

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS SOBRE VIBRACIONES DE VIGAS BI-EMPOTRADAS QUE SOPORTAN MASAS CONCENTRADAS

S. Maíz*, C.A. Rossit[†] y D.V. Bambill[†]

* Estudiante de Ingeniería Industrial (Práctica Final de Carrera) Departamento de Ingeniería,
Universidad Nacional del Sur

[†] Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur
y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (Conicet)
Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595101–Interno 3219
E-mail carossit@criba.edu.ar

Palabras clave: Vibraciones de vigas Masas adosadas, Frecuencias naturales.

Resumen. *El caso de vigas simplemente apoyadas que soportan masas concentradas adosadas rígidamente a las mismas ha merecido amplia atención en la literatura técnico – científica (ver, por ejemplo, el conocido tratado de Magrab¹). En cambio esto no es así para otras condiciones de borde. En este trabajo se estudia el caso de la viga bi-empotrada con una masa concentrada ubicada en un lugar arbitrario de la viga utilizándose el clásico modelo de Bernoulli – Euler para el comportamiento dinámico – estructural de la viga. Se determinan las dos primeras frecuencias de vibración transversal de la viga utilizando primeramente dos aproximaciones analíticas y la metodología de Rayleigh – Ritz, y numéricamente mediante el método de elementos finitos. Al efectuar determinaciones analíticas se utilizan dos tipos de funciones coordenadas: a) funciones “viga” y b) aproximaciones polinómicas con parámetros exponenciales que permiten optimización ulterior de los autovalores mediante un proceso de optimización no lineal. Valores numéricos de las mismas frecuencias han sido determinados también mediante el conocido código de elementos finitos ALGOR. En todas las situaciones de obtuvieron excelentes concordancias. Obviamente los autovalores determinados son también válidos en el caso de ejes rotantes con volantes montados sobre los mismos.*

1 INTRODUCCIÓN

En determinados casos, obtener la solución exacta de un problema en mecánica del continuo, resolviendo sus ecuaciones diferenciales gobernantes y cumplimentando sus condiciones de borde, resulta una tarea sumamente compleja.

Por ello, es habitual recurrir a métodos aproximados², que brindan, con mayor sencillez, soluciones con muy buena aproximación desde un punto de vista ingenieril.

Entre esos métodos, uno de los más utilizados es el de Rayleigh – Ritz, y su variante optimizada³.

En el presente trabajo, lo utilizaremos para determinar las primeras frecuencias naturales del sistema viga – masa adosada, que representa la Figura 1

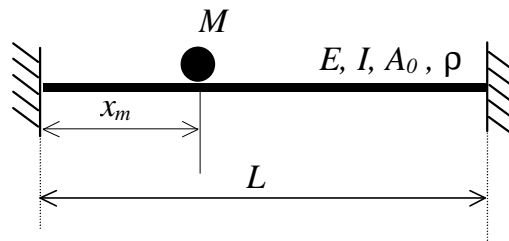


Figura 1: Viga biempotrada vibrante con masa adosada

Para ello, aproximaremos la función corrimiento con funciones aproximantes, que cumplan las condiciones de borde (el método exige que se cumplan sólo las esenciales) y minimizaremos una funcional de energía con respecto a ciertos parámetros de ponderación de las aproximaciones:

Es decir, cuando el sistema viga - masa efectúa una de sus modos normales de vibración se tendrá:

$$v(x,t) = V(x)e^{i\omega t} \quad (1)$$

donde aproximaremos la componente espacial de la solución:

$$V(x) \cong V_a(x) \quad (2)$$

y definiremos la funcional de energía:

$$J[V_a(x)] = U_{\max} - T_{\max} \quad (3)$$

Siendo:

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 V_a}{dx^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

la máxima energía de deformación de la viga, E : módulo de elasticidad del material, I : momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje de flexión y

$$T_{max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^L \rho A_0 (V_a(x))^2 dx + \frac{1}{2} M \omega^2 (V_a(x_m))^2 \quad (5)$$

la energía cinética máxima de la viga y de la masa; donde ω es la frecuencia natural circular de vibración, ρ el peso específico del material de la viga, A_0 : su sección transversal y M es el valor de la masa concentrada, con x_m indicando su posición.

No ha sido tenida en cuenta la inercia rotatoria de la masa.

2 DESARROLLO

En la consideración del sistema vibrante explicitado se considerarán sucesivamente las siguientes aproximaciones para la amplitud de desplazamiento.

I – Modo fundamental de vibración de la viga sin masa:

Tomaremos en primer lugar, como aproximación, la autofunción correspondiente al primer modo de vibración de la viga biempotrada, sin masa adosada⁴:

$$V_a(x) = C \left[\cosh(k_1 x) - \cos(k_1 x) - \frac{\cos(k_1 L) - \cosh(k_1 L)}{\sin(k_1 L) - \sinh(k_1 L)} (\sinh(k_1 x) - \sin(k_1 x)) \right] \quad (6)$$

con $k_1 L = 4.730040744862704$

Obviamente, la autofunción verifica las condiciones de borde.

Reemplazamos (6) en (3) a través de sus términos (4) y (5).

Minimizando la funcional:

$$\frac{\partial J(V_a)}{\partial C} = 0 \quad (7)$$

se obtiene el coeficiente de frecuencia fundamental:

$$\Omega_1 = \omega_1 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI}} L^2 = \frac{(k_1 L)^2}{\sqrt{1 + m V_{(x_m)}^2}} \quad (8)$$

$m = \frac{M}{\rho A_0 L} = \frac{M}{M_v}$, es la relación entre la masa adosada y la masa de la viga.

En la Tabla 1, se indican los valores aproximados que arroja (8).

II – Aproximación polinómica. (Un término).

En este caso se recurrirá al método de Rayleigh – Ritz optimizado, para lo cual en la expresión de la función aproximante se introduce un parámetro γ :

$$V_a(x) = A(a_\gamma x^\gamma + a_3 x^3 + x^2) \quad (9)$$

Mediante la aplicación de las condiciones de borde:

$$V_a|_{x=0} = V_a|_{x=L} = 0$$

$$\left. \frac{dV_a}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dV_a}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

se obtiene:

$$a_\gamma = \frac{1}{\gamma - 3}; \quad a_3 = \frac{2 - \gamma}{\gamma - 3}$$

Reemplazando en la funcional y minimizando con respecto a la constante A obtenemos el coeficiente Ω_1 en términos de γ :

$$\Omega_1 = \Omega_1(\gamma)$$

Luego, se efectúa una minimización numérica con respecto al parámetro γ .

En la Tabla 2, se vuelcan los valores del coeficiente de frecuencia Ω_1 , así como los valores óptimos de γ que minimizan dicho coeficiente.

III – Aproximación polinómica con dos términos.

Se mejoró la aproximación anterior agregando otro término, lo que a su vez permitirá calcular la segunda frecuencia natural:

$$V_a(x) = A_1(a_\gamma x^\gamma + a_3 x^3 + x^2) + A_2(a_{\gamma+1} x^{\gamma+1} + a_4 x^4 + x^2) \quad (10)$$

Aplicando las condiciones de borde se obtiene:

$$a_\gamma = \frac{1}{\gamma-3}; \quad a_3 = -\frac{(\gamma-2)}{\gamma-3}; \quad a_{\gamma+1} = \frac{2}{\gamma-3}; \quad a_4 = -\frac{(\gamma-1)}{\gamma-3}$$

Reemplazando en la funcional y requiriendo:

$$\frac{\partial J(V_a)}{\partial A_1} = 0; \quad \frac{\partial J(V_a)}{\partial A_2} = 0$$

resultan las raíces:

$$\Omega_1(\gamma) \text{ y } \Omega_2(\gamma)$$

que son minimizadas con respecto a γ .

Los resultados se indican en las Tabla 3a y 3b.

IV – Aproximación con los N primeros modos normales de vibración de la viga sin masa.

$$V_a(x) = \sum_{i=1}^N C_i \left[\text{Cosh}(k_i x) - \text{Cos}(k_i x) - \frac{\text{Cos}(k_i L) - \text{Cosh}(k_i L)}{\text{Sen}(k_i L) - \text{Senh}(k_i L)} (\text{Senh}(k_i x) - \text{Sen}(k_i x)) \right] \quad (10)$$

donde cada término representa la i ésima forma modal de vibración natural de la viga sin masa (autofunciones) y k_i son los autovalores que resultan de la ecuación característica de frecuencias de la viga biempotrada.

$$\text{Cos}(kL) \cdot \text{Cosh}(kL) = 1$$

siendo las primeras ochos raíces:

$$k_1 L = 4.7300$$

$$k_5 L = 17.2788$$

$$k_2L = 7.8532$$

$$k_6L = 20.4204$$

$$k_3L = 10.9956$$

$$k_7L = 23.5619$$

$$k_4L = 14.1872$$

$$k_8L = 26.7035$$

Reemplazando en la funcional (3) y requiriendo que:

$$\frac{\partial J[Va]}{\partial C_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Se obtienen un sistema de N ecuaciones lineales homogéneas en las constantes C_i .

La nulidad del determinante de los coeficientes de dichas constantes, nos permite obtener los coeficientes de frecuencia Ω_1 del sistema viga masa.

Se ha tomado sucesivamente $N = 2$, $N = 3$ y $N = 8$ volcándose los resultados en Tablas 4, 5 y 6 respectivamente.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS Y CONCLUSIONES

A continuación se indican los valores obtenidos con las aproximaciones propuestas y con el método de elementos finitos:

I- Modo fundamental:

Tabla 1: Valores del Coeficiente Ω_1 según aproximación I

M/M_v	X_m/L				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,10	22,3334	21,9561	21,1396	20,3240	19,9935
0,25	22,2739	21,3718	19,6204	18,0902	17,5211
0,50	22,1759	20,4939	17,6843	15,5914	14,8789
0,75	22,0792	19,7159	16,2274	13,9054	13,1570
1,00	21,9837	19,0203	15,0799	12,6698	11,9213
2,00	21,6137	16,8297	12,1293	9,7769	9,1002

II- Polinomio (un término):

Tabla 2: Valores del Coeficiente Ω_1 y correspondiente γ_{opt} según aproximación II

M/M_v	X_m/L									
	0,1		0,2		0,3		0,4		0,5	
	Ω_1	γ_{opt}	Ω_1	γ_{opt}	Ω_1	γ_{opt}	Ω_1	γ_{opt}	Ω_1	γ_{opt}
0,10	22,4009	4,10	21,9840	4,20	21,1485	4,35	20,3883	4,30	20,1088	4,10
0,25	22,3298	4,10	21,3129	4,45	19,4992	4,70	18,1162	4,50	17,6610	4,10
0,50	22,2117	4,15	20,2588	4,85	17,3639	5,20	15,5672	4,70	15,0282	4,10
0,75	22,0937	4,20	19,2842	5,30	15,7647	5,55	13,8521	4,80	13,3044	4,10
1,00	21,9759	4,25	18,3884	5,80	14,5226	5,80	12,5997	4,90	12,0638	4,10
2,00	21,5055	4,50	15,5483	7,35	11,4315	6,30	9,6864	5,00	9,2222	4,10

III- Polinomio (dos términos):

Tabla 3a: Valores del Coeficiente Ω_1 y correspondiente γ_{opt} según aproximación III

M/M_v	X_m/L									
	0,1		0,2		0,3		0,4		0,5	
	Ω_1	γ_{opt}	Ω_1	γ_{opt}	Ω_1	γ_{opt}	Ω_1	γ_{opt}	Ω_1	γ_{opt}
0,10	22,3401	6,30	21,9448	5,80	21,1067	7,30	20,3165	7,40	20,0143	6,75
0,25	22,2760	6,20	21,3006	4,95	19,4677	8,70	18,0413	5,75	17,5465	6,95
0,50	22,1691	6,05	20,2588	4,05	17,3437	4,50	15,4841	5,60	14,9043	7,10
0,75	22,0622	5,85	19,2726	12,40	15,7449	4,35	13,7659	5,60	13,1809	7,15
1,00	21,9548	5,60	18,3674	11,95	14,5023	4,30	12,5129	5,55	11,9436	7,20
2,00	21,5028	2,35	15,5376	9,55	11,4072	4,15	9,6054	5,50	9,1179	7,30

Tabla 3b: Valores del Coeficiente Ω_2 y correspondiente γ_{opt} según aproximación III

M/M_v	X_m/L									
	0,1		0,2		0,3		0,4		0,5	
	Ω_2	γ_{opt}	Ω_2	γ_{opt}	Ω_2	Ω_2	Ω_2	γ_{opt}	Ω_2	γ_{opt}
0,10	61,9473	4,25	58,1991	4,55	57,5812	4,30	60,6398	4,25	62,8973	4,15
0,25	60,5569	4,45	52,9861	5,00	53,0502	4,45	58,7368	4,30	62,8966	4,15
0,50	58,3226	4,80	47,3935	5,55	49,2274	4,55	57,1324	4,35	62,8960	4,15
0,75	56,1844	5,25	43,9685	5,85	47,2462	4,60	56,2911	4,40	62,8957	4,15
1,00	54,1338	5,80	41,7124	6,05	46,0470	4,65	55,7739	4,40	62,8955	4,15
2,00	46,9349	8,90	37,4482	6,35	43,9232	4,70	54,8357	4,40	62,8951	4,15

IV- N primeras formas modales:

Tabla 4a: Valores del Coeficiente Ω_1 según aproximación IV con $N=2$

M/M_v	X_m/L				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,10	22,3333	21,9473	21,1046	20,3006	19,9935
0,25	22,2732	21,3234	19,4705	18,0106	17,5211
0,50	22,1729	20,3350	17,3374	15,4445	14,8789
0,75	22,0724	19,4216	15,7346	13,7229	13,1570
1,00	21,9719	18,5867	14,4887	12,4690	11,9213
2,00	21,5695	15,9424	11,3876	9,5639	9,1002

Tabla 4b: Valores del Coeficiente Ω_2 según aproximación IV con $N=2$

M/M_v	X_m/L				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,10	61,0447	57,7787	56,3377	59,1854	61,6728
0,25	60,1467	53,5545	51,8659	57,1481	61,6728
0,50	58,7568	48,9707	48,1339	55,4672	61,6728
0,75	57,4852	46,0531	46,2134	54,5987	61,6728
1,00	56,3172	44,0527	45,0558	54,0700	61,6728
2,00	52,4614	40,0090	43,0134	53,1179	61,6728

Tabla 5a: Valores del Coeficiente Ω_1 según aproximación IV con $N = 3$

M/M_v	X_m/L				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,10	22,3332	21,9440	21,1017	20,2985	19,9823
0,25	22,2726	21,3044	19,4580	18,0034	17,4851
0,50	22,1708	20,2704	17,3083	15,4311	14,8158
0,75	22,0677	19,3000	15,6936	13,7061	13,0807
1,00	21,9636	18,4070	14,4400	12,4505	11,8388
2,00	21,5370	15,5905	11,3287	9,5443	9,0156

Tabla 5b: Valores del Coeficiente Ω_2 según aproximación IV con $N = 3$

M/M_v	X_m/L				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,10	61,0320	57,5401	56,2516	59,1619	61,6728
0,25	60,0726	52,6893	51,6313	57,0774	61,6728
0,50	58,4944	47,3134	47,7698	55,3449	61,6728
0,75	56,9640	43,9642	45,7920	54,4471	61,6728
1,00	55,4992	41,7389	44,6054	53,8998	61,6728
2,00	50,4393	37,4948	42,5255	52,9141	61,6728

Tabla 6a: Valores del Coeficiente Ω_1 según aproximación IV con $N = 8$

M/M_v	X_m/L				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,10	22,3330	21,9429	21,0999	20,2938	19,9799
0,25	22,2717	21,2976	19,4498	17,9869	17,4775
0,50	22,1670	20,2469	17,2890	15,4004	14,8025
0,75	22,0592	19,2555	15,6664	13,6678	13,0646
1,00	21,9483	18,3414	14,4077	12,4083	11,8215
2,00	21,4745	15,4652	11,2897	9,4997	8,9978

Tabla 6b: Valores del Coeficiente Ω_2 según aproximación IV con $N = 8$

M/M_v	X_m/L				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,10	61,0132	57,4641	56,2037	59,1164	61,6728
0,25	59,9551	52,4007	51,4959	56,9361	61,6728
0,50	58,0384	46,7621	47,5555	55,0965	61,6728
0,75	56,0016	43,2842	45,5424	54,1369	61,6728
1,00	53,9401	41,0015	44,3380	53,5508	61,6728
2,00	46,7076	36,7373	42,2352	52,4940	61,6728

V- Elementos Finitos:

Tabla 7a: Valores del Coeficiente Ω_1 obtenidos con elementos finitos (Algor)

M/M_v	x_m/L				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,10	22,333	21,943	21,100	20,293	19,979
0,25	22,272	21,297	19,449	17,986	17,476
0,50	22,167	20,245	17,286	15,398	14,800
0,75	22,059	19,252	15,662	13,665	13,062
1,00	21,947	18,336	14,403	12,405	11,818
2,00	21,471	15,454	11,284	9,4969	8,9945

Tabla 7b: Valores del Coeficiente Ω_2 obtenidos con elementos finitos (Algor)

M/M_v	x_m/L				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,10	61,012	57,458	56,197	59,113	61,673
0,25	59,948	52,378	51,476	56,924	61,673
0,50	58,011	46,718	47,525	55,076	61,673
0,75	55,941	43,230	45,507	54,111	61,673
1,00	53,843	40,943	44,300	53,522	61,673
2,00	46,492	36,678	42,194	52,459	61,673

Observando las Tablas 1 y 2, y considerando que el método arroja cotas superiores, resulta claro que para el valor más pequeño de la masa y debido a su poca influencia la aproximación mediante la función modal de la viga sin masa brinda mejor resultado.

Esta tendencia se modifica a medida que el valor de la masa aumenta, salvo para posiciones centrales de la misma en que la “función viga” sigue brindando mejores resultados.

Se hace constar, que por no haberse tomado un polinomio simétrico, los valores obtenidos para posiciones simétricas de la masa no son iguales. En cada caso se consigna el menor valor de frecuencia para las posiciones de la masa: x_m y $(L-x_m)$.

Al comparar las aproximaciones con dos términos (tanto polinómicas como formas modales); Tablas 3 y 4, se incrementa el rango de valores (M, x_m), en el que la utilización de formas modales, como funciones coordenadas brinda mejores resultados.

Nótese además, como dicha aproximación representa con exactitud la nula influencia de la masa en el valor de la segunda frecuencia, cuando está ubicada en el centro de la viga (la forma modal correspondiente tiene un nodo allí).

En consecuencia, se continuó aproximando la solución con sumas de formas modales de la viga sin masa.

En Tablas 5 y 6 se indican los valores obtenidos con 3 y 8 términos respectivamente.

En Tablas 7a y 7b se especifican los valores que se obtuvieron mediante el programa de elementos finitos ALGOR⁵, dividiendo la viga en cuarenta (40) elementos.

Como detalle de interés, se señala cómo mejora el valor del coeficiente de frecuencia fundamental cuando la ubicación de la masa es $x_m = 0.2$, al incorporar un tercer término en la sumatoria de autofunciones. Esto se explica por el hecho de que la tercera forma modal tiene un máximo en proximidades de esa posición.

En general, se observa que los valores determinados con la metodología propuesta presentan muy buena concordancia, a fines ingenieriles, con los obtenidos a través del método de elementos finitos.

Por otro lado, muestran excelente acuerdo, e incluso mejoran, valores disponibles en la literatura^{6, 7}, para el caso de la masa ubicada en el centro.

Para las restantes posiciones de la masa, los resultados obtenidos mejoran notablemente los valores indicados en Blevins⁶.

4 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido auspiciado por el CONICET (Proyecto PICT 02152) y la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur. Los autores agradecen al Ing. Daniel Felix y al Sr. Ernesto Alberdi las valiosas sugerencias recibidas y al Dr. Patricio Laura por su permanente guía y estímulo.

5 REFERENCIAS

- [1] E. A. Magrab, *Vibrations of Elastic Structural Members*, Sijthoff & Noordhoff, (1979).
- [2] P. A. A. Laura, L. Diez y C. E. Gianetti, *Métodos Aproximados en la Mecánica Aplicada*, Editorial Patagón (1975).
- [3] P. A. A. Laura, "Optimization of Variational Methods", *Ocean Engineering*, **22**(3), 235-250 (1995)
- [4] C. A. Rossit, *Vibraciones longitudinales y transversales de barras. Desarrollos no armónicos de Fourier*, Tesis de Magíster en Ingeniería, Departamento de Ingeniería, UNS (1995).
- [5] ALGOR Profesional Mech/VE. *Linear Stress and Dynamics Reference División*, Pittsburgh, PA. (1999)
- [6] R. D. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company, (1979)
- [7] M. S. Hess, "Vibration Frequency for a Uniform Beam with Central Mass and Elastic Supports", *Journal of Applied Mechanics*, **31**, 556-558 (1964)