

PANDEO DE PORTICOS PLANOS USO SISTEMATICO DE SERIES DE POTENCIAS

C. P. Filipich^{1,2}, E. A. Bambill^{1,2} y M. B. Rosales³

⁽¹⁾⁽²⁾ Departamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
11 de Abril 461 B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4555220–Interno 132
e-mail: dic@frbb.utn.edu.ar, web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar/>

⁽¹⁾⁽²⁾ Departamento de Ingeniería, Area Construcciones, Universidad Nacional del Sur
Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3200
e-mail: dtoinge@criba.edu.ar, web page: <http://www.uns.edu.ar/>

⁽³⁾ Departamento de Ingeniería, Area Estabilidad, Universidad Nacional del Sur
Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3200
e-mail: dtoinge@criba.edu.ar, web page: <http://www.uns.edu.ar/>

Palabras clave: pórticos planos, abiertos, carga crítica, pandeo, autovalor.

Resumen. *Dentro de la ingeniería estructural son de uso divulgado las cubiertas aporticadas planas. Especialmente dentro de la construcción metálica es determinante conocer para el dimensionado final las cargas críticas, a partir de las cuales se inestabiliza el sistema. En este trabajo, como alternativa frente a aproximaciones más o menos buenas y el MEF, se presenta una solución en serie de potencias por medio de un algoritmo sistemático de recurrencia.*

Como ventaja fundamental que presenta la herramienta que nos ocupa, señalemos que la forma modal trascendente de cada tramo, aún con variación continua de sección, es simulada con precisión arbitraria por una serie de potencias. Pensemos que en el MEF, en cambio, cada barra debe subdividirse en un número suficiente de tramos de sección constante con forma modal cúbica, de modo de lograr una solución aceptable.

Otra característica a destacar de la solución por series para pórticos abiertos, es que el número de incógnitas para hallar el autovalor es siempre tres, en tanto que con el MEF, es de tres incógnitas por nudo.

Varios ejemplos complementan el presente trabajo.

1 INTRODUCCION

La finalidad del presente trabajo consiste en proponer una alternativa clásica, como son las series de potencias enteras, para hallar las cargas críticas de pandeo para pórticos planos abiertos. Si bien los ejemplos aquí presentados se refieren a la determinación de la carga crítica de pórticos biarticulados con dintel curvo y con dintel quebrado (a dos aguas), la aplicación de la metodología aquí descrita es aplicable a cualquier pórtico plano abierto, de directriz arbitraria.

La propuesta consiste en una expansión en series de potencias, para reemplazar las formas modales.

En el caso de barras de directriz curva, o casos de esfuerzo normal variable, se plantea una simplificación adicional. En estos casos, subdividiremos el dominio en N tramos que se asimilan a tramos rectos de esfuerzo normal constante, cuando N es lo suficientemente grande.

El aporte de esta herramienta tradicional se evidencia en la sistematización de los algoritmos de recurrencia, tal cual lo demostrado la aplicación de esta metodología en problemas lineales y no lineales.

Los autores consideran la aplicación de esta alternativa como sumamente interesante. La implementación de las clásicas series de potencias en algoritmos recurrentes sistemáticos en la computadora, provee un nuevo aporte para resolver problemas viejos, compitiendo con sencillez y elegancia, con otros métodos tradicionales y complejos.

En efecto, MEF también permite esta forma de resolución, con el inconveniente de crear tres incógnitas por nudo, y aceptando una aproximación cúbica para la forma modal de cada tramo. En nuestra propuesta, en cambio, debemos resolver una ecuación característica en el autovalor que proviene de plantear solamente tres (3) condiciones de borde, correspondientes a uno de los vínculos. lo cual provee una simplificación drástica en cuanto al requerimiento de memoria computacional. se refiere. Además, las formas modales propuestas tienden a las trascendentes, atento a que el uso arbitrario en la cantidad de términos de la serie propuesta para la forma modal, nos permite aproximarnos tanto a la solución exacta como convenga a nuestros intereses.

Varios ejemplos muestran estas ventajas y se comparan con algunos de la bibliografía^[3], ^[4], ^[5] y ^[6].

2 PLANTEO DEL PROBLEMA

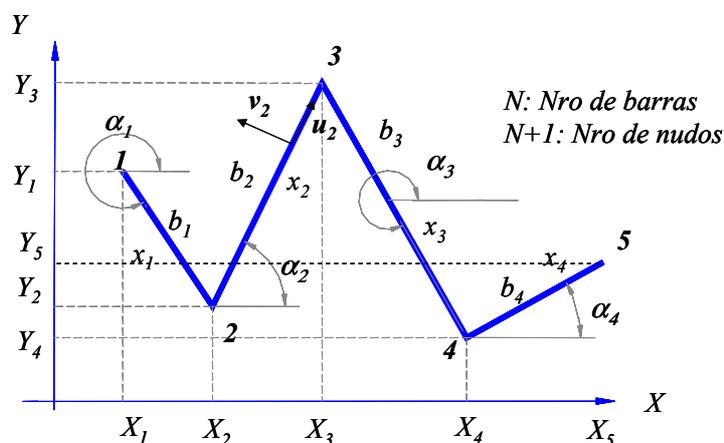


Figura 1 – Esquema de pórtico abierto de tramos rectos

Tomamos un sistema de referencia cartesiano ortogonal (X, Y) , y admitimos las hipótesis de elasticidad clásica de deformaciones infinitesimales, comportamiento elástico lineal. Sean (X, Y) : ejes globales; N : Nro de barras ; $N+1$: Nro de nudos.; $(X_i, Y_i), i = 1, 2, 3, \dots, N+1$: Coordenadas globales de los nudos.

Toda barra puede dividirse arbitrariamente en subtramos, de modo

$$a_i = \sqrt{(X_i - X_{i-1})^2 + (Y_i - Y_{i-1})^2} ; \cos \alpha_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{a_i} = c_i ; \quad \text{sen} \alpha_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{a_i} = s_i \quad (1.)$$

2.1. Ecuaciones gobernantes

El objetivo de este análisis es estimar la carga máxima que la estructura es capaz de soportar antes de alcanzar su inestabilidad o colapso. En este análisis, la distribución de carga es conocida en la estructura.

Partimos de una configuración I del pórtico en equilibrio estático. Luego, provocamos una deformada de exploración (configuración II) y se determina la carga crítica imponiendo la coexistencia del equilibrio en I y II.

Para dar generalidad al problema, analizamos la barra b_i de Figura 1, cargada de punta como se indica, de sección constante F_i , longitud a_i e inercia constante J_i . El material de la barra posee módulo de elasticidad E_i .

En este caso, las energías de deformación U_i -considerando solo los aportes flexional y axial- y la posicional G_i de las cargas de punta, están dadas por [2]

$$2U_i = \int_0^{a_i} \frac{M^2(x_i)}{(EJ)_i} dx_i + \int_0^{a_i} \frac{N^2(x_i)}{(EF)_i} dx_i ; \quad 2G_i = -P_i \int_0^{a_i} v_i'^2 dx_i \quad (2.)$$

Las ecuaciones constitutivas son

$$M(x_i) = -(EJ)_i v_i'' ; \quad N(x_i) = +(EF)_i u_i' \quad (3.)$$

Luego, consideramos el pórtico abierto tipo motivo de este análisis, la energía total W es la debida a los aportes que los N tramos del pórtico

$$W=U-G \quad \text{donde} \quad U = \sum_{i=1}^N U_i ; \quad G = \sum_{i=1}^N G_i \quad (4.)$$

La esencia del análisis de inestabilidad de equilibrio en sistemas lineales conlleva a.

$$\delta W = \delta(U - G) = 0 \quad (5.)$$

donde, genéricamente puede escribirse, después de integrar por partes [4]

$$\begin{aligned} & \dots + |(EF)_i v_i'' \delta v_i'|_0^{a_i} - |(EJ)_i v_i''' \delta v_i|_0^{a_i} + |(EF)_i u_i' \delta u_i|_0^{a_i} + \\ & + |(EJ)_{i+1} v_{i+1}'' \delta v_{i+1}|_0^{a_i+1} - |(EJ)_{i+1} v_{i+1}''' \delta v_{i+1}'|_0^{a_i+1} + |(EF)_{i+1} u_{i+1}' \delta u_{i+1}|_0^{a_i+1} - \\ & - |P_i v_i' \delta v_i|_0^{a_i} - |P_{i+1} v_{i+1}' \delta v_{i+1}|_0^{a_i+1} + \int_0^{a_i} \delta v_i [(EJ)_i v_i'''' + P_i v_i''] dx_i + \dots \end{aligned} \quad (6.)$$

$$\dots + \int_0^{a_{i+1}} \delta v_{i+1} [(EJ)_{i+1} v_{i+1}'''' + P_{i+1} v_{i+1}'''] dx_i + \int_0^{a_i} \delta u_i (EF)_i u_i'' dx_i +$$

$$+ \int_0^{a_{i+1}} \delta u_{i+1} (EF)_{i+1} u_{i+1}'' dx_i + \dots = 0$$

Adoptando un P de comparación, la carga de punta P_i de cada barra, será

$$P_i = \eta_i P \tag{7.}$$

Es fundamental asumir que una vez conocidas las cargas de punta para cada tramo, quedan fijadas definitivamente las η_i . Adimensionalizando para cada barra, de modo que $0 \leq x_i \leq l$, con lo cual para el caso, en forma genérica $x_i = x$, obtenemos las ecuaciones diferenciales que regulan el problema de pandeo

$$v'''' + k_i^2 v'' = 0 \quad (a) \quad ; \quad u'' = 0 \quad (b) \tag{8.}$$

donde

$$k_i^2 \equiv \frac{\eta_i a_i^2}{(EJ)_i} P \quad ; \quad \text{donde } i=1,2,3,\dots,N \tag{9.}$$

Las condiciones de borde son entonces

$$\dots + \left| \left(\frac{EJ}{a^2} \right)_i v_i'' \frac{\delta v_i'}{a_i} \right|_0^l - \left| \left(\frac{EJ}{a^3} \right)_i v_i'''' \delta v_i \right|_0^l - \left| \frac{P_i}{a_i} v_i' \delta v_i \right|_0^l + \left| \left(\frac{EF}{a} \right)_i u_i' \delta u_i \right|_0^l +$$

$$+ \left| \left(\frac{EJ}{a^2} \right)_{i+1} v_{i+1}'' \frac{\delta v_{i+1}'}{a_{i+1}} \right|_0^l - \left| \left(\frac{EJ}{a^3} \right)_{i+1} v_{i+1}'''' \delta v_{i+1} \right|_0^l - \left| \frac{P_{i+1}}{a_{i+1}} v_{i+1}' \delta v_{i+1} \right|_0^l + \tag{10.}$$

$$+ \left| \left(\frac{EF}{a} \right)_{i+1} u_{i+1}' \delta u_{i+1} \right|_0^l + \dots = 0$$

2.2 Condiciones de continuidad en nudos intermedios

En el sistema global, sea $\Delta\alpha_i \equiv \alpha_i - \alpha_{i+1}$ el ángulo relativo entre dos barras consecutivas. Las tres condiciones geométricas por nudo, derivadas de la continuidad de los nudos intermedios, conducen a:

$$v_{i+1}(0) = v_i(ai) c - u_i(ai) s \quad (a)$$

$$u_{i+1}(0) = v_i(ai) s + u_i(ai) c \quad (b)$$

$$a_{i+1} v_i'(1) = v_{i+1}'(0) a_i \quad (c) \tag{11.}$$

donde, adoptamos; $s = \text{sen}(\Delta\alpha_i)$; $c = \text{cos}(\Delta\alpha_i)$. Las variaciones $\delta v_{i+1}^{(0)}$, $\delta v_{i+1}'^{(0)}$ y $\delta u_{i+1}^{(0)}$ deducidas a partir de (11) y reemplazadas en (8) permiten obtener las condiciones de equilibrio para cada nudo, factoréandolas respectivamente, y de lo cual:

$$\begin{aligned} J_{2(i+1)} v_{i+1}''(0) &= J_{2i} v_i''(1) & (a) \\ J_{3(i+1)} [v_{i+1}'''(0) + k_{i+1}^2 v_{i+1}'(0)] &= c J_{3i} [v_i'''(1) + k_i^2 v_i'(0)] + s F_{Li} u_i'(0) & (b) \\ F_{I(i+1)} u_{i+1}'(0) &= -s J_{3i} [v_i'(1) + k_i^2 v_i(1)] + c F_{Li} u_i'(1) & (c) \end{aligned} \quad (12.)$$

donde

$$J_{2i} \equiv \left(\frac{EJ}{a^2}\right)_i ; J_{3i} \equiv \left(\frac{EJ}{a^3}\right)_i ; F_{Li} \equiv \left(\frac{EF}{a}\right)_i \quad (13.)$$

3 SOLUCION EN SERIE DE POTENCIAS

Para cada tramo se propone una solución del tipo.

$$v_i = \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} x_i^j ; u_i = \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij} x_i^j \quad (14.)$$

donde $i=1,2,3,\dots,N$. Las series se extienden hasta el infinito. En la práctica, las mismas serán finitas, de $M+1$ términos, dependiendo M del grado de precisión arbitraria con el que se quiera determinar el autovalor.

Atento a que hemos adimensionalizado el dominio de cada barra, con $0 \leq x \leq 1$, de modo genérico podemos expresar $x_i = x$.:

Adoptando

$$\varphi_{nj} = (j+1)(j+2)\dots(j+n) = \frac{(j+n)!}{j!} \quad (15.)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} v_i' &= \sum_{j=0} \varphi_{1j} A_{i(j+1)} x^j & (a) ; v_i''' &= \sum_{j=0} \varphi_{3j} A_{i(j+3)} x^j & (c) \\ v_i'' &= \sum_{j=0} \varphi_{2j} A_{i(j+2)} x^j & (b) ; v_i'''' &= \sum_{j=0} \varphi_{4j} A_{i(j+4)} x^j & (d) \end{aligned} \quad (16.)$$

y además

$$\begin{aligned} u_i' &= \sum_{j=0} \varphi_{1j} B_{i(j+1)} x^j & (a) \\ u_i'' &= \sum_{j=0} \varphi_{2j} B_{i(j+2)} x^j & (b) \end{aligned} \quad (17.)$$

Luego, las ecuaciones diferenciales (8) que gobiernan el problema,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{4j} A_{i(j+4)} x^j - k_i^2 \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{2j} A_{i(j+2)} x^j = 0 \quad (a)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{2j} B_{i(j+2)} x^j = 0 \quad (b)$$
(18.)

reemplazando en el sistema , hallaremos las siguientes recurrencias, igualando los factores de cada x^j (con $j=0,1,2, \dots M+1$).

$$A_{i(j+4)} = -k_i^2 \frac{\varphi_{2j}}{\varphi_{4j}} A_{i(j+2)} \quad (a)$$

$$B_{i(j+2)} = 0 \quad (b)$$
(19.)

A su vez, las condiciones 11b, 11b, 11c, 12a, 12b, 12c, se escriben como

$$A_{(i+1)0} = c \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} - s \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij} \quad (20.)$$

$$B_{(i+1)0} = s \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} + c \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij} \quad (21.)$$

$$A_{(i+1)l} = \frac{a_{i+1}}{a_i} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{1j} A_{i(j+1)} \quad (22.)$$

$$A_{(i+1)2} = \frac{J_{2i}}{2 J_{2(i+1)}} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{2j} A_{i(j+2)} \quad (23.)$$

$$B_{(i+1)l} = \frac{-s J_{3i} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{3j} A_{i(j+3)} + k_i^2 \varphi_{1j} A_{i(j+1)} \right] + c F_{li} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{1j} B_{i(j+1)}}{F_{l(i+1)}} \quad (24.)$$

$$B_{(i+1)l} = \frac{c J_{3i} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{3j} A_{i(j+3)} + k_i^2 \varphi_{1j} A_{i(j+1)} \right] + s F_{li} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{1j} B_{i(j+1)} - k_{i+1}^2 J_{3(i+1)} A_{(i+1)l}}{6 J_{3(i+1)}} \quad (25.)$$

El procedimiento clásico de recurrencia es aplicado en el presente trabajo. La metodología implementada, se detalla en el Apéndice A.

Observamos que las recurrencias comienzan a partir de $A_{i(4)}$ y $B_{i(2)}$. Luego, deben ser previamente conocidas las seis constantes $A_{i(0)}, A_{i(1)}, A_{i(2)}, A_{i(3)}, B_{i(0)}$ y $B_{i(1)}$. Tres de ellas se determinan en el nudo l , correspondientes a la primera barra del pórtico, y en $x=0$; las otras

tres (3), con las CB correspondientes a la última barra del pórtico, correspondiente al nudo $N+1$, en $x=1$. La consideración de esta propuesta da lugar a un sistema homogéneo de (3×3) , de donde surge el autovalor del problema.

En realidad, la imposición de las seis (6) CB homogéneas –tres (3) en el nudo 1 , en $x=0$ y tres (3) en el nudo $N+1$, en $x=1$, da por lo general un sistema homogéneo de (6×6) en esas seis constantes, cuyo determinante debe anularse para obtener una solución matricial. Es un clásico problema de valores propios, a partir del cual se obtiene la carga crítica y sus correspondientes formas modales.

Consideramos el siguiente caso:

Caso 1 – Pórtico biarticulado

Nudo 1

En el primer nudo 1 , en $x=0$ las condiciones de borde

$$u(0) = v(0) = v'(0) = 0 \tag{26.}$$

permiten determinar, respectivamente, las constantes $B_{10} = 0, A_{10} = 0$ y $A_{12} = 0$. Luego, quedan por hallar A_{11}, A_{13} y B_{11} . Con estas seis, podemos garantizar las ecuaciones diferenciales (7) en el primer tramo del pórtico, a través de las recurrencias (17).

Nudo N+1

Para la última barra N , en $x=1$ se verifican las condiciones del apoyo articulado, de modo que en el nudo $N+1$

$$u(1) = v(1) = v'(1) = 0 \quad \text{en} \quad x=1 \tag{27.}$$

con lo cual,

$$\sum_{j=0}^{\infty} B_{Nj} = \sum_{j=0}^{\infty} A_{Nj} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{2j} A_{N(j+2)} = 0 \tag{28.}$$

Con estas tres condiciones homogéneas obtenemos la ecuación característica, que es un sistema lineal homogéneo en A_{11}, A_{13} y B_{11} . que nos permite hallar el autovalor k^2

Caso 2 – Pórtico biempotrado

Nudo 1

Para la primera barra, en $x=0$ se verifican las condiciones del apoyo empotrado que

$$\text{en } x=0 \quad u_1 = v_1 = v_1' = 0 \tag{29.}$$

con lo cual, resultan

$$u_1 = \sum_{j=0} B_{1j} x^j \Rightarrow B_{10} = 0 \quad ; \quad v_1 = \sum_{j=0} A_{1j} x^j = 0 \Rightarrow A_{10} = 0; \tag{30.}$$

$$v_1' = \sum_{j=0} \varphi_{1j} A_{1(j+1)} x^j = 0 \Rightarrow A_{11} = 0$$

es decir, $A_{10} = A_{11} = B_{10} = 0$, con lo cual quedan libres $A_{12}; A_{13}$ y B_{11}

Nudo N+1

Para la última barra N , en $x=l$ se verifican las condiciones del apoyo articulado, de modo que

$$\text{en } x=l \quad u_{N+1} = v_{l+1} = v_{N+1}' = 0 \quad (31.)$$

con lo cual, resultan, en el nudo $N+1$

$$\begin{aligned} u_N = \sum_{j=0} B_{Nj} x^j = 0 \Rightarrow \sum_{j=0} B_{Nj} = 0 \quad v_N = \sum_{j=0} A_{Nj} x^j = 0 \Rightarrow \sum_{j=0} A_{Nj} = 0 \\ v_N' = \sum_{j=0} \varphi_{1j} A_{N(j+1)} x^j = 0 \Rightarrow \sum_{j=0} \varphi_{1j} A_{N(j+1)} = 0 \end{aligned} \quad (32.)$$

Caso 3 – Pórtico en ménsula

Nudo 1

Para la primera barra, en $x=0$ se verifican las condiciones del apoyo empotrado, de modo que

$$x=0 \quad u_1 = v_1 = v_1' = 0 \quad (33.)$$

con lo cual, resultan

$$\begin{aligned} u_1 = \sum_{j=0} B_{1j} x^j \Rightarrow B_{10} = 0; \quad v_1 = \sum_{j=0} A_{1j} x^j = 0 \Rightarrow A_{10} = 0 \\ v_1' = \sum_{j=0} \varphi_{1j} A_{1(j+1)} x^j = 0 \Rightarrow A_{11} = 0 \end{aligned} \quad (34.)$$

es decir, $A_{10} = A_{11} = B_{10} = 0$, con lo cual quedan libres $A_{12}; A_{13}$ y B_{11}

Nudo N+1

En el extremo libre $N+1$ de la última barra, se verifica que

$$\sum_{j=0} \varphi_{1j} B_{N(j+1)} = \sum_{j=0} \varphi_{2j} A_{N(j+2)} = \sum_{j=0} \varphi_{3j} A_{N(j+3)} = 0 \quad (35.)$$

4 METODOLOGÍA UTILIZADA

Para fijar ideas, resolvemos el pórtico biarticulado $A_{10} = A_{12} = B_{10} = 0$. Las constantes libres son A_{11}, A_{13} y B_{11} . En el problema, deben fijarse estas tres constantes, de las cuales dependen todas las demás, con excepción de A_{10}, B_{10} y A_{12} , que son conocidas por C.B. en el nudo 1.

- *Paso 1:* mponemos $A_{11} = 1$ y $A_{13} = B_{11} = 0$, con lo cual, hacemos

$$b_{11} = \sum_{j=0} A_{Nj}; \quad b_{21} = \sum_{j=0} \varphi_{2j} A_{N(j+2)}; \quad b_{31} = \sum_{j=0} B_{Nj} \quad (36.)$$

- *Paso 2:* Imponemos $A_{11} = 0$; $A_{13} = 1$ y $B_{11} = 0$, con lo cual, hacemos

$$b_{12} = \sum_{j=0} A_{Nj}; \quad b_{22} = \sum_{j=0} \varphi_{2j} A_{N(j+2)}; \quad b_{32} = \sum_{j=0} B_{Nj} \quad (37.)$$

- *Paso 3:* Imponemos $A_{11} = 0$; $A_{13} = 0$ y $B_{11} = 1$, con lo cual, hacemos

$$b_{13} = \sum_{j=0} A_{Nj}; \quad b_{23} = \sum_{j=0} \varphi_{2j} A_{N(j+2)}; \quad b_{33} = \sum_{j=0} B_{Nj} \quad (38.)$$

y finalmente, obtenemos el sistema 3×3

$$\begin{aligned} b_{11} A_{11} + b_{12} A_{13} + b_{13} B_{11} &= 0 \\ b_{21} A_{11} + b_{22} A_{13} + b_{23} B_{11} &= 0 \\ b_{31} A_{11} + b_{32} A_{13} + b_{33} B_{11} &= 0 \end{aligned} \quad (39.)$$

Modificando los valores de P de comparación hasta anular el determinante de (3×3) , hallamos la carga crítica del pórtico P_{crit} .

5 EJEMPLOS RESUELTOS

En este caso, proponemos calcular las cargas críticas de pandeo de pórticos biarticulados con dintel curvo *–parabólicos–* y con dintel quebrados *–a dos aguas–*, [4], [5], [6] y [7], que son ampliamente utilizados en la construcción metálica. Los pórticos propuestos son simétricos, más que nada debido a una adaptación práctica a un modelo real, ya que según la metodología aplicada, la directriz del pórtico abierto podría haber sido cualquiera.

Asumimos que el pórtico está cargado en su plano. El análisis parte de subdividir el pórtico original en N barras, de modo que el esfuerzo normal pueda ser considerado constante en cada barra. Si bien, en la realidad por lo general dicho esfuerzo es variable, siempre es posible aplicar esta simplificación con una adecuada discretización del dominio. Por otro lado, esto implica conocer previamente el estado de esfuerzos normales en cada barra, para lo cual previamente se ha resuelto el hiperestático.

Para cada estado de cargas, habrá una relación entre los esfuerzos normales de cada barra con uno que adoptamos de comparación. Si incrementamos el estado de cargas, al valer el principio de superposición de los efectos, se incrementará proporcionalmente los esfuerzos sobre cada barra, manteniéndose constante la relación entre los mismos. Se llegará a una magnitud del estado de cargas a partir de la cual el equilibrio de todo el pórtico se torna inestable. A esta magnitud la denominamos crítica.

Sean: $E = 2.1 \times 10^{10} \text{ kg/m}^2$; $F = 0.1516 \times 10^{-2}$; $I_2 = 0.8637839296 \times 10^{-4} \text{ m}^4$; $I_3 = 0.1206407296 \times 10^{-4} \text{ m}^4$; $S_2 = 0.2879279765 \times 10^{-3} \text{ m}^3$; $S_3 = 0.1206407296 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

CASO 1 – Carga simétrica.

Pórtico biarticulado parabólico

Proponemos el siguiente esquema estructural

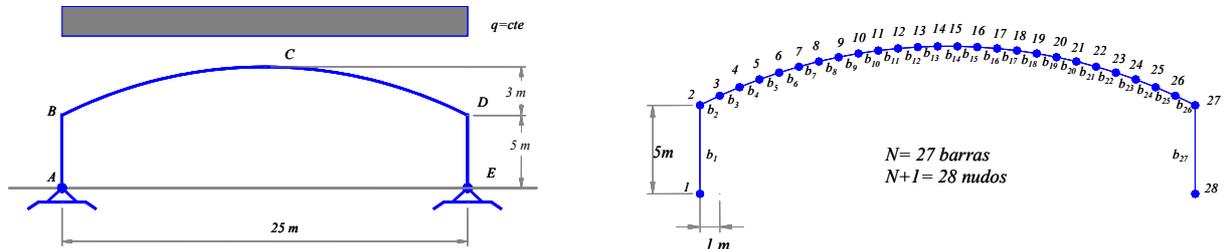


Figura 2 - Pórtico parabólico biarticulado

Para proceder a su análisis, discretizamos el dominio. Como simplificación, el dintel curvo se subdivide en 25 tramos rectos, de proyección horizontal $1m$. La geometría del pórtico queda dividida en 27 *barras*, por medio de 28 nudos. A fin de cumplir con la exigencia de que en cada tramo el esfuerzo normal sea constante, procedemos también a reemplazar la carga distribuida q como cargas concentradas P , como muestra la siguiente figura:

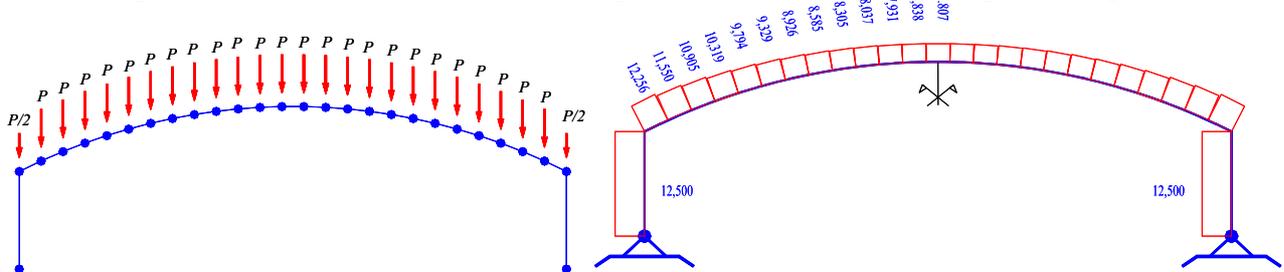


Figura 3 - Estado de cargas propuesto – Esfuerzo normal constante en cada barra

Si bien la carga P de comparación podría tomar un valor totalmente arbitrario, adoptamos $P=1\text{ kg}$, a fin de obtener directamente la P_{crit} . Previo a la implementación de la metodología que nos ocupa, calculamos los esfuerzos en cada barra del biarticulado. En este caso

Finalmente, hallamos el factor al que habría que aplicar al estado de carga de comparación, para provocar la inestabilidad del pórtico. El valor que surge del algoritmo recurrente en series de potencias fue corroborado mediante la aplicación de MEF, observándose una notable coincidencia. En efecto, para la carga de comparación adoptada unitaria, el factor que se obtiene es directamente la P_{crit} del pórtico.

Tabla 1 : Pórtico Parabólico Biarticulado

MEF	Serie de Potencias
4085.53	4084,16885379702

Pórtico biarticulado a dos aguas.

En este caso, se muestra el esquema estructural adoptado

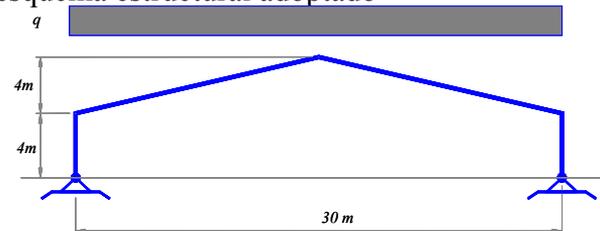


Figura 4 - Pórtico a dos aguas biarticulado

Procedemos en forma similar al caso anterior. Discretizamos el dintel del pórtico en barras de igual proyección horizontal de $1m$, con lo cual el pórtico queda subdividido en 32 barras y 33 nudos. En cada uno de los nudos del dintel se aplica una carga concentrada, adoptando una P de comparación de $1kg$, semejante al caso anterior. Esta simplificación garantiza que en cada barra el esfuerzo normal sea constante.

Procedemos al cálculo de los esfuerzos del hiperestático, de forma de encontrar la relación de los esfuerzos normales de las barras que componen el pórtico.

La aplicación de la metodología descrita de series de potencias, permite hallar el factor para el cual multiplicado el estado de carga se obtiene la inestabilidad del pórtico.

Al igual que en el caso anterior, se ha comparado el resultado obtenido con MEF.

Tabla 2 : Pórtico a dos aguas Biarticulado – Factor de carga

MEF	Serie de Potencias
2862,87	2863,53235784918

Indicamos la forma modal encontrada en ambos pórticos



Figura 5 – Forma modal – Carga uniforme sobre todo el dintel.

CASO 2 –Carga no Simétrica

Se analizó el caso de los pórticos anteriores, de iguales parámetros geométricos, en la situación de carga sobre la mitad del dintel en su proyección en planta, con la posibilidad de arriostrar o no las cabezas de columna con un tensor. Para el mismo, se previó una sección de $1.1309 e-4 m^2$.

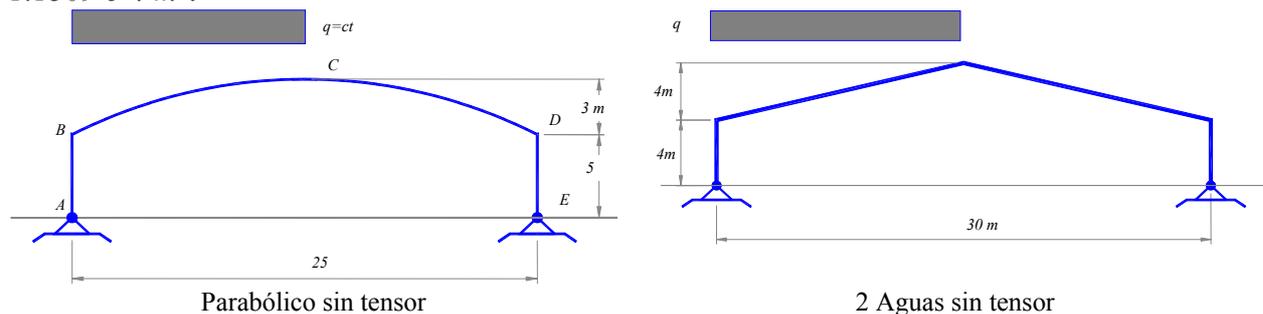


Figura 6 –Carga no simétrica sobre el dintel.

Se encontró que la misma estructura, atensorada o no, descarga igual esfuerzo normal sobre las columnas. Sin embargo, cuando el tensor trabaja, provoca una compresión adicional sobre las barras del dintel, situación ésta que tiende a inestabilizar el sistema con una sollicitación menor que la correspondiente al mismo pórtico sin tensor. Si bien por resistencia, el tensor provoca un mejor funcionamiento estructural, en las proximidades de la carga crítica, este mismo elemento tiende a inestabilizar el sistema.

A continuación, se indican los valores hallados

Tabla 3 : Pórtico a dos aguas Biarticulado – Factor de carga

PORTICO	Factor Carga Sin Tensor	Factor de Carga Con Tensor
Parabólico	7746,73179	7301,16981
A dos Aguas	5669,21404	3644,96920

Se observa que el pórtico atensorado alcanza en la situación de inestabilidad, una carga crítica mas baja que la correspondiente a igual pórtico y esquema de carga, pero sin tensor. Si bien no se muestran los valores, dado lo extenso que resultarían las tablas, se destaca que pese a esto, el pórtico con menor carga crítica, es decir, el pórtico atensorado, las barras del dintel, alcanzan un $N_{i\text{crit}}$ mayor que en el pórtico sin tensor.

A continuación, se muestran las formas modales de los pórticos parabólico y a dos aguas, con tensor y sin tensor, cuando la carga abarca sola la mitad del dintel. Este caso podría corresponder en la práctica, a la solicitación de nieve.

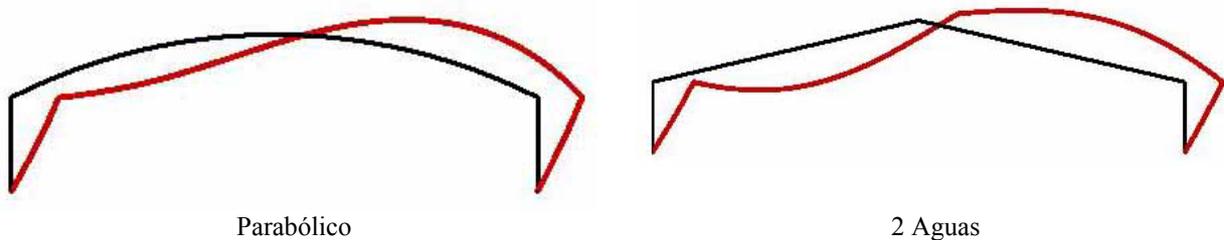


Figura 6 – Forma modal – Carga uniforme sobre mitad del dintel.

Cualitativamente, no se encontró variación apreciable en las forma modales, correspondientes a cada pórtico, tanto en la situación de poseer tensor o no.

6. COMENTARIOS

En los esquemas estructurales más complejos, con esbelteces equivalentes no necesariamente geométricas, no es posible encontrar una correspondencia directa con el caso de pandeo sencillo -asimilado al de una simple barra cargada de punta-. En estos casos, el Reglamento CIRSOC 302 [1] – y criterios alemanes anteriores- recomiendan reconducir la verificación del pandeo a la aplicación del método ω , como se señala más adelante.

En estructuras aporticadas, tratándose de una inestabilidad global, se pueden hallar tantas longitudes de pandeo como tramos de esfuerzo normal constante posea el pórtico. En efecto, habiendo partido de la carga de comparación $P=1\text{ kg}$, cuando cada tramo llegue a $N_{i\text{crit}} = \eta_i P_{\text{crit}}$, con lo cual, definimos la tensión crítica en el tramo i -ésimo,

$$\text{como } \sigma_{i\text{crit}} = \frac{N_{i\text{crit}}}{F_i} \equiv \frac{\pi^2 E_i}{(\beta_i a_i)^2}$$

De este modo, imponemos que para el tramo i -ésimo la carga crítica sea igual a la carga de Euler, con un β_i apropiado. De aquí, se encuentra la esbeltez λ_i ficticia de cada tramo, recordando que en realidad estamos verificando la inestabilidad de **todo** el conjunto estructural.

De acuerdo a la sugerencia de los reglamentos, es habitual calcular los β de las columnas, pero esto no garantiza que el estudio de otros tramos sean más desfavorables.

Los ejemplos reportados en este trabajo son pórticos de uso difundido en la construcción metálica de nuestro país. Como el método de series de potencias se aplica a pórticos abiertos, no comprende aquí los casos de pórticos atensorados. Sin embargo, aún en este caso, la carga crítica que logramos determinar sigue siendo la correcta. De acuerdo al principio de estabilidad (Apéndice B) investigamos el equilibrio estático del pórtico en la configuración I, determinando la resolución del hiperestático. Debe tenerse en cuenta que cuando las cargas son críticas, coexisten mas de una configuración de equilibrio; la I y diversas II. Nada impide, pues, que impongamos una deformada de configuración II, de tipo flexional, próxima a la configuración I, que acerque las cabezas de columna, con lo cual el tensor no colabora. .

Los autores desean por último destacar que el método de series de potencias aquí aplicado, si bien es un método conocido, de vieja data y de amplia divulgación en la literatura, lamentablemente ha resultado de escasa aplicación práctica, pese a ofrecer ventajas sustanciales comparado con otros métodos, incluyendo en estos últimos al difundido MEF.

Como muestra la aplicación de las series de potencias en este trabajo, la investigación de la inestabilidad de pórticos abiertos lleva siempre a plantear un sistema de 3×3 en todos los casos de vinculación. Esto de por sí, marca una diferencia fundamental con MEF, en que la cantidad de incógnitas se incrementa, a partir de la exigencia del método en establecer la congruencia de deformación en cada nudo, -con tres incógnitas por nudo-. Precisamente, la discretización del dominio en series de potencias, solo se halla asociada a la exigencia de establecer esfuerzo normal constante en el tramo, con lo cual, no necesariamente la longitud de los elementos debe resultar pequeña. Por el contrario, MEF requiere la discretización del dominio en elementos pequeños, con N cte, de modo que la simplificación de la forma modal cúbica adoptada en este método, no introduzca errores apreciables. En base a esto último, aparece otra sustancial ventaja del método de series de potencias, puesto que en todo momento se contemplan las formas modales trascendentes.

La implementación del método de series de potencias en un algoritmo de recurrencia en una computadora personal, no requiere ni un sofisticado hardware con amplia memoria para la resolución, ya que siempre resolvemos un sistema sencillo de 3×3 , cualquiera sea el caso de vinculación.

Es de destacar también, que en todo momento queda librada a la decisión de quien aplique el método de series de potencias, la precisión con que se deben determinar valores. La elección de la cantidad de términos en que se trunca la serie infinita, otorga la ventaja adicional de fijar en forma arbitraria la precisión, adaptada a las exigencias de cada caso, logrando así también el óptimo rendimiento del recurso computacional.

6 REFERENCIAS

- [1] CIRSOC 302 – *Fundamentos y métodos de cálculo para los problemas de Estabilidad del Equilibrio en estructuras de Acero*. 1980.
- [2] F.B. Hildebrand. *Methods of Applied Mathematics*. Prentice Hall of India. Private Ltd. N. Delhi. 1968.
- [3] C.P. Filipich y L.R. Perazzolli. *Cargas críticas para pórticos biarticulados con dintel quebrado*. Dpto. de Ingeniería de la UNS. 1983.

- [4] C.P. Filipich y C.E. Jouglard. *Cargas críticas para pórticos biarticulados con dintel recto y curvo*. Dpto. de Ingeniería de la UNS. 1984.
- [5] C.P. Filipich. *Inestabilidad del Equilibrio*. Curso 813. Secretaría Argentina para el Centro Internacional de Ciencias Mecánicas. Argentina. 1981.
- [6] C.P. Filipich. *Inestabilidad del Equilibrio – Pandeo*. Curso de Postgrado dictado en el año 1984. Dpto. de Ingeniería de la UNS.
- [7] C.P. Filipich. *Cargas de pandeo de pórticos biarticulados parabólicos y a dos aguas*. UNS – UTN. 1985.
- [9] C.P. Filipich, M.B. Rosales, F. Buezas. “Some non-linear mechanical problems solved with an analytical solution” Para publicar en Latin American Applied Research.

APÉNDICE A – SERIES DE POTENCIAS

Consideremos una función continua $f = f(x)$ con $0 \leq x \leq 1$. Escribimos la expansión en series de potencias [9] como

$$[f] \equiv \sum_{k=0}^N a_{1k} x^k \quad (\text{A1})$$

y para potencias m -ésimas

$$[f^m] \equiv \sum_{k=0}^N a_{mk} x^k \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (\text{A2})$$

Para cumplir con la *condición de consistencia algebraica (C.A.)* se debe satisfacer la siguiente relación

$$[f^m] = [f^{m-1}][f] \quad (\text{A3})$$

Después de reemplazar las series en cada factor de esta ecuación, se obtiene la siguiente expresión de recurrencia

$$a_{mk} = \sum_{p=0}^k a_{(m-1)p} a_{1(k-p)} \quad \text{o} \quad a_{mk} = \sum_{p=0}^k a_{(m-1)(k-p)} a_{1p} \quad (\text{A4})$$

Ahora expandimos una función analítica $h = \hat{h}(x) = \hat{h}(y(x)) = h(x)$ en series de Taylor

$$\hat{h}(y) = \sum_{m=0}^M \alpha_m y^m \quad (\text{A5})$$

donde α_m son conocidas. En particular, indicamos

$$[1] = \sum_{k=0}^N \delta_{0k} x^k \quad (\text{A6})$$

donde $a_{0k} = \delta_{0k}$ y δ_{0k} son los deltas de Kronecker. Si sustituimos la ecuación (2) en la ecuación (5) (con $y(x) \equiv f(x)$), podemos escribir

$$[h(x)] = \sum_{k=0}^N \varphi_k x^k \quad \varphi_k = \sum_{m=0}^M \alpha_m a_{mk} \quad (\text{A7})$$

Esta expresión será usada para cualquier función analítica.

Ahora si tenemos una función racional $\hat{F}(y)$

$$\hat{F}(y) = \frac{\hat{g}(y)}{\hat{h}(y)} = \frac{g(x)}{h(x)} = F(x) \quad (\text{A8})$$

siendo $\hat{g}(y)$ y $\hat{h}(y)$ funciones analíticas y $\hat{h}(0) \neq 0$ y $\hat{g}(y) = \sum_{m=0}^M \beta_m y^m$ y β_m conocidas. Entonces se puede escribir

$$[g(x)] = \sum_{k=0}^N \varepsilon_k x^k \quad (\text{a}) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_k = \sum_{m=0}^M \beta_m a_{mk} \quad (\text{b}) \quad (\text{A9})$$

Si denominamos

$$[F(x)] = \sum_{k=0}^N \lambda_k x^k \quad (\text{A10})$$

Ahora la C.A. debe aplicarse

$$[F(x)][h(x)] = [g(x)] \quad (\text{A11})$$

$$\left(\sum_{k=0}^N \lambda_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^N \varphi_k x^k \right) = \sum_{k=0}^N \varepsilon_k x^k \quad \text{donde} \quad \varepsilon_k = \sum_{p=0}^k \varphi_p \lambda_{(k-p)} \quad (\text{A12})$$

Los λ_k son desconocidos y los conjuntos φ_k y ε_k son conocidos.

Es evidente que $\lambda_0 = \varepsilon_0 / \varphi_0$. Ahora la relación de recurrencia para λ_k es

$$\lambda_k = \frac{\varepsilon_k - \sum_{p=1}^k \varphi_p \lambda_{(k-p)}}{\varphi_0} \quad \text{donde} \quad \varphi_0 \neq 0 \quad \text{y} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A13})$$

Debe notarse que $\varphi_0 \neq 0$ para que $F(0)$ exista.

También las expansiones pueden efectuarse alrededor de x_0 . En nuestro caso siempre $x_0 = 0$.

APENDICE B - CRITERIO DE ESTABILIDAD PARA INGENIEROS

Dada una configuración de equilibrio de un sistema conservativo I -cargado de cualquier forma-, para investigar si ese equilibrio es estable o inestable, hacemos lo siguiente: sin modificar el sistema de cargas de I, por causas cualesquiera, llevamos el sistema a una configuración II infinitamente próxima. Si suprimidas las causas que llevaron el sistema de I a II, el sistema tiende a volver a I, diremos que la primera configuración es de equilibrio estable. Por otro lado, si suprimidas las causas que llevaron el sistema de la configuración I a II, el sistema tiende a alejarse de I, diremos que la primera configuración es de equilibrio inestable. Finalmente, si al suprimir las causas, el sistema permanece en la configuración II, diremos que la configuración I es de equilibrio neutro o indiferente. La magnitud de las cargas aplicadas en I, que dan precisamente el equilibrio neutro o indiferente, se denominan magnitud crítica o cargas críticas. Estas cargas pueden considerarse un límite entre la estabilidad e inestabilidad de sistemas conservativos.

Nótese que en realidad lo que estamos haciendo es probar el equilibrio en una configuración próxima.