazadas mediante técnicas y métodos numéricos (Rayleigh Ritz; residuos ponderados, etc.) en ecuaciones algebraicas de fácil solución. Esta es precisamente la base del Método de los Elementos Finitos, el cual en las últimas cuatro décadas se ha convertido en el procedimiento numérico más utilizado para la resolución numérica aproximada del sistema de ecuaciones diferenciales que expresa el comportamiento de un problema físico y es, por ende, muy utilizado en el análisis de estructuras, según Klaus-Bathe⁴, (1982) Hughes, Zienkiewics⁵ (1982), entre otros.

En el Método de los Elementos Finitos⁶, una estructura es discretizada en elementos estructurales denominadas elementos finitos. Los puntos donde los elementos finitos son interconectados son conocidos como nodos o puntos nodales, el proceso de especificación de nodos es denominado discretización y la colección de elementos es conocida como malla. Cada nodo es asociado a un desplazamiento y una fuerza nodal. La configuración deformada del elemento, y consecuentemente

de la estructura, sujeta a cargas puede ser definida usando exclusivamente los desplazamientos y fuerzas nodales. Un sistema de ecuaciones de equilibrio entre fuerzas y desplazamientos nodales puede formularse en forma matricial para toda la estructura

$$\{P\} = [K] \cdot \{U\} \quad (10)$$

donde $\{P\}$ = es el vector de fuerzas nodales (fuerzas; momentos; temperatura; etc.)

$[K]$ = es la matriz de rigidez global del sistema

$\{U\}$ = es el vector de desplazamientos nodales

El equilibrio del elemento puede expresarse en una relación similar a la Ecuación (10), de la siguiente manera

$$\{p\}_e = [k]_e \cdot \{u\}_e \quad (11)$$

donde $\{p\}_e$ = es el vector de fuerzas nodales del elemento

$[k]_e$ = es la matriz de rigidez del elemento

$\{u\}_e$ = es el vector de desplazamiento nodal del elemento

Las expresiones (10) y (11) son también conocidas como ecuaciones de rigidez. Las dimensiones de los vectores y matrices dependen directamente del número de nodos del modelo estructural y del número de grados de libertad por nodo.

La aplicación de las condiciones de borde a la ecuación (10) conduce a un sistema de ecuaciones que puede ser resuelto para los desplazamientos nodales desconocidos. Una vez determinados los desplazamientos nodales, pueden conocerse las fuerzas internas, tensiones y deformaciones en cualquier posición.

Los pasos para obtener las ecuaciones (10) y (11) pueden alcanzarse utilizando las siguientes metodologías generales y principios

- a) Equilibrio
- b) Principio de la Energía Potencial Total
- c) Principio del Trabajo Virtual
- d) Método de los Residuos Ponderados

Luego, considerando la interacción de cada elemento con los restantes de acuerdo a la forma en que ellos están conectados en el sistema estructural, puede definirse el comportamiento global de la estructura que conduce a la solución del problema. Este método, se basa en una interpretación física o intuitiva del problema para la obtención de la matriz de rigidez. Su aplicación involucra los siguientes pasos

1. A partir de la realidad física del sistema estructural, sus apoyos, tipos de carga que actúan, se seleccionará un modelo matemático apropiado para describir el comportamiento estructural.

2. Una vez seleccionado el modelo matemático, se procede a discretizar la estructura en porciones o subdominios, llamadas elementos finitos, dentro de los cuales se interpolan las variables principales en función de sus valores en una serie de puntos discretos del elemento denominados nodos. La malla de elementos finitos puede, por ejemplo, estar formada por elementos de diferente geometría. La etapa de discretización constituye una parte esencial de la fase de preproceso.
3. Evaluación de las ecuaciones matriciales de cada elemento (matriz de rigidez de cada elemento y vector de cargas nodales equivalentes)
4. Ensamble del sistema de ecuaciones (montaje de la matriz de rigidez global y del vector de cargas global de toda la estructura)
5. Reducción del sistema de ecuaciones mediante consideración de condiciones de borde.
6. Solución del sistema reducido de ecuaciones lo cual involucra la inversión de la matriz de rigidez para la obtención del vector de desplazamientos nodales.
7. Evaluación de las fuerzas de los elementos.
8. Evaluación de reacciones de apoyo mediante la solución del sistema extendido de ecuaciones.
9. Evaluación de magnitudes secundarias (deformaciones; tensiones; etc.)

Una vez estudiados los resultados, el técnico analista puede plantearse efectuar alguna modificación en cualquiera de las etapas anteriores.

4 CASOS ANALIZADOS

Se analizan vigas simplemente apoyadas sin y con refuerzos de apoyo, con diferentes relaciones de esbeltez y estados de cargas. Con respecto a las esbelteces se consideraron vigas esbeltas y de gran altura.

En cuanto a los estados de carga en todos los casos se consideraron cargas distribuidas uniformes, sin considerar el peso propio.

En la Tabla 1 se muestran los distintos casos estudiados

Tabla 1: Casos Analizados

Esbeltez (l/d)		Dimensiones (l x d[m])	Posición de Carga	Modelo
4		4x1	Borde superior	1
1	Sin Refuerzo	4x4	Borde superior	2
	Con Refuerzo			3
0.8		4x5	Borde superior	4
0.66		4x6	Borde superior	5
0.5		4x8	Borde superior	6
1	Sin Refuerzo	4x4	Borde inferior	7
	Con Refuerzo			8

En la Figura 3 aparece un esquema representativo de la geometría y las cargas consideradas.

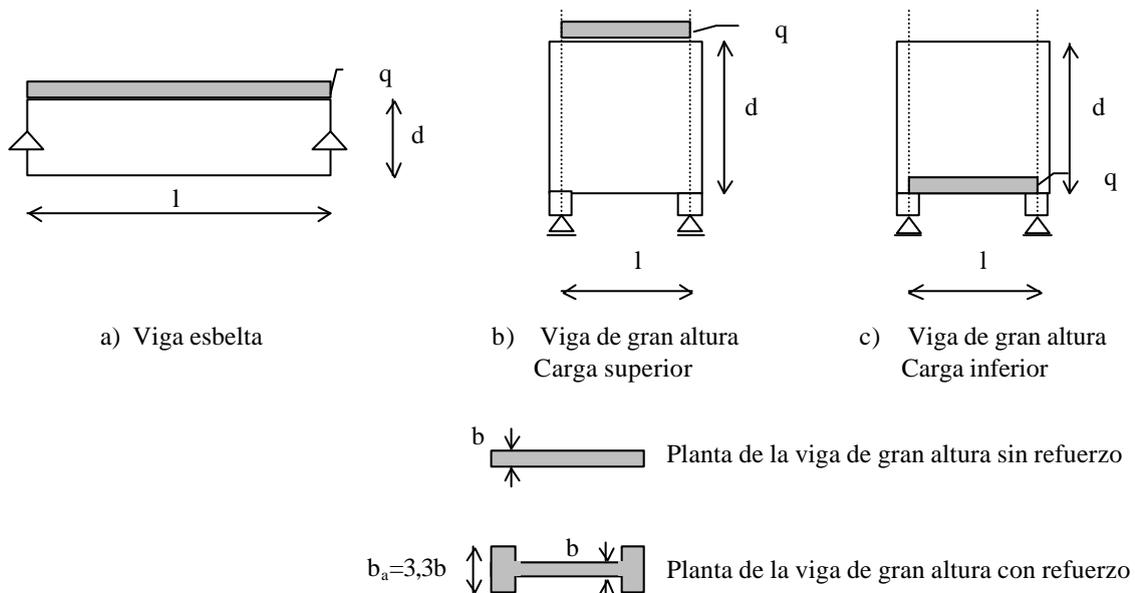


Figura 3. Geometría y cargas de los modelos

5 IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL DEL MODELO

Este estudio comprende la obtención de los mapas de tensiones a través de la utilización de un modelo numérico-computacional.

En todos los casos el mallado fue uniforme con un elemento cuadrangular, con relación de aspecto 1. Para la elección del tamaño del elemento se tuvo en cuenta la recomendación de mantener debajo de 3 la relación de aspecto⁷, para análisis de tensiones, siendo conveniente la relación de aspecto igual a 1.

En todos los casos estudiados se utilizó el elemento 2-D disponible en la biblioteca del software ALGOR para modelizar el estado plano de tensiones, con un modelo material isotrópico.

En cuanto a las condiciones de vínculo y la posición de los mismos, se debe diferenciar entre las adoptadas para las vigas de gran altura y las esbeltas. En el caso de las vigas esbeltas, las restricciones se ubicaron en los extremos de las mismas en la línea del eje neutro, en cambio en las vigas de gran altura las condiciones de vínculo se ubicaron debajo de los apoyos sobre los cuales se ubicaba la viga sobre el eje de las mismas, como se muestra en la Figura 3. Dichos apoyos tienen

un ancho c de manera que la relación $c/l= 0,1$. En cuanto a las restricciones impuestas por los vínculos se tomaron para el caso de las vigas esbeltas vínculos dobles y en las de gran altura vínculos simples.

El material utilizado en la resolución numérica es un hormigón de una densidad de masa de 2400 kg/m^3 y un módulo de elasticidad de $3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

Las cargas se ubicaron entre ejes de apoyos para las vigas de gran altura y en toda su longitud en el caso de las vigas esbeltas. El motivo de ubicar la carga en la luz teórica l , es que si se carga la totalidad de la longitud de la viga de gran altura, el esfuerzo de tracción Z aumenta y la tensión de compresión en el borde superior resulta menor, por cuanto las porciones de carga aplicadas en los extremos originan tracción. Para todos los casos analizados el valor de dicha carga es de $q= 1 \times 10^5 \text{ N/m}$, que aplicada en una viga de espesor 10 cm representa una presión de $1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$.

6 RESULTADOS OBTENIDOS

En la Tabla 2, se presentan los resultados obtenidos mediante los modelos numéricos y su comparación con los teóricos. Dichos resultados corresponden alas tensiones σ_x en el centro de la luz de la viga y en las bordes superior e inferior respectivamente.

Tabla 2: Resultados de los modelos analizados

Modelo	Resultados Teóricos [N/m ²]	Resultados ALGOR [N/m ²]	Diferencia [%]
1	$\sigma_s = -1,2 \times 10^7$	$\sigma_s = -1,2 \times 10^7$	0
	$\sigma_i = 1,2 \times 10^7$	$\sigma_i = 1,2 \times 10^7$	0
2	$\sigma_s = -0,42 \times 10^6$	$\sigma_s = -0,52 \times 10^6$	23,8
	$\sigma_i = 1,6 \times 10^6$	$\sigma_i = 1,6 \times 10^6$	0
3	$\sigma_s = -0,75 \times 10^6$	$\sigma_s = -0,77 \times 10^7$	2,7
	$\sigma_i = 1,17 \times 10^6$	$\sigma_i = 1,28 \times 10^6$	9,4
4	$\sigma_s = \text{tiende a cero}$	$\sigma_s = -0,25 \times 10^6$	-
	$\sigma_i = 1,6 \times 10^6$	$\sigma_i = 1,6 \times 10^6$	0
5	$\sigma_s = \text{tiende a cero}$	$\sigma_s = -0,17 \times 10^6$	-
	$\sigma_i = 1,6 \times 10^6$	$\sigma_i = 1,6 \times 10^6$	0
6	$\sigma_s = \text{tiende a cero}$	$\sigma_s = -0,16 \times 10^6$	-
	$\sigma_i = 1,6 \times 10^6$	$\sigma_i = 1,6 \times 10^6$	0
7	$\sigma_s = -0,3 \times 10^6$	$\sigma_s = -0,38 \times 10^6$	26,7
	$\sigma_i = 1,75 \times 10^6$	$\sigma_i = 1,75 \times 10^6$	0
8	$\sigma_s = -0,51 \times 10^6$	$\sigma_s = -0,56 \times 10^6$	9,8
	$\sigma_i = 1,47 \times 10^6$	$\sigma_i = 1,5 \times 10^6$	2

En la Figura 4, se muestra la distribución de tensiones obtenidos con la teoría exacta y con el modelo numérico utilizando el software ALGOR para el caso del modelo 2. En la Figura 4a) la relación p/b representa la presión aplicada sobre el borde superior de la viga. Para este modelo se observa concordancia en el diagrama de tensiones y en la localización del eje neutro.

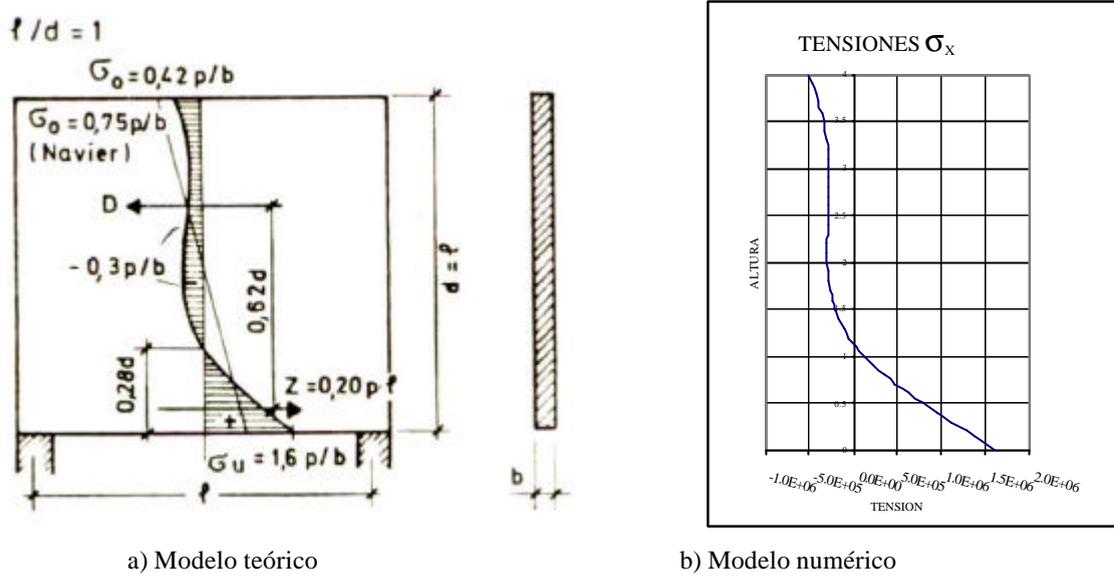


Figura 4: Distribución de tensiones

En la Figura 5 se observa una salida del mapa de tensiones correspondiente a las tensiones σ_x para el modelo 2 según el software de referencia, las cuales se encuentran expresadas en N/m^2 . Los colores que aparecen en la leyenda de la Figura 5 representan un rango de valores. Al posicionarse en el centro del borde inferior, se consigue el valor de tensión en ese punto, desde el módulo de salida de resultados que incluye el programa.

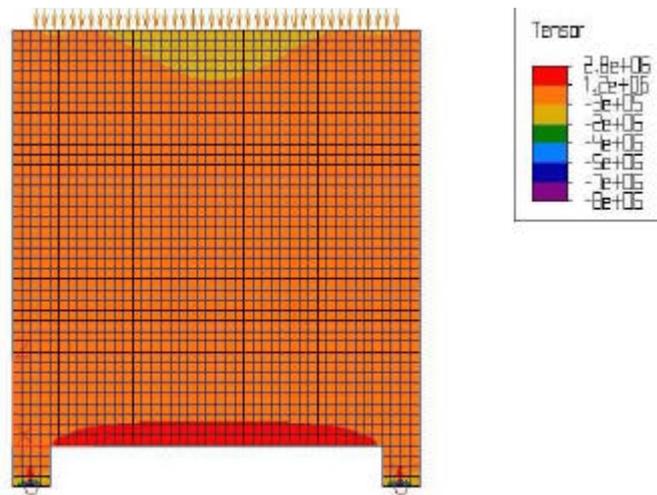


Figura 5: Mapa de tensiones σ_x

7 CONSIDERACIONES FINALES

- El modelo numérico con la utilización del software de referencia resulta de gran utilidad a la hora de obtener el estado tensional en vigas de gran altura, puesto que la solución exacta en muchos casos resulta dificultosa de obtener, dado que las condiciones de borde y carga pueden derivar en una solución compleja.
- En relación al mallado como hemos expresado se logró una buena aproximación considerándolo uniforme y con una densidad tal que no se observen variaciones al redensificar la malla.
- La ubicación de las condiciones de vínculo difiere según estemos modelando una viga esbelta o una de gran altura, siendo por tanto la esbeltez un parámetro de suma importancia para definir el modelo de condiciones de vínculo a utilizar.
- La ubicación de la carga distribuida considerada difiere si se considera una viga esbelta o de gran altura, colocándose la misma siempre en la longitud teórica.
- En el presente trabajo se analizaron también las tensiones σ_Y obteniéndose una buena aproximación.

8 REFERENCIAS

- [1] Fritz Leonhardt, *Estructuras de Hormigón Armado*, Tomo II, Casos especiales del dimensionado de estructuras de hormigón armado. (1990).
- [2] Odone Belluzzi, “*Ciencia de la Construcción*”, Aguilar Ediciones. (1970).
- [3] S. Timoshenko y J. N. Goodier, “*Teoría de la Elasticidad*”, Ediciones Urmo. (1951).
- [4] K. J. Bathe, “*Finite element procedures in engineering analysis*”. Prentice-Hall, New Jersey. (1982).
- [5] O. C. Zienkiewicz, “*El método de los elementos finitos*”. Edit. Reverté. Barcelona. (1982).
- [6] C.C. Spyrakos, J. Raftoyiannis, “*Linear and non linear finite element analysis in Engineering Practice*”, Algor Publishing Division, Pittsburgh, PA. (1997).
- [7] C.C. Spyrakos, “*Finite element analysis in Engineering Practice*”, West Virginia University Press, Morgantown, WV. (1994).