

## UN MÉTODO VARIACIONAL NO CLÁSICO APLICADO AL PROBLEMA DE VIBRACIONES NATURALES DE ARCOS GRUESOS CIRCUNFERENCIALES

Heber D. Menecozi<sup>1</sup>, Carlos P. Filipich<sup>1,2</sup> y Marta B. Rosales<sup>1,3,4</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Alem 1253  
8000 Bahía Blanca, Argentina.  
e-mail: [mrosales@criba.edu.ar](mailto:mrosales@criba.edu.ar)  
e-mail: [hdmenco@hotmail.com](mailto:hdmenco@hotmail.com)

<sup>2</sup>Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional.  
8000 Bahía Blanca, Argentina.

<sup>3</sup>IMA, Universidad Nacional del Sur, Alem 1253  
8000 Bahía Blanca, Argentina

<sup>4</sup>CONICET

**Palabras clave:** Arcos gruesos , frecuencias naturales, series trigonométricas.

**Resumen.** *En el presente trabajo se recurre a un método variacional directo, denominado MEC (Método del Elemento Completo) para la determinación de las frecuencias naturales de vibración libre en su plano de arcos circunferenciales gruesos. El problema se trata dentro de la teoría de resistencia de materiales, o sea que se admite el mantenimiento de las secciones planas, y se consideran las contribuciones de la deformación flexional, axil y por corte en la energía de deformación y las inercias traslacional y rotatoria en la energía cinética. El MEC fue desarrollado para problemas de borde, de condiciones iniciales, como así también para fenómenos gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales, en dominios uni, bi y tridimensionales, y para sistemas conservativos y no conservativos, lineales y no lineales. Se presentan ejemplos numéricos y se comparan con la solución clásica y elementos finitos en 2 dimensiones.*

## 1 INTRODUCCIÓN

El estudio de arcos gruesos está incluido dentro de los denominados "problemas planos de tensiones de la elasticidad" cuando la sección de la pieza es simétrica. Abordar los casos de secciones arbitrarias con un plano de simetría por medio de la teoría de la elasticidad implicaría resolver un problema tridimensional muy complicado. Es así entonces que una teoría aproximada como la Resistencia de Materiales resulta muy apropiada para afrontar este estudio. Dentro de la Resistencia de Materiales, toda barra constituye un eje con rigidez flexional, axial y por corte y puede considerarse, por ser barras curvas, el desplazamiento del eje neutro hacia el centro de curvatura. Aún así, la complejidad matemática que surge del planteo de este problema es significativa. Este tipo estructural es de uso divulgado en la Ingeniería Mecánica, encontrándose por ejemplo, en diversos elementos de máquina como acoples, cadenas, ganchos, tuberías, etc. Otras ramas de la Ingeniería también hacen uso de esta tipología (arcos y reencuentros de tramos rectos en construcciones civiles). El estudio de las características de estos elementos es necesario como paso previo para realizar estudios dinámicos (vibraciones forzadas) y así poder calcular las tensiones originadas por cargas aplicadas dinámicamente.

## 2 DESCRIPCIÓN

El Método del Elemento Completo (MEC) está incluido dentro de los denominados métodos variacionales directos (por ejemplo, Mikhlin<sup>1</sup>, Rektorys<sup>2</sup>, Reddy<sup>3</sup>), y en él se combinan varios aspectos de otras metodologías. Primeramente se propone el funcional gobernante del problema y posteriormente se anula su primera variación. La función de prueba, que es introducida en dicho funcional, es una secuencia que formalmente es idéntica cualquiera sea el problema sin importar la forma de la función real. Esto pone de manifiesto una importante ventaja del método: no se necesita conocer de antemano la verdadera forma de la variable representada por la secuencia. En particular, se eligen secuencias formadas por funciones trigonométricas (senos o cosenos) pertenecientes a conjuntos completos, cuyo planteo es sistemático. Las condiciones de borde deben ser satisfechas por la secuencia completa y no por cada una de las funciones del conjunto completo. Aquí surge otra ventaja del MEC, ya que no es fácil, en general, encontrar un conjunto de funciones en las que cada una satisfaga las condiciones de borde. Además, las condiciones a cumplir son sólo las esenciales, que son aquellas que involucran derivadas de orden menor o igual a  $(k-1)$ , si el problema está gobernado por una ecuación diferencial de orden  $2k$ . Si alguna condición no es cumplida idénticamente por la secuencia completa se recurre al uso de multiplicadores de Lagrange. Por otra parte, se trata el dominio en una, dos o tres dimensiones como un único elemento, lo que da origen al nombre del método. Esto es particularmente útil en el caso de que existan singularidades como cambios de sección, apoyos intermedios, masas y cargas concentradas, etc. Por lo tanto, se podrá usar una única secuencia en dicho dominio con tal de que la misma y sus derivadas de hasta el orden  $(k-1)$  sean continuas.

### 3 ANTECEDENTES

No hay antecedentes del uso de la técnica del MEC aplicada específicamente a arcos gruesos. Otros elementos estructurales y la resolución de otro tipo de problemas han sido abordados anteriormente con MEC.

Davis et al <sup>4</sup> desarrollaron un elemento finito tipo viga para estructuras de curvatura constante. Romanelli <sup>5</sup> estudió barras curvas planas con estado general de sollicitación. Rossi <sup>6</sup> estudió anillos circunferenciales de sección no uniforme. Filipich <sup>7</sup> determinó frecuencias de arcos y anillos a través de la solución clásica.

Los siguientes autores utilizaron el MEC en sus respectivos trabajos. Filipich y Rosales <sup>8</sup> determinaron frecuencias exactas de vigas y de arcos delgados. Filipich y Rosales <sup>9</sup> estudiaron vibraciones forzadas en vigas. Filipich et al <sup>10</sup> obtuvieron frecuencias exactas de vigas Timoshenko. Bellés <sup>11</sup> determinó la matriz de rigidez de un elemento recto con carga de punta. Filipich y Rosales <sup>12</sup> aplicaron la solución generalizada a un problema de condiciones iniciales. Filipich et al <sup>13</sup> estudiaron placas rectangulares consideradas como sólidos tridimensionales. Rosales et al <sup>14</sup> calculó frecuencias de arcos elípticos. Rosales y Filipich <sup>15</sup> estudiaron vibraciones de membranas de forma arbitraria. Escalante <sup>16</sup> calculó frecuencias de placas delgadas con apoyos no convencionales. Rosales y Filipich <sup>17</sup> resolvieron sistemas no lineales.

El alcance de este trabajo está limitado al estudio de arcos gruesos circunferenciales con vinculaciones de distinto tipo, a saber: doblemente empotrado en los extremos y doblemente articulado en los extremos (con la articulación aplicada en el eje neutro). Otros casos están incluidos en Menecozzi <sup>18</sup>. Se analizarán distintas relaciones de esbeltez (establecida por la relación "altura de la sección transversal - radio baricéntrico de la sección transversal") y distintas aberturas del arco. En todos los casos se supone que la sección transversal es uniforme, y que el material constituyente es homogéneo e isótropo. Se trabaja dentro del campo de la teoría clásica de la resistencia de materiales, y se tienen en cuenta las deformaciones flexional, axil y por corte en la energía de deformación, y las inercias traslacional y rotatoria en la energía cinética. Además, se considera el corrimiento del eje neutro de acuerdo con la teoría de barras de gran curvatura. Se determinarán frecuencias y las formas modales de vibración libre correspondientes. Posteriormente, por medio del método de superposición modal, se estudia la respuesta a una carga dinámica y se calculan los esfuerzos generados. La geometría y simbología usadas se presentan en la Figura 1. Denominamos  $\alpha$  a la variable espacial adimensionalizada, con respecto a la abertura  $\alpha_0$  del arco, que mide el ángulo que forma una sección genérica con un extremo del arco, tal que  $\alpha \in [0,1]$ , y  $t$  a la variable temporal.  $u = u(\alpha, t)$  es el desplazamiento radial único de cada sección,  $w = w(\alpha, t)$  es el desplazamiento tangencial único de cada sección, que coincide con el correspondiente al eje neutro. En virtud de esto, el desplazamiento de una fibra genérica situada a una distancia  $y$  del eje neutro es (aceptando mantenimiento de las secciones planas durante la deformación)

$$w^* = w + \theta y$$

siendo  $\theta = \theta(\alpha, t)$  el giro por flexión, es decir la diferencia entre el giro total y el debido al corte.

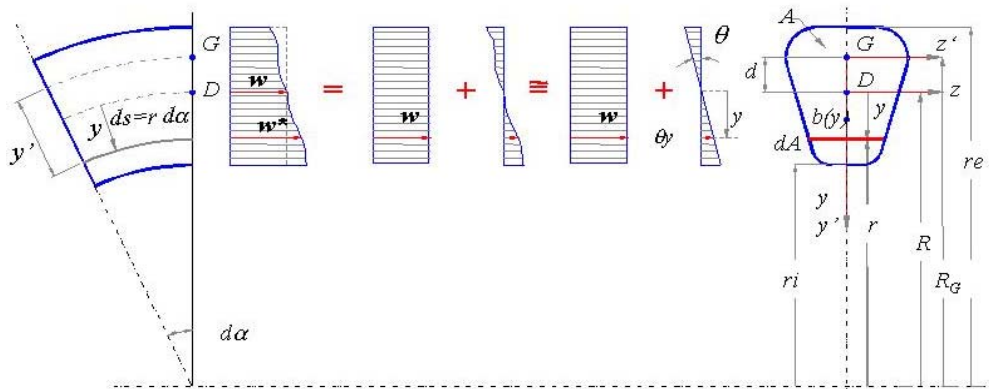


Figura 1: características geométricas del arco

#### 4 FUNCIONAL GOBERNANTE

Partiendo de las expresiones de la energía cinética ( $K$ ), la energía interna de deformación ( $U$ ) y la energía potencial de las fuerzas externas ( $L_e$ ) estamos en condiciones de aplicar el Principio de Hamilton, que postula que la función que describe exactamente el movimiento de un cuerpo debe verificar la siguiente igualdad

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U + L_e - K) dt = 0 \quad (1)$$

y las siguientes condiciones

$$\left. \delta \bar{w} = \delta \bar{u} = \delta \bar{\theta} \right|_{t_0, t_1} = 0 \quad (2)$$

siendo  $t_0$  y  $t_1$ , con  $t_1 > t_0$ , dos instantes consecutivos cualesquiera.

De este modo obtenemos la expresión del funcional gobernante, que se utilizará para la determinación de las frecuencias naturales de arcos gruesos (Romanelli<sup>5</sup> y Filipich<sup>7</sup>).

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\alpha) = \Omega^2 \left( \int_{\alpha} [(u)^2 + (w)^2] d\alpha - 2q \int_{\alpha} [(R\theta)w] d\alpha + k^2 \int_{\alpha} [(R\theta)^2] d\alpha \right) \\ - \int_{\alpha} \frac{(R\theta')^2}{\alpha_0^2} d\alpha - \frac{1}{k_{\varepsilon}^2} \int_{\alpha} \left[ \frac{w'}{\alpha_0} - u \right]^2 d\alpha - \frac{1}{k_{\phi}^2} \int_{\alpha} \left[ \left( R\theta + w + \frac{u'}{\alpha_0} \right)^2 d\alpha \right] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

denotando  $(\bullet)'$  a la derivada respecto a la variable espacial  $\alpha$  y donde  $\Omega = \left[ \frac{\gamma \rho A R^4 \omega^2}{EJ} \right]^{1/2}$  es el parámetro de frecuencia. Además, se introduce la siguiente notación:  $q = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\beta^2}{R^2} \right)$

$$k^2 = \frac{p^2}{\gamma R^2}; \quad k_{\varepsilon}^2 = \frac{\varepsilon}{j R^2} = \gamma - 1; \quad k_{\phi}^2 = \frac{\varphi}{j R^2} = 2m^* (1 + \nu)(\gamma - 1); \quad j \equiv \frac{R}{EJ}; \quad \varepsilon \equiv \frac{R}{EA}$$

$$\varphi \equiv \frac{m^* R}{GA}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad m^* \equiv \frac{AR^3}{J^2} \int_{r_i}^{r_e} \left( \frac{S(y')^2}{r^3 b(y')} \right) dy'; \quad \gamma = \frac{R_G}{R} \geq 1; \quad \beta^2 = \left( \frac{J_G}{A} + R_G d \right)$$

$$S(y') = \int_{r_i}^{R_g - y'} b(y') y' dy' = \int_{r_i}^{R_g - y'} y' dA; \quad p^2 = \left( \frac{1}{AR} \right) (R J_G (3\gamma - 2) + R d^2 \gamma A)$$

$\nu$  es el coeficiente de Poisson,  $R$  el radio neutro;  $\alpha_0$  la abertura del arco;  $R_G$  el radio baricéntrico;  $\rho$  la densidad del material;  $A$  el área de la sección transversal;  $\omega$  la frecuencia circular en *rad/seg*;  $E$  el módulo de elasticidad;  $J = ARd$  el momento de inercia neutro;  $d$  la distancia eje neutro-eje baricéntrico y  $J_G$  el momento de inercia baricéntrico.

## 5 MÉTODO DE SOLUCIÓN: MEC

Las secuencias utilizadas en el MEC (Método del Elemento Completo) para ser introducidas en el funcional energético, son extensiones de las Series trigonométricas. A continuación se presentan algunas definiciones y también la forma de generar la secuencia.

### 5.1 Series trigonométricas de Fourier en una dimensión

En la serie de Fourier se adoptan los conjuntos ortogonales dados por:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \text{sen } i\pi x \\ 0 \\ \text{cos } i\pi x \end{cases} \quad (4)$$

que son conjuntos completos en  $L_2$  en  $x \in [0,1]$ . Si introducimos la denominación  $\alpha_i = i\pi$  y  $s_i = \text{sen}(i\pi x) = \text{sen}(\alpha_i x)$   $c_i = \text{cos}(i\pi x) = \text{cos}(\alpha_i x)$ , entonces, para una función  $F(x)$  que sea cuadrado integrable en  $x \in [0,1]$

$$S_M^*(x) = \sum_{i=1}^M A_i s_i \quad \text{y} \quad C_M^*(x) = \sum_{i=1}^M B_i c_i + B_0 \quad (5a,b)$$

Donde  $A_i = 2(F, s_i)$ ;  $B_i = 2(F, c_i)$ ;  $B_0 = (F, 1)$ ;  $(i = 1, 2, \dots, M)$

Las expresiones (5a,b) son los dos tipos de series de Fourier, con dominio  $[0,1]$ , en las que puede expandirse  $F(x)$ , pero  $C_M^*(x)$  es de convergencia uniforme.

## 5.2 Series trigonométricas ampliadas en una dimensión

La propiedad especial de  $C_M^*(x)$  citada anteriormente sugiere tratar de encontrar una serie de senos que de C.U para funciones continuas. Esta serie se obtiene por medio de un corrimiento de la referencia de  $F(x)$ . Entonces, la función  $F(x)$ , que en general verifica que  $F(0) \neq 0$  y  $F(1) \neq 0$  puede ser redefinida como sigue;

$$F(x) = F^*(x) + A_0 x + a_0 \quad (6)$$

donde

$$a_0 = F(0); \quad A_0 = F(1) - F(0) \quad (7)$$

la (6) se puede expresar como

$$F^*(x) = F(x) - A_0 x - a_0 \quad (8)$$

Ahora, la (8), además de ser continua cumple con las condiciones  $F^*(0) = F^*(1) = 0$ , y por ello su serie de Fourier dada por la expresión (5a) da convergencia uniforme con coeficientes obtenidos mediante la expresión

$$A_i = 2(F^*, s_i) = 2\{[F(x) - xA_0 - a_0], s_i\} \quad (9)$$

Por lo tanto, se puede definir la serie  $S_M(x)$  por medio de

$$S_M(x) = S_M^*(x) + xA_0 + a_0 \quad (10)$$

que es uniformemente convergente.

En (10) se denomina *función soporte* al término  $x A_0 + a_0$ .

Entonces, teniendo en cuenta la (5a,b)

$$S_M(x) = \sum_{i=1}^M A_i s_i + x A_0 + a_0 \quad (11a,b)$$

$$C_M(x) \equiv C_M^*(x)$$

Una vez determinada la secuencia a ser utilizada, ya sea una serie de senos o de cosenos, se le imponen las condiciones geométricas de borde. Cuando la secuencia no satisfaga idénticamente alguna condición se introducen multiplicadores de Lagrange (uno por cada condición no satisfecha), lo que dará origen al denominado funcional extendido. Posteriormente, se introducen las secuencias, y los multiplicadores si los hubiera, en el funcional y se impone la anulación de su primera variación con respecto a las incógnitas del problema: los coeficientes de la secuencia y los multiplicadores de Lagrange. Al factorizar por las variaciones de las incógnitas, se obtienen las expresiones que formarán un sistema de ecuaciones homogéneo de cuya solución se obtienen los parámetros de frecuencia buscados.

## 6 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES DE ARCOS GRUESOS POR MEDIO DEL MEC

A continuación se aplicará la metodología del MEC al problema de vibraciones naturales de dos arcos gruesos, a saber: arco doblemente empotrado en sus extremos y arco doblemente articulado en sus extremos, con la articulación aplicada en el eje neutro.

### 6.1 Arco doblemente empotrado

Las secuencias que se proponen para ser introducidas en el funcional variado son las siguientes:

$$u = \sum_{i=1}^M A_i \operatorname{sen} \beta_i \alpha + A_0 \alpha + B \quad (12)$$

$$w = - \sum_{i=1}^M \frac{B_i \cos \beta_i \alpha}{\beta_i} + B_0 \quad (13)$$

$$R\theta = \sum_{i=1}^M D_i \cos \beta_i \alpha + D_0 \quad (14)$$

Las condiciones de borde que deben ser cumplidas por las secuencias son:

En  $\alpha = 0$  
$$\begin{cases} u(\alpha) = 0 \\ w(\alpha) = 0 \\ R\theta(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Por lo tanto

$$u(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (16)$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow -\sum_{i=1}^M \frac{B_i}{\beta_i} + B_0 = 0 \quad (17)$$

$$R\theta(0) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^M D_i + D_0 = 0 \quad (18)$$

y en

$$\alpha = 1 \begin{cases} u(\alpha) = 0 \\ w(\alpha) = 0 \\ R\theta(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Por lo tanto

$$u(1) = 0 \Rightarrow A_0 = 0 \quad (20)$$

$$w(1) = 0 \Rightarrow -\sum_{i=1}^M \frac{B_i(-1)^i}{\beta_i} + B_0 = 0 \quad (21)$$

$$R\theta(1) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^M D_i(-1)^i + D_0 = 0 \quad (22)$$

De las cuatro condiciones de borde no satisfechas idénticamente por las secuencias, surgen los cuatro multiplicadores de Lagrange que agregados a (3) darán origen al funcional extendido.



$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}(\alpha) = & \Omega^2 \left( \int_{\alpha} [(u)^2 + (w)^2] d\alpha - 2q \int_{\alpha} [(R\theta)w] d\alpha + k^2 \int_{\alpha} [(R\theta)^2] d\alpha \right) - \\
 & - \int_{\alpha} \frac{(R\theta')^2}{\alpha_0^2} d\alpha - \frac{1}{k_{\varepsilon}^2} \int_{\alpha} \left[ \frac{w'}{\alpha_0} - u \right]^2 d\alpha - \frac{1}{k_{\phi}^2} \int_{\alpha} \left[ \left( R\theta + w + \frac{u'}{\alpha_0} \right)^2 \right] d\alpha - \\
 & - \mu \left( - \sum_{i=1}^M \frac{B_i}{\beta_i} + B_0 \right) - \psi \left( \sum_{i=1}^M D_i + D_0 \right) - \\
 & - \rho \left( - \sum_{i=1}^M \frac{B_i (-1)^i}{\beta_i} + B_0 \right) - \eta \left( \sum_{i=1}^M D_i (-1)^i + D_0 \right) = 0
 \end{aligned} \tag{23}$$

donde  $\mu, \psi, \rho$  y  $\eta$  son los multiplicadores de Lagrange.

Con el fin de arribar a las ecuaciones que nos permitan calcular  $\Omega$ , impondremos la nulidad de la primera variación del funcional. Efectuando las integrales y factorizando por las variaciones de las incógnitas  $\delta A_i, \delta B_0, \delta B_i, \delta D_0, \delta D_i, \delta \mu, \delta \psi, \delta \rho$  y  $\delta \eta$  se obtiene el sistema de ecuaciones homogéneo a partir del cual se determina  $\Omega$ . Posteriormente, en base a cada autovalor se pueden calcular las incógnitas y definir las expresiones de  $u(\alpha), w(\alpha)$  y  $R\theta(\alpha)$ , lo que nos permite determinar la forma modal correspondiente a cada frecuencia.

## 6.2 Arco doblemente articulado

Las secuencias utilizadas son las mismas que en el caso anterior, y las condiciones de borde son las siguientes:

$$\text{En } \alpha = 0 \begin{cases} u(\alpha) = 0 \\ w(\alpha) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

Por lo tanto

$$u(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \tag{25}$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow - \sum_{i=1}^M \frac{B_i}{\beta_i} + B_0 = 0 \tag{26}$$

Tal como se expresó en el apartado 2, las condiciones a cumplir son las esenciales. Es decir, aquellas que involucran derivadas de orden menor o igual que  $(k-1)$  si el problema está gobernado por una ecuación diferencial de orden  $2k$ . En nuestro caso se cumple que  $2k = 2 \Rightarrow k = 1$ . O sea que las condiciones esenciales involucran derivadas de orden cero, que son los desplazamientos. Es por ello que las únicas condiciones de borde son las (24) y no se le imponen condiciones a  $\theta'$ .

$$\text{En } \alpha = 1 \begin{cases} u(\alpha) = 0 \\ w(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Por lo tanto

$$u(1) = \sum_{i=1}^M A_i \text{sen } \beta_i \alpha + A_0 \alpha = 0 \Rightarrow A_0 = 0 \quad (28)$$

$$w(1) = -\sum_{i=1}^M \frac{B_i \cos \beta_i \alpha}{\beta_i} + B_0 = 0 \Rightarrow -\sum_{i=1}^M \frac{B_i (-1)^i}{\beta_i} + B_0 = 0 \quad (29)$$

De las dos condiciones de borde no satisfechas idénticamente por las secuencias, surgen los dos multiplicadores de Lagrange que introducidos en (3) darán origen al funcional extendido.

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\alpha) = & \Omega^2 \left( \int_{\alpha} [(u)^2 + (w)^2] d\alpha - 2q \int_{\alpha} [(R\theta)w] d\alpha + k^2 \int_{\alpha} [(R\theta)^2] d\alpha \right) - \\ & - \int_{\alpha} \frac{(R\theta')^2}{\alpha_0^2} d\alpha - \frac{1}{k_{\varepsilon}^2} \int_{\alpha} \left[ \frac{w'}{\alpha_0} - u \right]^2 d\alpha - \frac{1}{k_{\phi}^2} \int_{\alpha} \left[ \left( R\theta + w + \frac{u'}{\alpha_0} \right)^2 \right] d\alpha \quad (30) \\ & - \mu \left( -\sum_{i=1}^M \frac{B_i}{\beta_i} + B_0 \right) - \psi \left( -\sum_{i=1}^M \frac{B_i (-1)^i}{\beta_i} + B_0 \right) = 0 \end{aligned}$$

donde  $\mu$  y  $\psi$  son los multiplicadores de Lagrange. Con el fin de arribar a las ecuaciones que nos permitan calcular  $\Omega$ , impondremos la nulidad de la primera variación del funcional.

Nuevamente, efectuando las integrales y factorando por las variaciones de las incógnitas  $\delta A_i, \delta B_0, \delta B_i, \delta D_0, \delta D_i, \delta \mu$  y  $\delta \psi$  se obtiene el sistema de ecuaciones homogéneo a partir del cual se determina  $\Omega$ .

## 7 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Para los casos descritos previamente se estudiarán dos aberturas:  $\alpha_0 = 90$  y  $\alpha_0 = 180$  y dos relaciones  $h/R_G : 1,5$  y  $1$ , siendo  $h = r_e - r_i$  la altura de la sección transversal.

### 7.1 Arco doblemente empotrado

A continuación se incluyen los parámetros de frecuencia correspondientes a los distintos casos considerados. El número de términos de la sumatoria ( $M$ ) es 600 para todos los casos. Los resultados se comparan con los obtenidos en (Filipich <sup>7</sup>), mediante la resolución por

series algebraicas (Filipich et al <sup>19</sup>) y elementos finitos usando elementos 2D.

Tabla 1: Parámetros de frecuencia para  $h/R_G = 1,5$  y  $\alpha_0 = 90^\circ$

	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
MEC	2.3330	2.4974	3.7028	4.6680	5.9747	6.9427
FILIPICH [7]		2.5031	3.7712			
ALGOR 2D (20x50)	2.140	2.2638	3.0107	3.835	4.392	4.6919
SERIES ALGEBRAICAS [19]	2.3316		3.7027	4.6650	5.9745	6.9385

Tabla 2: Parámetros de frecuencia para  $h/R_G = 1,5$  y  $\alpha_0 = 180^\circ$

	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
MEC	0.9816	1.5691	1.8958	2.3810	2.8451	3.3932
FILIPICH [7]		1.0502			2.8789	
ALGOR 2D (30x50)	0.9341	1.5312	1.859	2.1608		
SERIES ALGEBRAICAS [19]	0.9812	1.5685	1.8952	2.3801	2.8443	3.3922

Tabla 3: Parámetros de frecuencia para  $h/R_G = 1$  y  $\alpha_0 = 90^\circ$

	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
MEC	4.1901	4.8213	6.3551	9.6686	10.1342	11.7112
FILIPICH [7]	4.1809	4.7028	6.3732			11.7548
ALGOR 2D (20x20)	4.2974	4.6569	6.3541	9.5881	10.1841	11.017
SERIES ALGEBRAICAS [19]	4.1886	4.8188	6.3543	9.6648	10.1316	11.7067

Tabla 4: Parámetros de frecuencia para  $h/R_G = 1$  y  $\alpha_0 = 180^\circ$

	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
MEC	1.7613	2.5932	3.6556	4.3719	5.4244	6.0200
FILIPICH [7]	1.8498				5.3242	
ALGOR 2D (40x60)	1.7688	2.6608	3.6897	4.366	5.3212	5.777
SERIES ALGEBRAICAS [19]	1.7604	2.5922	3.6538	4.3709	5.4214	6.0199

## 7.2 Arco doblemente articulado

A continuación se incluyen los parámetros de frecuencia correspondientes a los distintos arcos estudiados. El número de términos de la sumatoria ( $M$ ) es 600 para todos los casos. Los resultados se comparan con los obtenidos en (Filipich <sup>7</sup>) mediante la resolución por series algebraicas (Filipich y Rosales <sup>19</sup>).

Tabla 5: Parámetros de frecuencia para  $h/R_G = 1,5$  y  $\alpha_0 = 90^\circ$

	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
MEC	1.2073	2.2649	3.0063	3.5785	4.6560	5.9320
FILIPICH [7]						5.9490
SERIES ALGEBRAICAS [19]	1.2071	2.2647	3.0055	3.5785	4.6560	5.9320

Tabla 6: Parámetros de frecuencia para  $h/R_G = 1,5$  y  $\alpha_0 = 180^\circ$

	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
MEC	0.6266	1.5691	1.8435	2.5622	2.8005	3.5766
FILIPICH [7]	0.5420				2.8383	
SERIES ALGEBRAICAS [19]	0.6265		1.8430	2.5622	2.8000	3.5766

Tabla 7: Parámetros de frecuencia para  $h/R_G = 1$  y  $\alpha_0 = 90^\circ$

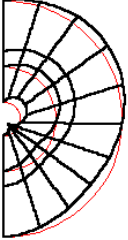
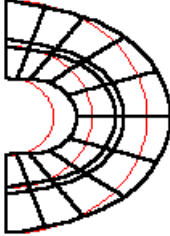
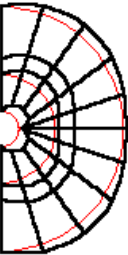
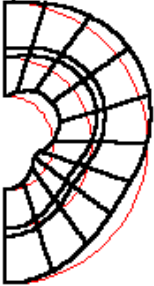
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
MEC	6.2310	7.0778	8.8800	9.9895	12.5919	17.2646
FILIPICH [7]	6.2890	7.0299				14.0840
SERIES ALGEBRAICAS [19]	6.2308	7.0759	8.8792	9.9893	12.5877	17.2640

Tabla 8: Parámetros de frecuencia para  $h/R_G = 1$  y  $\alpha_0 = 180^\circ$

	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
MEC	1.2284	2.5877	5.1467	5.6652	6.3633	7.7551
FILIPICH [7]	1.2931		5.1122			
SERIES ALGEBRAICAS [19]	1.2283	2.5868	5.1442	5.6650	6.3625	7.7550

### 8 FORMAS MODALES

A continuación se presentan algunas formas modales correspondientes a uno de los casos estudiados, arco doblemente empotrado, para 2 relaciones  $h/R_G$ : 1,5 y 1 y abertura  $\alpha_0 = 180^\circ$ .

$h/R_G = 1.5$	$h/R_G = 1$
$\Omega_3 = 1.8958$	$\Omega_2 = 2.5932$
	
$\Omega_4 = 2.3810$	$\Omega_3 = 3.6556$
	

### 9 CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados se deduce que el MEC es un método excelente para la determinación de frecuencias, aunque presenta limitaciones, representadas por el número necesario de términos para obtener valores aceptables, que se intensifican a medida que el arco tiene menos vinculaciones, se hace más delgado y tiene mayor amplitud. Cabe acotar que a

medida que la relación  $h/R_G$  aumenta la hipótesis de mantenimiento de secciones planas conduce a una mayor discrepancia cuando se compara con un modelo más aproximado como puede ser el 2D. Sin embargo, este desacuerdo no es inherente al MEC sino a la hipótesis con la cual se deduce el funcional y las ecuaciones diferenciales correspondientes.

En lo que respecta a las ventajas de la metodología utilizada pueden citarse:

- a) la generalidad y sistematicidad del planteo.
- b) que los fundamentos teóricos aseguran la convergencia de los resultados.
- c) la precisión arbitraria de los resultados a los dígitos deseados se logra aumentando el número de términos y efectuando una tabla de convergencia.

Por último, puede agregarse que con este método se aporta una herramienta alternativa para el estudio de casos que resultan dificultosos con otros métodos variacionales

## 10 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por subsidios del CONICET y de la SGCyT de la UNS.

## 11 REFERENCIAS

- [1] MIKHLIN, S. Variational methods in mathematical physics. Pergamon Press. 1963
- [2] REKTORYS, K. :Variational Methods in Mathematical Sciences and Engineering. D. Reidel Publ. Co. 1971.
- [3] REDDY, J.: Applied functional analysis and variational methods in engineering. Krieger Publishing company.1991
- [4] DAVIS, R., HENSHEL, R., WARBURTON, G.: Constant curvature beam finite elements for in-plane vibration. Journal of Sound and Vibration, 25(4), 561-575. (1972).
- [5] ROMANELLI E. :Barra curva plana con estado general de sollicitacion, Presentado en el congreso de la Asociacion de Ingenieros estructurales, 1983
- [6] ROSSI, RAUL.: In-plane vibrations of circular rings of non-uniform cross-section with account taken of shear and rotatory inertia effects. J. of S. and Vib. 135(3). 443,452. 1989.
- [7] FILIPICH, C.P.: Vibraciones libres en su plano de arcos y anillos circunferenciales con diversas complejidades Tesis Doctoral, Univ. Nac. de Córdoba.1991
- [8] FILIPICH, C.P., ROSALES M.B.: Beams and arcs: exact frequencies via a generalized solution. Journal of Sound and Vibration, Volume 170, No. 2, pp. 263-269. (1994)

- [9] FILIPICH, C., ROSALES, M.: An alternative approach for the exact solution of the forced vibrations of beams. *Applied Mechanics Review*, 48, N.11, p.2, S96-S101, 1995.
- [10] FILIPICH, C.P., ROSALES, M.B., CORTINEZ, V.H.: A generalized solution for exact frequencies of a Timoshenko beam. *Latin American Applied Research*, Volume 26, No. 1, pp. 71-77, (1996).
- [11] BELLÉS, P.: Matriz de rigidez de un elemento recto con carga de punta. Solución no clásica. Tesis de Magister. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1997
- [12] FILIPICH, C.P., ROSALES, M.B.: A variational solution for an initial conditions problem. *Applied Mechanics Review*, 50(11), P2, S50-S55. 1997
- [13] FILIPICH, C., ROSALES, M., BELLÉS, P.: Natural vibration of rectangular plates considered as tridimensional solids. *Journal of Sound and Vibration*, 212, 599-610, (1998),
- [14] ROSALES, M., FILIPICH, C., MAURIZI, M.: Arbitrary precision frequencies of an elliptic arc via a variational method. 20mo Congreso Latinoamericano de Métodos Computacionales en Ingeniería, XX CILAMCE, CD-rom, 12 pag. San Pablo, Brasil, 1999
- [15] ROSALES, M., FILIPICH, C.: Vibraciones de membranas de forma arbitraria a través de una solución generalizada, *Proceedings of the XI Congress on Numerical Methods and their Applications*, ENIEF 2000, Bariloche, Argentina, 2000.
- [16] ESCALANTE, MARIO: Frecuencias naturales de placas rectangulares delgadas con apoyos no convencionales utilizando una solución generalizada. Tesis de Magister. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 2001
- [17] ROSALES, M., FILIPICH, C.: Time integration of non-linear dynamic equations by means of a direct variational method. *Journal of Sound and Vibration*. 254(4), 751-757. (2002).
- [18] MENECOZZI, H.: Estudio de las vibraciones naturales de arcos gruesos circunferenciales a través de un método variacional no clásico. Tesis de Magister. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. (en elaboración).(2003)
- [19] FILIPICH, C.P., ROSALES, M.B., BUEZAS, F: Some non-linear mechanical problems solved with an analytical solution. Enviada al *Latin American Applied Research*, (en prensa). (2003).