

MODELO “LATERAL” PARA SIMULAR LA DISTRIBUCIÓN LATERAL DE VELOCIDADES EN CAUCES NATURALES

Juan F. Weber^{1,2} y Ángel N. Menéndez^{3,4}

¹ Departamento de Hidráulica, F.C.E.F.yN. Universidad Nacional de Córdoba – Av. Vélez Sarsfield 1601 – Ciudad Universitaria – C.P. 5000 – Córdoba, Argentina – e-mail: jweber@efn.uncor.edu

² Departamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional – Maestro Torres esq. Cruz Roja – Ciudad Universitaria – C.P. 5000 – Córdoba, Argentina

³ Laboratorio de Hidráulica – Instituto Nacional del Agua - AU Ezeiza-Cañuelas, Tramo J. Newbery Km 1,620 (1804) - Ezeiza, Pcia. Buenos Aires, Argentina – e-mail: menéndez@satlink.com

⁴ Facultad de Ingeniería, U.B.A. – Av. Paseo Colón 850 – C.P. C1063ACV –Buenos Aires

Palabras clave: hidrodinámica, distribución de velocidades, flujo en canales naturales.

Resumen. *Se presenta el modelo LATERAL, para determinar el perfil lateral de la velocidad longitudinal en cauces naturales compuestos. Se basa en el Modelo de Distribución Lateral (LDM) de Wark et. al (1990), el cual representa la variación lateral de la velocidad promediada en la vertical. El modelo de turbulencia empleado es el de la viscosidad de torbellino de Boussinesq. Para su resolución se utiliza la solución analítica de Shiono y Knight (1988). Se la aplica a cada intervalo de discretización en que se subdivide a la sección transversal, quedando parámetros libres. Se imponen condiciones de compatibilidad en el límite entre intervalos. Estas ecuaciones, más las condiciones de contorno, constituyen el sistema del cual surgen como solución los valores de los parámetros. Se muestran en detalle las condiciones de compatibilidad posibles y se analiza la secuencia de pasos del algoritmo de cálculo y la resolución del sistema de ecuaciones. El modelo numérico se valida comparando sus predicciones con mediciones de campo y laboratorio, obteniéndose un acuerdo muy satisfactorio. El modelo construido constituye una herramienta práctica en problemas de transporte de sedimentos y contaminantes, o como interpolador inteligente para determinar caudales a partir de mediciones puntuales de velocidad (“aforo”).*

1 INTRODUCCIÓN

La estimación de la distribución lateral de velocidades en cauces naturales constituye un problema de relativa complejidad en la Hidráulica a superficie libre. Los procesos de transferencia de cantidad de movimiento en la dirección horizontal perpendicular a la del flujo principal limitan la aplicación de los tradicionales métodos unidimensionales (ecuación de Manning), derivando en soluciones más complejas. Una de ellas es la que se basa en la integración de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección del flujo (ecuación de Navier – Stokes) en combinación con la ecuación de continuidad, para un flujo permanente y uniforme, asumiendo como modelo de turbulencia el de la viscosidad de torbellino o de Boussinesq, y que da lugar a la ecuación diferencial del denominado método de la distribución lateral (LDM, por sus siglas en inglés):

$$\rho g S_0 Y - \frac{f}{8} \rho V^2 \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + \frac{d}{dy} \left[\rho I \sqrt{\frac{f}{8}} Y^2 V \frac{\partial V}{\partial y} \right] = 0 \quad (1)$$

en la cual:

ρ = densidad del fluido

g = aceleración de la gravedad

S_0 = pendiente longitudinal del lecho

Y = profundidad de flujo

V = velocidad del flujo

y = coordenada horizontal medida transversal a la corriente (ver Figura 1)

s = talud lateral

f = coeficiente de fricción de Darcy

I = viscosidad adimensional de torbellino de Boussinesq.

En el desarrollo de esta ecuación se asumió que la tensión de corte turbulenta en un plano vertical paralelo a la corriente vale:

$$\tau_{yx} = \rho e_{yx} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2)$$

La ecuación (2) constituye el modelo de Boussinesq de turbulencia¹.

La ecuación diferencial ordinaria (1) puede resolverse numéricamente², o bien analíticamente³ en la hipótesis de que el fondo es horizontal o de variación lineal en la transversal.

2 SOLUCION ANALITICA

Shiono y Knight³ obtienen las siguientes soluciones analíticas de la ecuación (1):

- Para fondo plano (horizontal) ($s \rightarrow \infty$):

$$V_{(y)} = \sqrt{a_1 e^{Iy} + b_1 e^{-Iy} + \frac{8gS_0Y}{f}} \quad (3)$$

- Para fondo lineal (inclinado) ($0 < s < \infty$):

$$V_{(y)} = \sqrt{a_2 Y^{\mathcal{Y}} + b_2 Y^{-\mathcal{Y}-1} + wY} \quad (4)$$

en estas ecuaciones:

$$h = \sqrt{\frac{2}{I}} \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{1}{Y} \quad (5)$$

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{s\sqrt{1+s^2}}{I} \sqrt{8f}} - \frac{1}{2} \quad (6)$$

$$w = \frac{gS_0}{\frac{\sqrt{1+s^2}}{s} \frac{f}{8} - \frac{I}{s^2} \sqrt{\frac{f}{8}}} \quad (7)$$

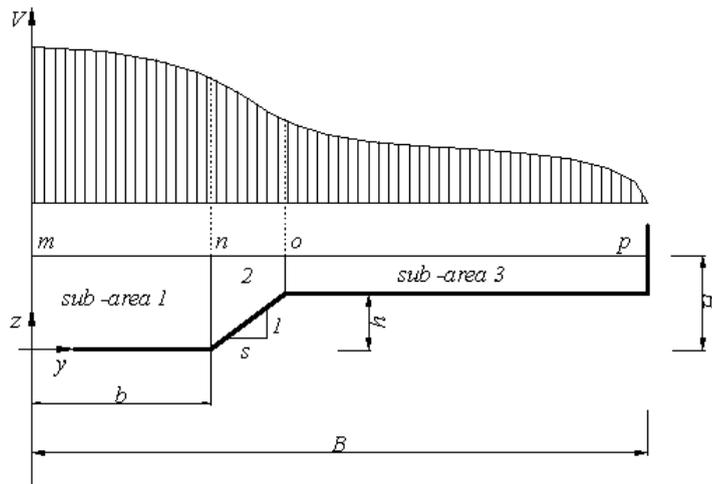


Figura 1. Sección transversal típica de un canal de sección compuesta

En las ecuaciones (3) y (4), los coeficientes a_i y b_i se obtienen al plantear las condiciones de contorno que corresponden a la de no deslizamiento en los contornos rígidos y las de continuidad de la función velocidad en cada cambio de pendiente transversal del fondo, llegando de ese modo a un sistema lineal de ecuaciones que permite calcular los valores de estos coeficientes.

A partir de la ecuación (1), o de las (3) y (4), es posible ver que para un tramo de la sección transversal determinado, el modelo analítico a utilizar tiene dos parámetros, uno que pondera la fricción con el contorno fijo (parámetro f) y otro que considera la difusión de momentum (parámetro I). En realidad, para una geometría como la representada en la Figura 1, el modelo completo de la sección posee seis parámetros, dos por cada subsección (3 valores de f y 3 valores de I).

3 CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD Y DE BORDE

La organización del sistema de ecuaciones que surgen de plantear las condiciones de contorno, para la determinación de las constantes a_i y b_i de cada tramo, parte del planteo de dichas condiciones de contorno para un tramo genérico i , como se ve en la Figura 2⁴.

Sea un tramo de una sección localizado entre los puntos i e $i+1$, de coordenadas y_i e y_{i+1} respectivamente. Dicho tramo recibirá la denominación (i) . Sea, en este tramo, un punto genérico de coordenada y , con una profundidad $Y(y)$ y una velocidad $V(y)$. La ley que describe la velocidad en este tramo, es decir a partir de la cual se obtendrá el valor de velocidad mencionado previamente, se denominará $V(i)$. Las velocidades en los puntos i e $i+1$, por pertenecer a dos tramos contiguos, deben satisfacer las ecuaciones de velocidad de cada uno de esos dos tramos. Dicho de otro modo, el valor de la función V debe ser único en los puntos nodales i e $i+1$. Además, la función V debe ser continua en los puntos mencionados, por lo cual no sólo se debe garantizar la unicidad de la velocidad, sino también de la derivada en esos puntos; es decir, la derivada de V con respecto a y debe ser la misma en los puntos i e $i+1$ ya se determine a través de la ecuación del tramo localizado a la izquierda o a la derecha del punto.

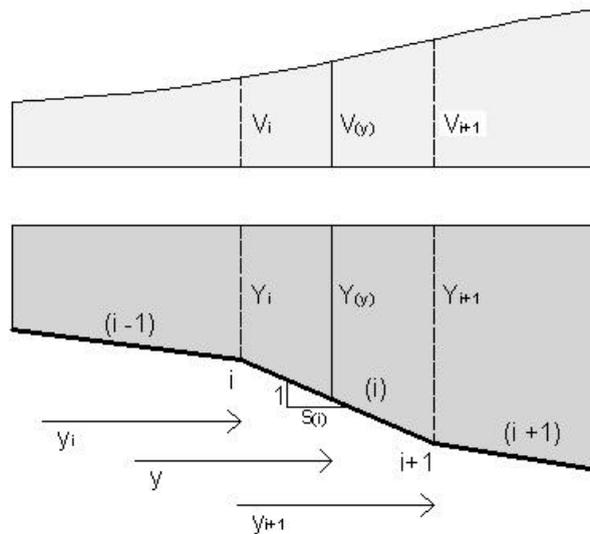


Figura 2. Nomenclatura de un tramo genérico para el algoritmo del modelo LATERAL

Si se considera ahora el punto $i+1$ de la misma Figura 2 e interpretando para el mismo las condiciones definidas en el párrafo anterior, se tiene:

$$V_{i+1}^{(i)} = V_{i+1}^{(i+1)} \Rightarrow \left(V_{i+1}^{(i)} \right)^2 = \left(V_{i+1}^{(i+1)} \right)^2 \quad (8)$$

En la cual el subíndice hace referencia al punto donde se está evaluando la función, en tanto que el superíndice hace referencia al tramo que da origen a la ecuación utilizada.

O bien, reemplazando a las velocidades por sus expresiones dada por (4):

$$Y_{i+1}^{\mathcal{Y}^{(i)}} a_2^{(i)} + Y_{i+1}^{-\mathcal{Y}^{(i)-1}} b_2^{(i)} - Y_{i+1}^{\mathcal{Y}^{(i+1)}} a_2^{(i+1)} - Y_{i+1}^{-\mathcal{Y}^{(i+1)-1}} b_2^{(i+1)} = (\mathbf{w}^{(i+1)} - \mathbf{w}^{(i)}) Y_{i+1} \quad (9)$$

Se debe realizar un análisis similar para las derivadas. En ese caso,

$$\frac{\partial V_{i+1}^{(i)}}{\partial y} = \frac{\partial V_{i+1}^{(i+1)}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial (V_{i+1}^{(i)})^2}{\partial y} = \frac{\partial (V_{i+1}^{(i+1)})^2}{\partial y} \quad (10)$$

Además, se debe tener en cuenta que Y es una función de y :

$$Y_{(y)}^{(i)} = Y_i - \frac{y - y_i}{s(i)} \quad (11)$$

Reemplazando la ecuación (11) en la (10) y derivando, se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{\mathcal{Y}^{(i)}}{s^{(i)}} Y_{i+1}^{\mathcal{Y}^{(i)-1}} a_2^{(i)} + \frac{\mathcal{Y}^{(i)} + 1}{s^{(i)}} Y_{i+1}^{-\mathcal{Y}^{(i)-2}} b_2^{(i)} + \frac{\mathcal{Y}^{(i+1)}}{s^{(i+1)}} Y_{i+1}^{\mathcal{Y}^{(i+1)-1}} a_2^{(i+1)} - \\ -\frac{\mathcal{Y}^{(i+1)} + 1}{s^{(i+1)}} Y_{i+1}^{-\mathcal{Y}^{(i+1)-2}} b_2^{(i+1)} = \frac{\mathbf{w}^{(i)}}{s^{(i)}} - \frac{\mathbf{w}^{(i+1)}}{s^{(i+1)}} \end{aligned} \quad (12)$$

Las ecuaciones (9) y (12) conforman las dos ecuaciones que corresponden al punto $i+1$. En ellas aparecen como incógnitas las constantes a y b correspondientes a cada uno de los tramos vecinos (i) e (i+1), de modo que en estas dos ecuaciones hay 4 incógnitas. Por cada punto adicional vecino que se agregue al planteo, sólo se incorporarán dos incógnitas adicionales (las constantes a y b del tramo agregado), mientras que se acoplan dos nuevas ecuaciones; se ve fácilmente, entonces que con el planteo de estas ecuaciones, se tendrá un sistema de $N-2$ ecuaciones con N incógnitas, con lo cual estarán faltando dos ecuaciones adicionales (surgidas de imponer condiciones de borde de no deslizamiento en los extremos) que se denominarán ecuaciones de borde.

Volviendo a las ecuaciones (9) y (12), e imaginando la estructura de la matriz de coeficientes principal del sistema, es posible ver que la misma debe adoptar una forma similar a la de la Figura 3, es decir se trata de una matriz tetradiagonal ordenada.

Las ecuaciones (9) y (12) han sido desarrolladas para cada uno de los cuatro casos posibles de encuentro; el presentado anteriormente se refiere al que en la Figura 4 aparece como caso (a), correspondiente al encuentro de dos fondos lineales. Existe la posibilidad de que el punto $i+1$ surja del encuentro de un fondo lineal y uno plano (caso (b)), de un fondo plano y uno lineal (caso (c)) o bien de dos fondos planos (caso(d)).

Independientemente del tipo de encuentro en cuestión, las ecuaciones (8) y (10) siguen siendo válidas para el punto de encuentro.

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & a & b & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & a & b & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & a & b & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & a & b & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & a & b & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & a & b & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & a & b & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Figura 3. Estructura de la matriz principal de coeficientes

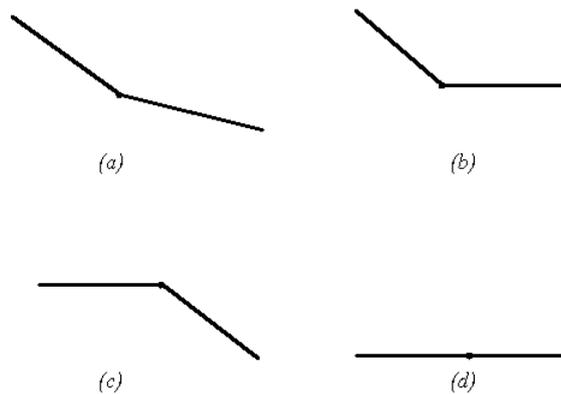


Figura 4. Tipos de encuentro entre tramos

A continuación se presentan las ecuaciones de compatibilidad correspondientes a los casos (b) (ecuaciones (13) y (14)), caso (c) (ecuaciones (15) y (16)) y caso (d) (ecuaciones (17) y (18)).

$$Y_{i+1}^{y^{(i)}} a_2^{(i)} + Y_{i+1}^{-y^{(i)}-1} b_2^{(i)} - a_1^{(i+1)} e^{h^{(i+1)}y_{i+1}} - b_1^{(i+1)} e^{-h^{(i+1)}y_{i+1}} = \frac{8gS_0 Y_{i+1}}{f^{(i+1)}} - \mathbf{w}^{(i)} Y_{i+1} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{y^{(i)}}{s^{(i)}} Y_{i+1}^{y^{(i)}-1} a_2^{(i)} + \frac{y^{(i)}+1}{s^{(i)}} Y_{i+1}^{-y^{(i)}-2} b_2^{(i)} - h^{(i+1)} e^{h^{(i+1)}y_{i+1}} a_1^{(i+1)} + \\ & + h^{(i+1)} e^{-h^{(i+1)}y_{i+1}} b_1^{(i+1)} = \frac{\mathbf{w}^{(i)}}{s^{(i)}} \end{aligned} \quad (14)$$

$$a_1^{(i)} e^{\mathbf{h}^{(i)} y_{i+1}} + b_1^{(i)} e^{-\mathbf{h}^{(i)} y_{i+1}} - a_2^{(i+1)} Y_{i+1}^{y^{(i+1)}} - b_2^{(i+1)} Y_{i+1}^{-y^{(i+1)-1}} = \mathbf{w}^{(i+1)} Y_{i+1} - \frac{8gS_0 Y_{i+1}}{f^{(i)}} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(i)} e^{\mathbf{h}^{(i)} y_{i+1}} a_1^{(i)} - \mathbf{h}^{(i)} e^{-\mathbf{h}^{(i)} y_{i+1}} b_1^{(i)} + \frac{\mathbf{y}^{(i+1)}}{s^{(i+1)}} Y_{i+1}^{y^{(i+1)-1}} a_2^{(i+1)} - \\ - \frac{\mathbf{y}^{(i+1)} + 1}{s^{(i+1)}} Y_{i+1}^{-y^{(i+1)-2}} b_2^{(i+1)} = \frac{\mathbf{w}^{(i+1)}}{s^{(i+1)}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} a_1^{(i)} e^{\mathbf{h}^{(i)} y_{i+1}} + b_1^{(i)} e^{-\mathbf{h}^{(i)} y_{i+1}} - a_1^{(i+1)} e^{\mathbf{h}^{(i+1)} y_{i+1}} - b_1^{(i+1)} e^{-\mathbf{h}^{(i+1)} y_{i+1}} = \\ = 8gS_0 Y_{i+1} \left(\frac{1}{f^{(i+1)}} - \frac{1}{f^{(i)}} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mathbf{h}^{(i)} e^{\mathbf{h}^{(i)} y_{i+1}} a_1^{(i)} - \mathbf{h}^{(i)} e^{-\mathbf{h}^{(i)} y_{i+1}} b_1^{(i)} - \mathbf{h}^{(i+1)} e^{\mathbf{h}^{(i+1)} y_{i+1}} a_1^{(i+1)} + \mathbf{h}^{(i+1)} e^{-\mathbf{h}^{(i+1)} y_{i+1}} b_1^{(i+1)} = 0 \quad (18)$$

El programa LATERAL decide en cada punto qué par de ecuaciones debe calcular y por lo tanto qué valores debe asignar a los coeficientes a y b en la matriz de la forma indicada en la Figura 4.

Las ecuaciones de borde, que en cauces naturales por lo general se dan sobre tramos lineales, se deberían escribir de la siguiente forma, para el caso del primer punto ($y = 0$):

$$V_1^{(1)} = V_{(0)} = 0 \quad (19)$$

Lo cual se verifica para todo valor de a y b , ya que para $y = 0$, $Y = 0$. Por ello, se debe plantear dicha condición de un modo levemente distinto:

$$V_{(\mathbf{d})}^{(1)} = \mathbf{d}V \quad (20)$$

donde $\mathbf{d}y$ y $\mathbf{d}V$ son valores pequeños de la variable y y V respectivamente, y que corresponden a la mínima profundidad de flujo y la mínima velocidad.

En el caso del último punto de la sección, la ecuación de borde toma una forma similar:

$$V_{(y_N - \mathbf{d})}^{(N-1)} = \mathbf{d}V \quad (21)$$

siendo N el número de puntos en la sección transversal.

Los valores de $\mathbf{d}y$ y $\mathbf{d}V$, si bien podrían aparecer como un par de parámetros adicionales del

modelo, en realidad tiene sólo efecto local, en la capa límite desarrollada en contacto con el borde rígido, sobre todo para planicies anchas; valores del orden de 0,1 m y 0,1 m/s, respectivamente, han demostrado empíricamente ser aceptables en las aplicaciones efectuadas en cauces naturales; debiéndose reducir ambos (y sobre todo el primero) en el caso de canales de laboratorio⁵.

El sistema de N ecuaciones lineales con N incógnitas, surgido de las ecuaciones (8) a (21), se puede resolver a través de la eliminación gaussiana, dada la disposición de la matriz principal de coeficientes (ver Figura 3). Este cálculo debe llevarse a cabo con alta precisión numérico, ya que el problema planteado está mal condicionado debido a que existen varios órdenes de magnitud de diferencia entre los valores de los coeficientes de la matriz (10^{10} en algunos casos).

4 ALGORITMO DEL PROGRAMA “LATERAL”

Los objetivos del programa LATERAL, para los cuales fue desarrollado, son los siguientes:

- Determinar el valor de las constantes características de cada tramo η , ψ y ω (ecuaciones (5) a (7)), a partir de los parámetros n y I dato.
- Organizar y calcular los valores de la matriz principal de coeficientes y el vector de términos independientes que surgen de plantear las condiciones de contorno, para la determinación de las constantes a_i y b_i (ecuaciones (8) a (21)).
- Resolver el sistema de ecuaciones antes mencionado, y
- Calcular las velocidades a lo largo del perfil cada un cierto D_y propuesto.

El algoritmo global del programa LATERAL se puede resumir en los siguientes pasos:

1. *Lectura del archivo de datos*: el archivo de datos del programa es un archivo de texto, que contiene los siguientes datos:
 - El número de puntos de la sección transversal y la pendiente longitudinal
 - Las coordenadas y y z de cada punto, junto con los valores de n y I correspondientes al tramo comprendido entre el punto en cuestión y el siguiente (en el caso del último punto, estos valores deben ser nulos)
 - Los valores d_y y dV , es decir la mínima profundidad de flujo y la mínima velocidad respectivamente.
 - El valor de D_y que utilizará el programa para determinar las coordenadas de los puntos donde presentará, como resultado, el valor de la velocidad.
2. *Visualización tabular y gráfica de datos geométricos*: el programa permite visualizar los datos geométricos (sección transversal) ya sea en una tabla o en un gráfico.
3. *Cálculo de los coeficientes del modelo*: permite calcular los coeficientes a_i y b_i de cada subtramo, resolviendo el sistema lineal de ecuaciones conformado por las ecuaciones de compatibilidad y las de borde.
4. *Cálculo de la distribución de velocidades*: dado un paso de cálculo D_y , calcula las velocidades promediadas en la vertical a través de las ecuaciones (3) y (4).
5. *Presentación de resultados*: el programa permite visualizar los resultados tanto en forma gráfica como tabular.

5 APLICACIÓN

Se presentan a continuación algunos resultados de la aplicación del modelo LATERAL en la predicción de la distribución lateral de velocidades, comparados con valores medidos. La Figura 5 corresponde a un caso de laboratorio, en el *Flood Channel Facility* en HR Wallingford, UK⁵. La Figura 6 corresponde a un caso de campo: el río Severn en Montford, UK⁴. Finalmente, la Figura 7 corresponde a otro caso de campo: el río Alto Paraná, Argentina, con velocidades medias en la vertical medidas para la determinación del caudal (aforo).

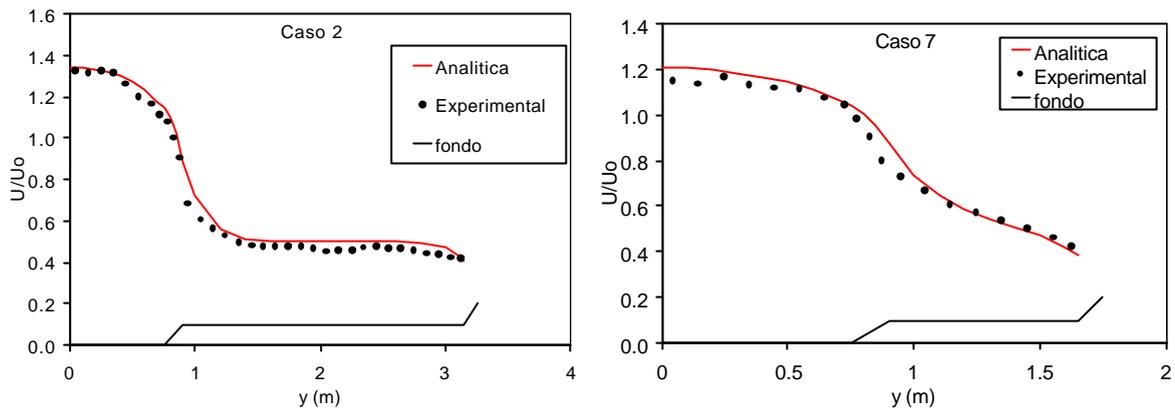


Figura 5. Perfiles de velocidad predichos por LATERAL vs datos experimentales – FCF, HR Wallingford

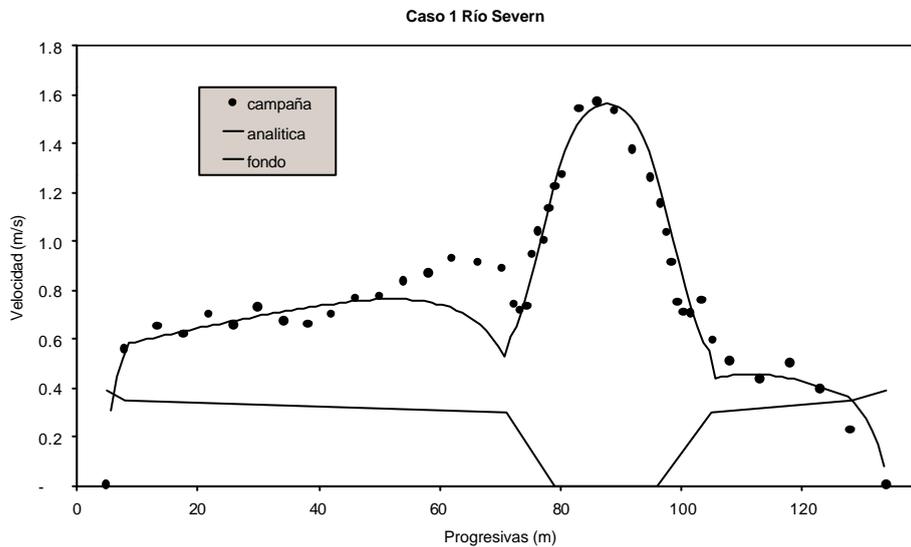


Figura 6. Perfiles de velocidad predichos por LATERAL vs datos experimentales – Río Severn, UK

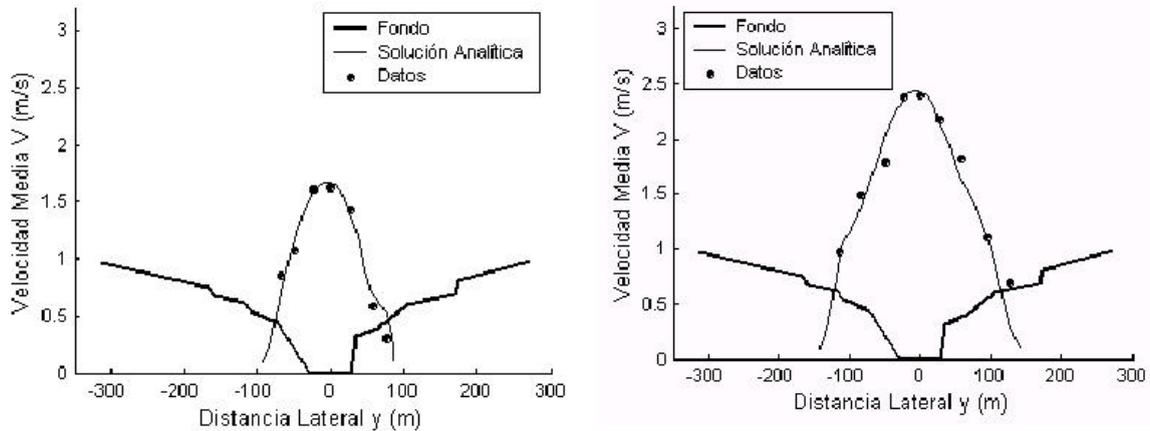


Figura 7. Perfiles de velocidad predichos por LATERAL vs datos experimentales – Alto río Paraná

Se observa que el modelo analítico/numérico logra un acuerdo satisfactorio para todos los casos y, en particular, muy bueno para el caso experimental y el del río Paraná.

6 CONCLUSIONES

La implementación de la solución analítica de Shiono & Knight en forma automática a través del programa LATERAL permite su aplicación al caso de secciones irregulares (naturales).

Esa solución puede así ser utilizada como un interpolador de base física para el completamiento del perfil lateral de velocidades, lográndose de ese modo estimaciones más precisas del caudal total que las que se obtienen por el método tradicional (interpolación lineal).

El ajuste de los parámetros del modelo analítico, que se puede lograr en forma relativamente fácil a través de la aplicación recursiva del programa LATERAL, permite su extrapolación en la aplicación de modelos más elaborados (hidrodinámicos 2D, dispersión de contaminantes, etc.).

Se debe tener en cuenta el mal condicionamiento del sistema de ecuaciones resuelto, que puede conducir a resultados con desviaciones locales importantes. Felizmente, en los pocos casos en que se producen, esas desviaciones son fácilmente detectables a simple vista, y pueden evitarse variando levemente algunos de los parámetros.

7 REFERENCIAS

- [1] M. Hanif Chaudhry, *Open-channel Flow*. Prentice Hall (1993).
- [2] J. B. Wark, P. G. Samuels and D. A. Ervine, "A practical method of estimating velocity and discharge in compound channels", *Proceedings of the International Conference on River Flood Hydraulics*, pp. 163-172, Wiley, U.K. (1990).

- [3] K. Shiono and D. W. Knight, “Two-dimensional analytical solution for a compound channel”, *Proceedings of 3rd International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, Tokyo, Japan, July (Ed. Y. Iwasa, N. Tamai y A. Wada), pp. 503-510. (1988).
- [4] J. F. Weber, *Modelación integrada uni y bidimensional de flujo en planicies de inundación*. Tesis de Maestría en Ciencias de la Ingeniería – Mención en Recursos Hídricos, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba (2003).
- [5] J. F. Weber, A. N. Menéndez y S. A. Elaskar, “Modelación numérica de la distribución del flujo a superficie libre en secciones compuestas”, *Mecánica Computacional*, **21**, 476-494, Santa Fe – Paraná, Argentina (2002).