

SINCRONIZACIÓN DE DOS ATRACTORES DE LORENZ MEDIANTE EL USO DE SERIES DE POTENCIAS

Carlos P. Filipich^{1,4}, Mario R. Escalante^{1,5} y Marta B. Rosales^{1,2,3}

¹Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur

Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3200
e-mail: mrosales@criba.edu.ar, web page: <http://www.uns.edu.ar/>

² IMA, Universidad Nacional del Sur. –

³ CONICET

⁴ Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos

Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
11 de abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-0291-4555220 FAX: 0291 4555311

⁵Facultad Regional Concepción del Uruguay, Universidad Tecnológica Nacional
Ing. Carlos Pereyra 676, E3264BTD Concepción del Uruguay, Argentina. Tel: 54-(03442)-425541
e-mail: escalam@frcu.utn.edu.ar

Palabras clave: Caos, Solución analítica, Series de potencias, sincronización de Lorenz,

Resumen: *Partiendo de la idea muy conocida de enviar un mensaje secreto que no pueda ser de-codificado con facilidad, en este trabajo se aborda el problema resolviendo dos atractores de Lorenz por medio de las series de Potencias.*

Se trata de sumar una señal que pretende ocultarse, a una respuesta caótica de un primer sistema de Lorenz. Alimentando con esta señal caótica perturbada un segundo atractor de Lorenz el Teorema de Cuomo garantiza la sincronización de ambos sistemas. Para recuperar la señal filtramos la salida del segundo atractor restando un Lorenz de otro.

Admitir soluciones (o respuestas) analíticas permite el desarrollo de las variables del problema en series de potencias del tiempo. Se sistematizan los productos de Cauchy para superar las no-linealidades dando lugar a simples algoritmos de recurrencias que efectivamente conducen a la recuperación de la señal secreta.

Las gráficas en las que se observa el comportamiento de ambos sistemas así como también la comparación de la señal original con la filtrada complementan este trabajo.

1 INTRODUCCIÓN

El estudio de los sistemas caóticos es un tema de gran interés actual para muchos científicos e ingenieros. Un sistema que exhiba caos puede ser muy importante e incluso útil, pero también peligroso en muchos casos. Históricamente, las oscilaciones caóticas han sido un efecto a evitar en el diseño de cualquier tipo de dispositivo. Sin embargo, desde que las computadoras han hecho posible simular numéricamente estos sistemas, se viene observando que el comportamiento caótico es una propiedad muy extendida en la Naturaleza.

Los sistemas caóticos son deterministas (y en este sentido, clásicos) ya que se conoce tan precisamente como se quiera la secuencia que les da origen, es decir, la ley que rige su evolución. Sin embargo son impredecibles dada su dependencia sensible de las condiciones iniciales.

En este trabajo se muestra una aplicación de las series de potencias al problema de sincronización de dos atractores de Lorenz¹ en el rango de caos y su utilización en codificación y decodificación de una señal.

La sincronización se produce cuando un sistema caótico inyector se acopla a un sistema caótico receptor, y como resultado de este proceso el sistema receptor comienza a oscilar de igual modo que el sistema inyector. El estudio de esta sincronización es muy importante a la hora de poder enmascarar información y su posible recuperación.

2 LAS ECUACIONES DE LORENZ

En la mayoría de casos, la sincronización del caos es considerada como un régimen en el cual dos sistemas caóticos exhiben oscilaciones caóticas idénticas después de que se hubiera introducido algún tipo de acoplamiento entre ellos. La idea de que dos comportamientos imprevisibles se fundan en una única conducta resulta sorprendente. En 1990 Thomas L. Carrol y Louis M. Pecora² demostraron que ciertos sistemas caóticos poseen la propiedad de sincronización por sí solos. En el sistema de ecuaciones de Lorenz,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \dot{u} = s(v - u) \\ \frac{dv}{dt} = \dot{v} = ru - v - uw \\ \frac{dw}{dt} = \dot{w} = u - bw \end{cases} \quad (1)$$

la capacidad de sincronización es robusta³. Esta capacidad de sincronización y el comportamiento impredecible, lleva a pensar en un interés potencial en aplicaciones de comunicaciones seguras.

3 ENMASCARAMIENTO DE UNA SEÑAL MEDIANTE CAOS

Consideremos la técnica denominada Chaos Masking (CM), que está basada en utilizar una señal caótica como enmascarante de una señal de información $m(t)$, y transmitir por el canal la suma de

estas dos señales. En recepción la máscara se puede eliminar gracias a la sincronización, es decir, se puede utilizar la señal recibida, que es la suma de la señal caótica enmascarante y la información, para regenerar la señal enmascarante en el receptor y restando a la señal recibida y la señal regenerada obtenemos de nuevo el mensaje.

Consideremos el esquema dado en la Figura 1.

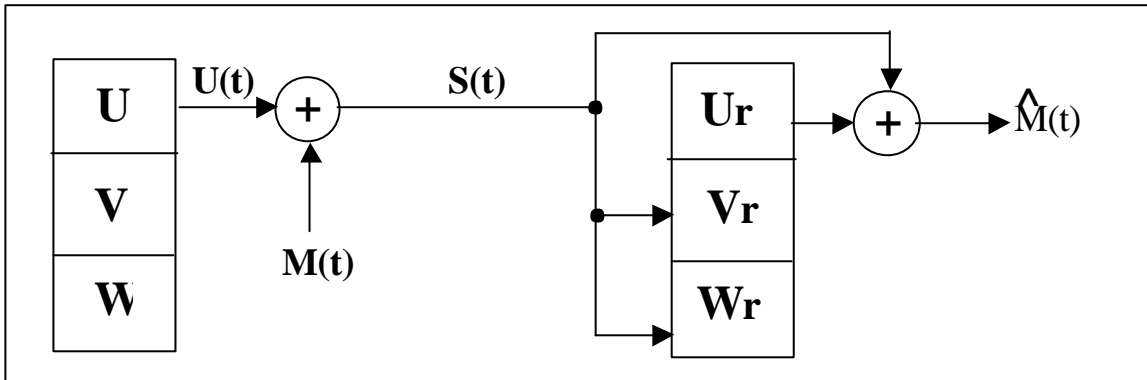


Figura 1: Esquema del sistema de transmisión de la señal codificada y decodificación.

Sea $S(t) = u(t) + m(t)$ la señal transmitida, donde $u(t)$ es la señal caótica que enmascara una cierta señal de información $m(t)$. Se transmite $s(t)$ por el canal hasta el receptor, y si este se sincroniza, genera una señal $u_r(t)$ que sería muy parecida a $u(t)$ si $m(t)$ es pequeña. Entonces

$$\hat{m}(t) = s(t) - u_r(t) = u(t) + m(t) - u_r(t) \approx m(t)$$

O sea,

$$m(t) \cong \hat{m}(t)$$

y por lo tanto se ha podido recuperar el mensaje.

No cualquier tipo de señal $m(t)$ es válida para esta aplicación, sino que tiene que cumplir dos requisitos fundamentales: que el ancho de banda de $m(t)$ sea mucho más estrecho que el ancho de banda de la señal caótica, y que la amplitud de la señal $m(t)$ sea mucho menor que la amplitud de la señal caótica, para un correcto enmascaramiento de la señal.

4 EJEMPLO NUMÉRICO

Consideremos la señal caótica enmascarante mostrada en la Figura 2, correspondiente a un sistema caótico de Lorenz, con $s = 10$, $r = 20$ y $b = 8/3$. Las funciones del tiempo u , v , y w del sistema no lineal (1) son desarrolladas como series de potencias^{4,5} de acuerdo a lo expuesto en el Apéndice A, sólo que cambiando x por t . Sistematizada la propuesta especialmente en lo referente al tratamiento de las no-linealidades llegamos a una recurrencia al resolver el sistema diferencial igualando los coeficientes de cada potencia de t . Impuestas las condiciones iniciales para las tres funcio-

nes deducimos los coeficientes de las series de potencias que solucionan el problema (Ver la trayectoria de u en la Figura 2)

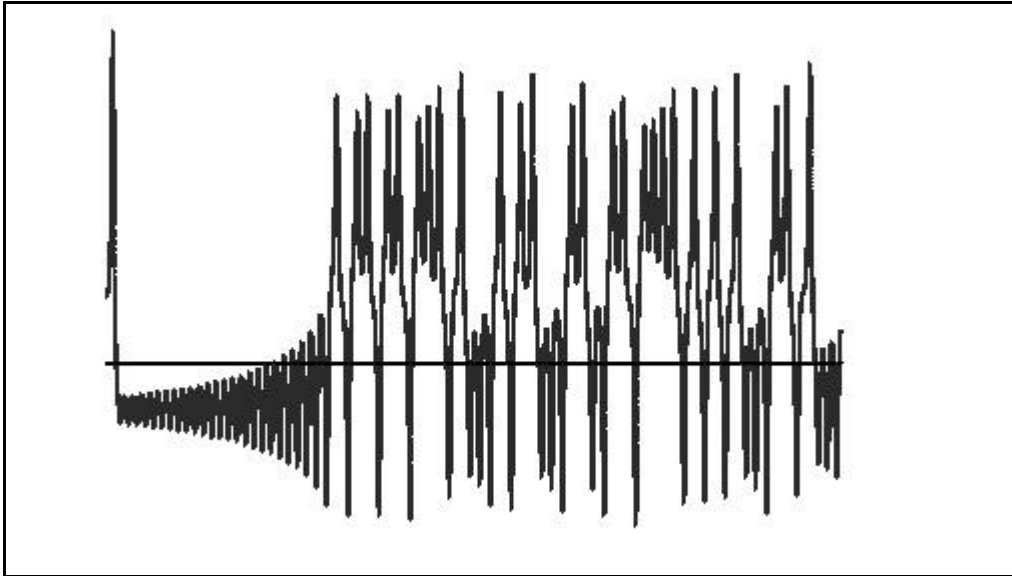


Figura 2: Señal caótica enmascarante de Lorenz u vs t

y la señal $m(t)$ que es la respuesta de un oscilador Duffing $\ddot{u}(t) + p\dot{u}(t) + qu(t)^3 = \mathbf{b} \cos(t)$, con $p = 0.5$, $q = 1$, $\mathbf{b} = 7.5$, $u(0) = 3$ y $\dot{u}(0) = 4$, respuesta no-lineal que también fue simulada por series de potencias enteras de acuerdo a lo mostrado en el apéndice. (ver figura 3).

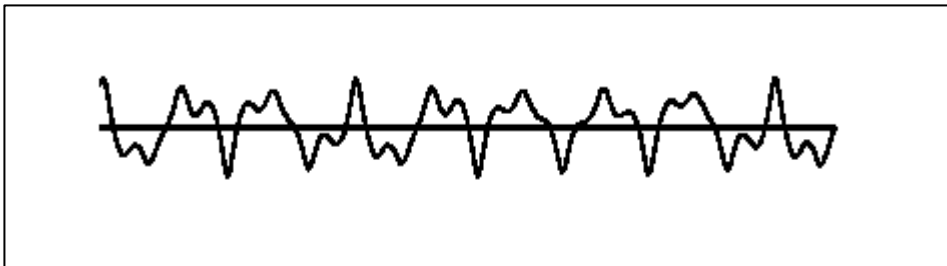


Figura 3: Señal de información de Duffing u vs t (o $m(t)$ vs t)

Al hacer la operación $s(t) = u(t) + m(t)$, la información estará bien enmascarada dentro de $s(t)$. La representación de ésta en el espacio temporal está dada por la figura 4.

Si comparamos esta señal con la señal de la Figura 2, se puede observar como la señal queda completamente enmascarada.

Una vez enmascarada la información, se envía la señal $s(t)$ a través de un canal ideal, es decir,

libre de errores y otros fenómenos que puedan perturbar la señal. Entonces la señal $s(t)$ llega al receptor, y como éste es idéntico al transmisor se genera una señal $u_r(t)$ que se sincroniza con $s(t)$.

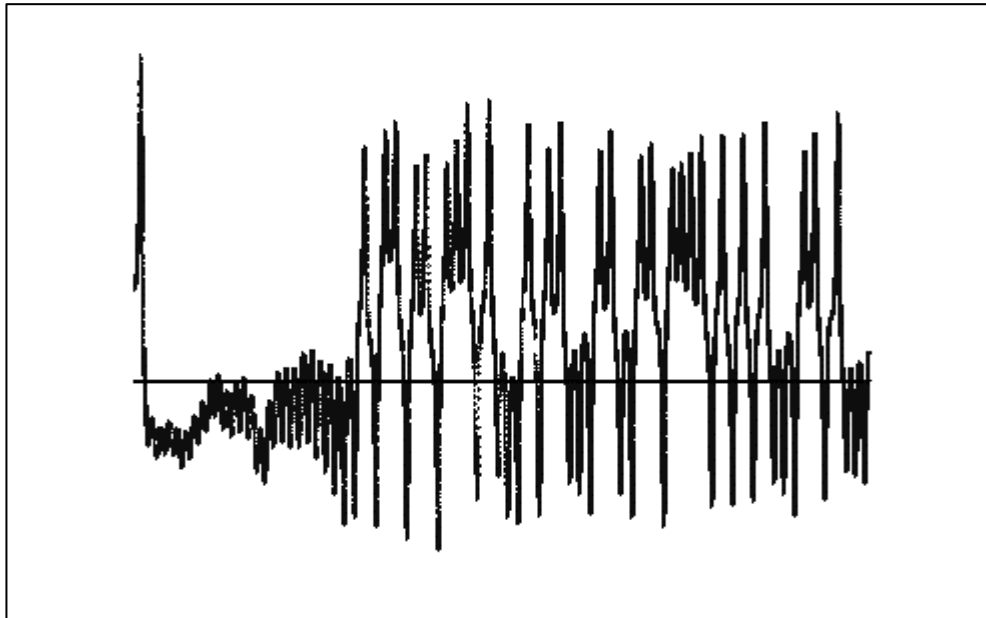


Figura 4: Señal transmitida

La señal regenerada $u_r(t)$ no es exactamente igual a $u(t)$. Se produce entonces un error de sincronización debido a que la señal $s(t)$ que ha forzado la sincronización no es una señal caótica pura, sino que es el resultado de sumar una señal caótica con otra que no lo es, por muy pequeña que esta sea.

Por lo tanto el receptor genera una señal caótica *casi igual* a $u(t)$. Este error de sincronización es el resultado de hacer la diferencia entre $u(t)$ y $u_r(t)$. Evidentemente este error de sincronización afectará la recuperación de la señal. Una vez producida la sincronización del receptor, podemos recuperar el mensaje a partir de

$$\hat{m}(t) = s(t) - u_r(t)$$

Una vez recuperada la información podemos ver la información recuperada $\hat{m}(t)$ en la Figura 5.



Figura 5: Señal recuperada

La señal recuperada no es exactamente igual a la señal original.

5 CONCLUSIONES

Se ha mostrado a través de este trabajo, una aplicación de las series de potencias o series algebraicas a la codificación y decodificación de señales mediante la a la sincronización de dos atractores de Lorenz.

Se usó como señal de información la respuesta de un oscilador de tipo Duffing , obtenida también por medio de la técnica de las series algebraicas.

La finalidad del presente trabajo consiste en destacar la versatilidad y potencialidad de un herramienta tan clásica como lo es la series de potencias. No se trata de un aporte al problema de bifurcación y caos sino tratar de conseguir con precisión y simpleza una solución analítica del problema con sólo sistematizar el abordaje de las no-linealidades (similar al caso de coeficientes variables) de acuerdo a lo mostrado escuetamente en al apéndice.

Como vimos en el presente artículo se aplica a problemas no-lineales de condiciones iniciales, pero - y en este congreso se presentan varios ejemplos - la metodología se adecua con automatismo también a problemas ordinarios de condiciones de borde.

6 REFERENCIAS

- [1] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamic and Chaos*, Ed.Addison-Wesley Pub.Co., Reading, Massachusetts, U.S.A (1994).
- [2] T. Carrol and L. Pecora, *Nonlinear Dynamic in Circuits*, World Scientific Publishing, USA (1995).
- [3] K.M. Cuomo, Alan V. Oppenheim and Steven H. Strogatz, *Robutness and signal recovery in Synchronized Chaotic Systems*, World Scientific Publishing, USA (1993).
- [4] C.P. Filipich and M.B. Rosales, "A recurrence solution of strongly non-linear systems," In *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, XXI, 141-149. Eds. A.J. Kassab, D.W. Nicholson and I. Ionescu. Rivercross Publishing, Inc. Orlando. Proceedings, 21st. Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics (SECTAM XXI), Orlando, U.S.A (2002).
- [5] C.P. Filipich, M.B Rosales and F. Buezas, "Some nonlinear mechanical problems solved with analytical solutions," enviado a *Latin Am Appl Res.* (en revision) (2002).

APÉNDICE A – SERIES DE POTENCIAS

Consideremos una función continua $f = f(x)$ con $0 \leq x \leq 1$. Escribimos la expansión en series de potencias como

$$[f] \equiv \sum_{k=0}^N a_{1k} x^k \quad (A1)$$

y para potencias m-ésimas

$$[f^m] \equiv \sum_{k=0}^N a_{mk} x^k \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (\text{A2})$$

Para cumplir con la condición de consistencia algebraica (C.A.) se debe satisfacer la siguiente relación

$$[f^m] = [f^{m-1}][f] \quad (\text{A3})$$

Después de reemplazar las series en cada factor de esta ecuación, se obtiene la siguiente expresión de recurrencia

$$a_{mk} = \sum_{p=0}^k a_{(m-1)p} a_{1(k-p)} \quad \text{o} \quad a_{mk} = \sum_{p=0}^k a_{(m-1)(k-p)} a_{1p} \quad (\text{A4})$$

Ahora expandimos una función analítica $h = \hat{h}(x) = \hat{h}(y(x)) = h(x)$ en series de Taylor

$$\hat{h}(y) = \sum_{m=0}^M \mathbf{a}_m y^m \quad (\text{A5})$$

donde \mathbf{a}_m son conocidas. En particular, indicamos

$$[1] = \sum_{k=0}^N \mathbf{d}_{0k} x^k \quad (\text{A6})$$

donde $a_{0k} = \mathbf{d}_{0k}$ y \mathbf{d}_{0k} son los deltas de Kronecker. Si sustituimos la ecuación (2) en la ecuación (5) (con $y(x) \equiv f(x)$), podemos escribir

$$[h(x)] = \sum_{k=0}^N \mathbf{j}_k x^k \quad \mathbf{j}_k = \sum_{m=0}^M \mathbf{a}_m a_{mk} \quad (\text{A7})$$

Esta expresión será usada para cualquier función analítica.

Ahora si tenemos una función racional $\hat{F}(y)$

$$\hat{F}(y) = \frac{\hat{g}(y)}{\hat{h}(y)} = \frac{g(x)}{h(x)} = F(x) \quad (\text{A8})$$

siendo $\hat{g}(y)$ y $\hat{h}(y)$ funciones analíticas y $\hat{h}(0) \neq 0$ y $\hat{g}(y) = \sum_{m=0}^M \mathbf{b}_m y^m$ y \mathbf{b}_m conocidas. Entonces se puede escribir

$$[g(x)] = \sum_{k=0}^N \mathbf{e}_k x^k \quad (\text{a}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_k = \sum_{m=0}^M \mathbf{b}_m a_{mk} \quad (\text{b}) \quad (\text{A9})$$

Si denominamos

$$[F(x)] = \sum_{k=0}^N \mathbf{I}_k x^k \quad (\text{A10})$$

Ahora la C.A. debe aplicarse

$$[F(x)][h(x)] = [g(x)] \quad (\text{A11})$$

$$\left(\sum_{k=0}^N \mathbf{l}_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^N \mathbf{j}_k x^k \right) = \sum_{k=0}^N \mathbf{e}_k x^k \quad \text{donde} \quad \mathbf{e}_k = \sum_{p=0}^k \mathbf{j}_p \mathbf{l}_{(k-p)} \quad (\text{A12})$$

Los \mathbf{l}_k son desconocidos y los conjuntos \mathbf{j}_k y \mathbf{e}_k son conocidos.

Es evidente que $\mathbf{l}_0 = \mathbf{e}_0 / \mathbf{j}_0$. Ahora la relación de recurrencia para \mathbf{l}_k es

$$\mathbf{l}_k = \frac{\mathbf{e}_k - \sum_{p=1}^k \mathbf{j}_p \mathbf{l}_{(k-p)}}{\mathbf{j}_0} \quad \text{donde} \quad \mathbf{j}_0 \neq 0 \quad \text{y} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A13})$$

Debe notarse que $\mathbf{j}_0 \neq 0$ para que $F(0)$ exista.

También las expansiones pueden efectuarse alrededor de x_0 . En nuestro caso siempre $x_0 = 0$.