

## ANÁLISIS DE RETICULADOS ESPACIALES DE VIGAS ANISÓTROPAS DE PAREDES DELGADAS CON MATRIZ VISCO- ELÁSTICA LINEAL

Marcelo T. Piovan<sup>†</sup> y Víctor H. Cortínez<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos  
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional  
11 de abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-0291-4555220 FAX: 0291 4555311  
e-mail: mpiovan@frbb.utn.edu.ar, web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar/gasm>

**Palabras clave:** Reticulados espaciales. Viga. Paredes Delgadas. Visco-elasticidad.

**Resumen.** *En este artículo se desarrolla una metodología para el análisis de las deformaciones progresivas en el tiempo para reticulados espaciales de vigas rectas de paredes delgadas construidas con materiales compuestos. En este análisis dependiente del tiempo, se considera un régimen de viscoelasticidad lineal. El estudio se efectúa mediante el principio de correspondencia, definido en el dominio Laplace-Carson, donde se representan las expresiones micro y macromecánicas del comportamiento viscoelástico lineal del material, para obtener posteriormente las componentes del tensor de relajación aplicables a un modelo de vigas rectas desarrollado por los autores. El problema de vigas elásticamente acopladas en un reticulado se resuelve, en el dominio Laplace-Carson, empleando el método de elementos finitos, para luego retornar al dominio temporal recurriendo a la inversión numérica de la transformación de Laplace.*

## 1 INTRODUCCIÓN

El empleo de materiales compuestos modernos, está ganando un espacio cada vez más amplio en aplicaciones de ingeniería aeroespacial, civil y mecánica. Existen diferentes modelos matemáticos de vigas de paredes delgadas tanto rectas como curvas que ofrecen la posibilidad de analizar estructuras complejas con relativa facilidad y claridad conceptual. Muchas estructuras construidas con materiales compuestos, se diseñan para resistir diferentes condiciones a lo largo de su vida útil de servicio. Entre las diferentes condiciones de servicio, la deformación inducida por efecto creep, eventualmente conduce a grandes desplazamientos que pueden provocar el colapso o la falla estructural. Bajo este contexto, la viscoelasticidad lineal ofrece a los diseñadores la posibilidad de analizar el comportamiento de materiales que presentan tasas de deformación con el tiempo y con las cargas aplicadas. Algunos investigadores <sup>[1-2]</sup> desarrollaron modelos microestructurales como forma de caracterizar un material viscoelástico genérico, los cuales muestran muy buena correspondencia con validaciones experimentales. Sin embargo se ha hecho público <sup>[3-5]</sup> que existe una limitada información referida al efecto creep en flexión y torsión de elementos estructurales tales como las vigas rectas o vigas curvas. Si bien la mayoría de las investigaciones efectuadas en esta dirección se han encuadrado en problemas clásicos de flexión de vigas o curvas simples <sup>[2-5]</sup>, aparentemente, no existen estudios sobre la influencia de los desplazamientos sostenidos en el tiempo en estructuras reticulares construidas con vigas anisótropas de secciones de paredes delgadas que poseen matriz visco-elástica lineal.

En el presente trabajo, se desarrolla una metodología para el análisis del problema en cuestión empleando el principio de correspondencia en un modelo de vigas rectas anisótropas, desarrollado previamente por los autores <sup>[4]</sup>. En esta metodología se combinan el modelo de viga recta con la micro y macro mecánica de los materiales compuestos <sup>[1-2]</sup> cuya matriz se considera en rango lineal viscoelástico, adoptando el modelo tetraparamétrico de Maxwell-Voigt o bien el modelo biparamétrico de Maxwell para la representación del creep. El análisis se efectúa en el dominio de Carson mediante un esquema de elementos finitos desarrollado ad-hoc. Luego, la solución de elementos finitos se ajusta (en puntos determinados) con un conjunto de funciones en el dominio de Carson y finalmente se utiliza un procedimiento de inversión numérica de la transformada de Carson para obtener la descripción temporal del creep. Con esta metodología se efectúan estudios paramétricos con el fin de explorar la influencia del efecto creep en diferentes configuraciones de laminación, y tipo de acoplamientos.

## 2 PRESENTACION DEL MODELO MICROMECHANICO

El comportamiento en régimen de viscoelasticidad lineal para un material compuesto que posee microestructura periódica fue evaluado tanto analítica como experimentalmente por Barbero y Luciano <sup>[1]</sup>. Debido a que muchos tipos de fibras empleadas como refuerzo en los materiales compuestos, no se ven sensiblemente afectadas por el efecto creep, las mismas se pueden considerar en rango elástico. En consecuencia el comportamiento viscoelástico de los materiales compuestos queda, bajo estas circunstancias, representado exclusivamente por el

de la matriz.

En el desarrollo del modelo micro-mecánico de la referencia [1] se efectúan una serie de hipótesis que se pueden resumir en las siguientes:

- H.1.** La matriz del material compuesto es viscoelástica lineal y las fibras son elásticas
- H.2.** El comportamiento viscoelástico de la matriz se representa mediante un modelo Maxwell-Voigt <sup>[6]</sup> de cuatro parámetros o bien uno de Maxwell de dos parámetros.
- H.3.** Los coeficientes de Poisson se consideran constantes para la matriz y las fibras.
- H.4.** Se supone que el material es transversalmente isótropo.

Las ecuaciones constitutivas para un material viscoelástico lineal, en ausencia de tensiones o deformaciones iniciales previas a la sollicitación, se pueden representar en el dominio temporal con las siguientes expresiones:

$$\varepsilon(t) = M(t) \sigma \tag{1}$$

$$\sigma(t) = L(t) \varepsilon \tag{2}$$

donde,  $M(t)$  y  $L(t)$  son funciones de “flexibilidad” y de “relajación” <sup>[6]</sup>, las cuales se obtienen a partir de ensayos de creep o bien de relajación. En efecto, un ensayo de efecto creep permite obtener la función  $M(t)$  para un nivel constante de tensión de manera que  $M(t)$  es independiente del nivel de tensión (lo cual es la condición para que un material se considere viscoelástico lineal). En cambio mediante un ensayo de relajación se obtiene la función  $L(t)$  para un nivel constante de deformación.

Ahora, recurriendo al Principio de Correspondencia (el cual consiste en establecer una analogía entre los módulos elásticos y de relajación viscoelástico de materiales heterogéneos con iguales propiedades de fase geométricas) <sup>[5]</sup>, se puede obtener una relación entre las funciones  $M(t)$  y  $L(t)$ . La ley de transformación de una función temporal genérica, en el dominio Carson se escribe como sigue

$$\widehat{G}(\widehat{s}) = \mathbf{O}_c [G(t)] = \widehat{s} \int_0^\infty e^{-\widehat{s}t} G(t) dt = \widehat{s} \widehat{G}(\widehat{s}) = \widehat{s} \mathbf{O}_L [G(t)] \tag{3}$$

siendo  $\widehat{s}$  la variable del dominio Laplace o bien del dominio Carson y  $\widehat{G}(\widehat{s})$  la transformada de Laplace de la función  $G(t)$  y siendo  $\mathbf{O}_L [G(t)]$  y  $\mathbf{O}_c [G(t)]$  los operadores de transformación al dominio Laplace y Carson, respectivamente. Nótese que la transformación al dominio Carson es ventajosa frente a la transformación al dominio de Laplace, ya que las constantes siguen permaneciendo constantes en el dominio Carson y no en el dominio Laplace.

Así pues, las expresiones (1) y (2) se pueden representar en el dominio de Carson como sigue:

$$\widehat{\varepsilon}(\widehat{s}) = \widehat{M}(\widehat{s}) \widehat{\sigma}(\widehat{s}) \tag{4}$$

$$\widehat{\sigma}(\widehat{s}) = \widehat{L}(\widehat{s}) \widehat{\varepsilon}(\widehat{s}) \tag{5}$$

a partir de (4) y (5) se puede arribar a:

$$\widehat{L}(\widehat{s})\widehat{M}(\widehat{s})=I \tag{6}$$

La (6) es una de las formas para obtener  $\widehat{L}(\widehat{s})$  en función de  $\widehat{M}(\widehat{s})$  o viceversa<sup>[3,7]</sup>.

La flexibilidad por creep de un modelo Kelvin o Maxwell-Voigt para la matriz del material compuesto puede representarse según la siguiente expresión:

$$M(t)=\frac{I}{E^e}+\frac{t}{\mu^M}+\frac{I}{E^V}\left(1-\text{Exp}\left[-\frac{tE^V}{\mu^V}\right]\right) \tag{7}$$

En (7),  $E^e$  y  $E^V$  los módulos de elasticidad que describen el creep primario y  $1/\mu^M$  es la pendiente del creep secundario, tal como se puede observar en la Figura 1. Aplicando a (7), el Principio de Correspondencia en el dominio de Carson, y teniendo en cuenta la relación (6) entre los tensores de relajación y de flexibilidad, se puede obtener la expresión (8) del módulo efectivo de relajación en el dominio Carson.

$$\widehat{E}_o = \widehat{L}(\widehat{s}) = \frac{1}{\widehat{M}(\widehat{s})} = \frac{E^e \mu^M (E^V + \mu^V s)}{E^e E^V + (E^V \mu^M + E^e (\mu^V + \mu^M))s + \mu^V \mu^V s^2} \tag{8}$$

La expresión (8) refleja muy buena concordancia con resultados experimentales en vista de los estudios efectuados por Luciano y Barbero<sup>[1,7,8]</sup>.

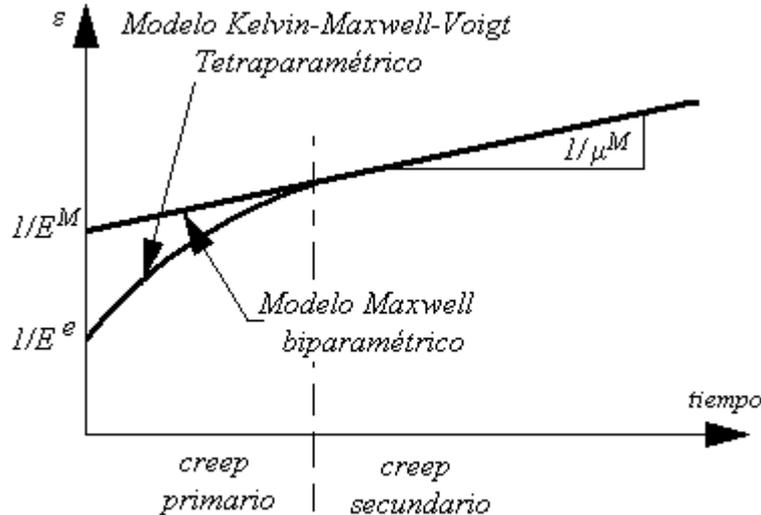


Figura 1. Representación de los patrones de creep de los modelos

Las expresiones de las constantes de Lamè en función de  $\widehat{E}_o$  para la matriz y las constantes de Lamè para las fibras elásticas (se suponen constantes a lo largo del tiempo) vienen dadas por (9) y (10) respectivamente

$$\widehat{\lambda}_o = \frac{\widehat{E}_o \nu_o}{(1+\nu_o)(1-2\nu_o)}, \quad \widehat{\mu}_o = \frac{\widehat{E}_o}{2(1+\nu_o)} \quad (9)$$

$$\lambda_1 = \frac{E_1 \nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}, \quad \mu_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} \quad (10)$$

En (9) y (10)  $\nu_o$ ,  $\nu_1$  y  $E_1$  son el coeficiente de Poisson de la matriz, el coeficiente de Poisson de las fibras y el modulo de elasticidad de las fibras, respectivamente. Los cuales, en virtud de las hipótesis **H.1** y **H.3** se consideran constantes.

Mediante la utilización de series de Fourier se puede obtener el comportamiento mecánico de un material compuesto con microestructura periódica. Diferentes procedimientos como los de Iwakuma y Nemat-Naser [3] desarrollados para considerar inclusiones conducen a la Metodología de Luciano y Barbero [7]. Esta última permite hallar los coeficientes rigidez y los módulos de elasticidad para materiales compuestos unidireccionales con fibras distribuidas en forma periódica y aleatoria. Posteriormente, recurriendo al Principio de Correspondencia, Luciano y Barbero [6] obtuvieron los tensores de relajación viscoelásticos para materiales compuestos con inclusiones periódicas. Bajo estas circunstancias si la estructura de un material compuesto es regular y periódica, es decir una matriz de resina reforzada con fibras cilíndricas de gran longitud, el tensor de relajación viscoelástico lineal de un sólido con fibras orientadas en la dirección principal, en el dominio de Carson, viene dado por las siguientes expresiones:

$$\widehat{\mathbb{L}}_{11}(s) = \widehat{\lambda}_o + 2\widehat{\mu}_o \frac{V_f}{\widehat{H}} \left[ \frac{S_3^2}{\widehat{\mu}_o^2} - \frac{2S_3S_6}{\widehat{\mu}_o^2 \widetilde{g}} - \frac{\widetilde{a}S_3}{\widehat{\mu}_o \widetilde{c}} + \frac{S_6^2 - S_7^2}{\widehat{\mu}_o^2 \widetilde{g}^2} + \frac{\widetilde{a}S_6 + \widetilde{b}S_7}{\widehat{\mu}_o \widetilde{g}\widetilde{c}} + \frac{\widetilde{a}^2 - \widetilde{b}^2}{4\widetilde{c}^2} \right] \quad (11)$$

$$\widehat{\mathbb{L}}_{12}(s) = \widehat{\lambda}_o + \frac{V_f \widetilde{b}}{\widehat{H}} \left[ \frac{S_3}{2\widehat{\mu}_o \widetilde{c}} - \frac{S_6 - S_7}{2\widehat{\mu}_o \widetilde{g}\widetilde{c}} - \frac{\widetilde{a} + \widetilde{b}}{4\widetilde{c}^2} \right] \quad (12)$$

$$\widehat{\mathbb{L}}_{23}(s) = \widehat{\lambda}_o + \frac{V_f}{\widehat{H}} \left[ \frac{\widetilde{a}S_7}{2\widehat{\mu}_o \widetilde{g}\widetilde{c}} - \frac{\widetilde{b}\widetilde{a} + \widetilde{b}^2}{4\widetilde{c}^2} \right] \quad (13)$$

$$\widehat{\mathbb{L}}_{22}(s) = \widehat{\lambda}_o + 2\widehat{\mu}_o \frac{V_f}{\widehat{H}} \left[ -\frac{\widetilde{a}S_3}{2\widehat{\mu}_o \widetilde{c}} + \frac{\widetilde{a}S_6}{2\widehat{\mu}_o \widetilde{g}\widetilde{c}} + \frac{\widetilde{a}^2 - \widetilde{b}^2}{4\widetilde{c}^2} \right] \quad (14)$$

$$\widehat{\mathbb{L}}_{44}(s) = \widehat{\mu}_o - V_f \left[ -\frac{2S_3}{\widehat{\mu}_o} + (\widehat{\mu}_o - \mu_1)^{-1} + \frac{4S_7}{\widehat{\mu}_o \widetilde{g}} \right]^{-1} \quad (15)$$

$$\widehat{\mathbb{L}}_{66}(s) = \widehat{\mu}_o - V_f \left[ -\frac{S_3}{\widehat{\mu}_o} + (\widehat{\mu}_o - \mu_1)^{-1} \right]^{-1} \quad (16)$$

En las expresiones anteriores  $V_f$  es la proporción volumétrica de fibras en el material compuesto, los coeficientes  $\check{a}, \check{b}, \check{c}, \check{g}$  y  $\check{H}$  y los factores  $S_3, S_6$  y  $S_7$  fueron obtenidos por Luciano y Barbero<sup>[7]</sup>. Estos últimos factores son ajustados mediante mínimos cuadrados en función parabólica de la proporción volumétrica de fibras.

Así pues se pueden obtener los coeficientes del tensor de relajación para un material transversalmente isótropo<sup>[7]</sup> en función de los coeficientes del tensor de relajación de un material compuesto unidireccional:

$$\begin{aligned}\widehat{C}_{11} &= \widehat{L}_{11}, \quad \widehat{C}_{12} = \widehat{L}_{12}, \quad \widehat{C}_{66} = \widehat{L}_{66}, \\ \widehat{C}_{22} &= \frac{3}{4}\widehat{L}_{22} + \frac{1}{4}\widehat{L}_{23} + \frac{1}{2}\widehat{L}_{44} \\ \widehat{C}_{23} &= \frac{1}{4}\widehat{L}_{22} + \frac{3}{4}\widehat{L}_{23} - \frac{1}{2}\widehat{L}_{44} \\ \widehat{C}_{44} &= \frac{1}{4}\widehat{L}_{22} - \frac{1}{4}\widehat{L}_{23} + \frac{1}{2}\widehat{L}_{44}\end{aligned}\tag{17}$$

De forma tal que tomando en cuenta la hipótesis de estado plano de tensiones, se puede obtener la expresión de las relaciones constitutivas para una lámina según:

$$\begin{Bmatrix} \widehat{\sigma}_{11} \\ \widehat{\sigma}_{22} \\ \widehat{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{Q}_{11}^* & \widehat{Q}_{12}^* & 0 \\ \widehat{Q}_{12}^* & \widehat{Q}_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{Q}_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{\varepsilon}_{11} \\ \widehat{\varepsilon}_{22} \\ \widehat{\gamma}_{12} \end{Bmatrix}\tag{18}$$

donde se han definido:

$$\widehat{Q}_{11}^* = \widehat{C}_{11} - \frac{\widehat{C}_{12}^2}{\widehat{C}_{22}}, \quad \widehat{Q}_{12}^* = \widehat{C}_{12} - \frac{\widehat{C}_{12}\widehat{C}_{23}}{\widehat{C}_{22}}, \quad \widehat{Q}_{22}^* = \widehat{C}_{22} - \frac{\widehat{C}_{23}^2}{\widehat{C}_{22}}, \quad \widehat{Q}_{66}^* = \widehat{C}_{66}\tag{19}$$

### 3 MODELO MACROMECAÁNICO Y METODOLOGÍA GENERAL DE ANÁLISIS

A continuación se desarrollan las expresiones constitutivas generales para relacionar los esfuerzos generalizados y las deformaciones generalizadas de viga curva, en el dominio de Carson.

Las deformaciones de placa del modelo de vigas anisótropas<sup>[4]</sup> que se muestra en la Figura 2, se pueden representar en el dominio de Carson de acuerdo a la siguientes expresiones

$$\widehat{\varepsilon}_{xx} = \left[ \widehat{\varepsilon}_{D1} - Y(s)\widehat{\varepsilon}_{D3} - Z(s)\widehat{\varepsilon}_{D2} - \widehat{\omega}_p(s, \widehat{s})\widehat{\varepsilon}_{D4} \right]\tag{20}$$

$$\widehat{\kappa}_{xx} = \left[ \frac{dZ}{ds}\widehat{\varepsilon}_{D3} - \frac{dY}{ds}\widehat{\varepsilon}_{D2} - l(s)\widehat{\varepsilon}_{D4} \right]\tag{21}$$

$$\widehat{\gamma}_{xs} = \left[ \frac{dY}{ds} \widehat{\varepsilon}_{D5} + \frac{dZ}{ds} \widehat{\varepsilon}_{D6} + [r(s) + \widehat{\psi}(s, \widehat{s})] \widehat{\varepsilon}_{D7} + \widehat{\psi}(s, \widehat{s}) \widehat{\varepsilon}_{D4} \right] \quad (22)$$

$$\widehat{\kappa}_{xs} = [-2\widehat{\varepsilon}_{D8} + \widehat{\varepsilon}_{D7}] \quad (23)$$

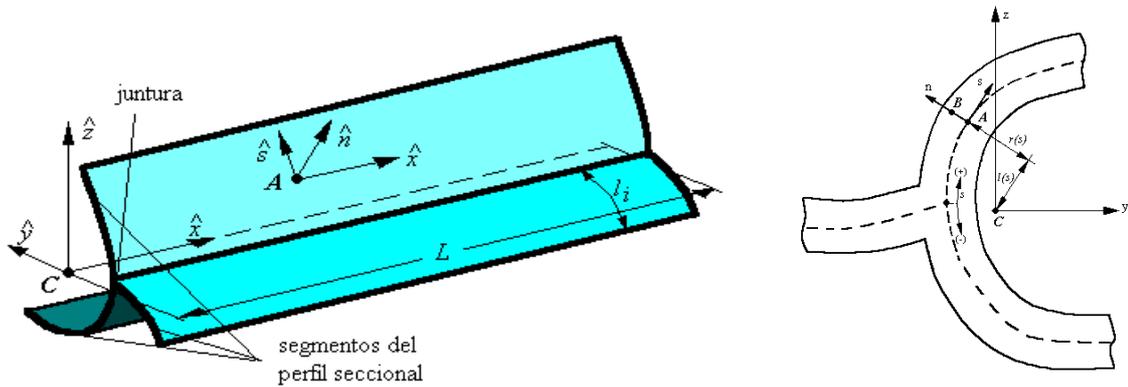


Figura 2. Descripción del modelo estructural de viga recta y su sección

Las deformaciones generalizadas  $\widehat{\varepsilon}_{D1}$ ,  $\widehat{\varepsilon}_{D2}$ ,  $\widehat{\varepsilon}_{D3}$ ,  $\widehat{\varepsilon}_{D4}$ ,  $\widehat{\varepsilon}_{D5}$ ,  $\widehat{\varepsilon}_{D6}$ ,  $\widehat{\varepsilon}_{D7}$  y  $\widehat{\varepsilon}_{D8}$  vienen descritas en función de los desplazamientos en el dominio de Carson según las siguientes expresiones<sup>[4]</sup>:

$$\widehat{\varepsilon}_{D1} = \left( \frac{\partial \widehat{u}_{xc}}{\partial x} \right), \quad \widehat{\varepsilon}_{D2} = \left( \frac{\partial \widehat{\theta}_y}{\partial x} \right), \quad \widehat{\varepsilon}_{D3} = \left( \frac{\partial \widehat{\theta}_z}{\partial x} \right), \quad \widehat{\varepsilon}_{D4} = \left( \frac{\partial \widehat{\theta}_x}{\partial x} \right) \quad (24)$$

$$\widehat{\varepsilon}_{D5} = \left( \frac{\partial \widehat{u}_{yc}}{\partial x} - \widehat{\theta}_z \right), \quad \widehat{\varepsilon}_{D6} = \left( \frac{\partial \widehat{u}_{zc}}{\partial x} - \widehat{\theta}_y \right), \quad \widehat{\varepsilon}_{D7} = \left( \frac{\partial \widehat{\phi}_x}{\partial x} - \widehat{\theta}_x \right), \quad \widehat{\varepsilon}_{D8} = \left( \frac{\partial \widehat{\phi}_x}{\partial x} \right) \quad (25)$$

En las expresiones (24)-(25)  $u_{xc}$  es el desplazamiento axial,  $\theta_z$  y  $\theta_y$  son parámetros de rotación flexionales,  $u_{yc}$  y  $u_{zc}$  son los desplazamientos transversales de la sección,  $\phi_x$  es la rotación torsional de la sección y  $\theta_x$  es una medida de la intensidad de alabeo. En las expresiones (20) a (23) las cantidades  $Y(s)$ ,  $Z(s)$ ,  $r(s)$  y  $l(s)$  son parámetros seccionales (ver Figura 2) no dependientes del tiempo, en consecuencia se transforman como constantes. Las funciones  $r(s)$  y  $l(s)$  se definen<sup>[4]</sup> como sigue:

$$r(s) = Z(s) \frac{dY}{ds} - Y(s) \frac{dZ}{ds}, \quad l(s) = Y(s) \frac{dY}{ds} + Z(s) \frac{dZ}{ds} \quad (26)$$

En tanto que las funciones  $\widehat{\omega}_p(s, \widehat{s})$  y  $\widehat{\psi}(s, \widehat{s})$  se definen de la siguiente manera:

$$\widehat{\omega}_p(s, \widehat{s}) = \int_s [r(s) - \widehat{\psi}(s, \widehat{s})] ds - \frac{\oint_s [r(s) - \widehat{\psi}(s, \widehat{s})] \widehat{A}_{11}(s) ds}{\oint_s \widehat{A}_{11}(s) ds} \quad (27)$$

$$\widehat{\psi}(s, \widehat{s}) = \frac{1}{\widehat{A}_{66}(s)} \left[ \frac{\int_s r(s) ds}{\oint_s \frac{1}{\widehat{A}_{66}(s)} ds} \right] \quad (28)$$

Téngase presente las variables  $s$  y  $\widehat{s}$  son inherentemente distintas, ya que la primera corresponde a la coordenada en la dirección perimetral en la línea media de la pared seccional, en tanto que la segunda es la variable del dominio de Carson. Las ecuaciones constitutivas de los esfuerzos en términos de las deformaciones vienen dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \widehat{Q}_X \\ \widehat{M}_Y \\ \widehat{M}_Z \\ \widehat{B} \\ \widehat{Q}_Y \\ \widehat{Q}_Z \\ \widehat{T}_W \\ \widehat{T}_{SV} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{J}_{11} & \widehat{J}_{12} & \widehat{J}_{13} & \widehat{J}_{14} & \widehat{J}_{15} & \widehat{J}_{16} & \widehat{J}_{16} & \widehat{J}_{16} & \widehat{J}_{16} \\ & \widehat{J}_{22} & \widehat{J}_{23} & \widehat{J}_{24} & \widehat{J}_{25} & \widehat{J}_{26} & \widehat{J}_{27} & \widehat{J}_{28} & \widehat{J}_{28} \\ & & \widehat{J}_{33} & \widehat{J}_{34} & \widehat{J}_{35} & \widehat{J}_{36} & \widehat{J}_{37} & \widehat{J}_{38} & \widehat{J}_{38} \\ & & & \widehat{J}_{44} & \widehat{J}_{45} & \widehat{J}_{46} & \widehat{J}_{47} & \widehat{J}_{48} & \widehat{J}_{48} \\ & & & & \widehat{J}_{55} & \widehat{J}_{56} & \widehat{J}_{57} & \widehat{J}_{58} & \widehat{J}_{58} \\ & & & & & \widehat{J}_{66} & \widehat{J}_{67} & \widehat{J}_{68} & \widehat{J}_{68} \\ & & & & & & \widehat{J}_{77} & \widehat{J}_{78} & \widehat{J}_{78} \\ & & & & & & & \widehat{J}_{88} & \widehat{J}_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{\varepsilon}_{D1} \\ -\widehat{\varepsilon}_{D2} \\ -\widehat{\varepsilon}_{D3} \\ -\widehat{\varepsilon}_{D4} \\ \widehat{\varepsilon}_{D5} \\ \widehat{\varepsilon}_{D6} \\ \widehat{\varepsilon}_{D7} \\ \widehat{\varepsilon}_{D8} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

siendo  $\widehat{Q}_X$ ,  $\widehat{M}_Y$ ,  $\widehat{M}_Z$ ,  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{Q}_Y$ ,  $\widehat{Q}_Z$ ,  $\widehat{T}_W$  y  $\widehat{T}_{SV}$  los esfuerzos generalizados transformados al dominio Carson.  $\widehat{Q}_X$  es el esfuerzo normal;  $\widehat{M}_Y$  y  $\widehat{M}_Z$  son momentos flectores;  $\widehat{B}$  es el bimomento;  $\widehat{Q}_Y$  y  $\widehat{Q}_Z$  son los esfuerzos de corte;  $\widehat{T}_W$  es el momento flexotorsor y  $\widehat{T}_{SV}$  es el momento torsor de Saint Venant. La matriz de la expresión (29) debe interpretarse como la matriz de los coeficientes de relajación de la viga. Los elementos  $\widehat{J}_{ij}^{hk}$  se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \widehat{J}_{ij}^{kh} = & \int_S \widehat{A}_{kh} (\widehat{g}_i^{(b)} \widehat{g}_j^{(b)}) ds + \int_S \widehat{B}_{kh} (\widehat{g}_i^{(b)} \widehat{g}_j^{(d)} + \widehat{g}_i^{(d)} \widehat{g}_j^{(b)}) ds + \\ & + \int_S \widehat{A}_{55}^{(H)} (\widehat{g}_i^{(c)} \widehat{g}_j^{(c)}) ds + \int_S \widehat{D}_{kh} (\widehat{g}_i^{(d)} \widehat{g}_j^{(d)}) ds \end{aligned} \quad (30)$$

para  $\{i, j\} = \{1, \dots, 8\}$  y  $\{h, k\} = \{1, 6\}$  y con los vectores:

$$\widehat{\mathbf{g}}^{(b)} = \left\{ 1, Z(s), Y(s), \widehat{\omega}_p(s, \widehat{s}), \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}, r(s) - \widehat{\psi}(s, \widehat{s}), \widehat{\psi}(s, \widehat{s}) \right\} \quad (31)$$

$$\widehat{\mathbf{g}}^{(c)} = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{dZ}{ds}, -\frac{dY}{ds}, -l(s), 0 \right\}, \quad \widehat{\mathbf{g}}^{(d)} = \left\{ 0, \frac{dY}{ds}, -\frac{dZ}{ds}, l(s), 0, 0, 1, -2 \right\} \quad (32)$$

Las ecuaciones de equilibrio estáticas para una viga recta se adoptan de un trabajo previo de los autores<sup>[4,5]</sup>, las cuales descriptas en el dominio de Carson, se escriben a continuación:

$$-\frac{\partial \widehat{\mathbf{Q}}_x}{\partial x} - \widehat{\mathbf{Q}}_1(x, \widehat{s}) = 0, \quad -\frac{\partial \widehat{\mathbf{Q}}_y}{\partial x} - \widehat{\mathbf{Q}}_2(x, \widehat{s}) = 0, \quad \frac{\partial \widehat{\mathbf{M}}_z}{\partial x} - \widehat{\mathbf{Q}}_y - \widehat{\mathbf{Q}}_3(x, \widehat{s}) = 0 \quad (33)$$

$$-\frac{\partial \widehat{\mathbf{Q}}_z}{\partial x} - \widehat{\mathbf{Q}}_4(x, \widehat{s}) = 0, \quad \frac{\partial \widehat{\mathbf{M}}_y}{\partial x} - \widehat{\mathbf{Q}}_z - \widehat{\mathbf{Q}}_5(x, \widehat{s}) = 0 \quad (34)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} [\widehat{\mathbf{T}}_{sv} + \widehat{\mathbf{T}}_w] - \widehat{\mathbf{Q}}_6(x, \widehat{s}) = 0, \quad \frac{\partial \widehat{\mathbf{B}}}{\partial x} - \widehat{\mathbf{T}}_w - \widehat{\mathbf{Q}}_7(x, \widehat{s}) = 0 \quad (35)$$

Las cuales están sujetas a las condiciones de borde apropiadas<sup>[4]</sup>, transformadas al dominio de Carson. Consecuentemente, una vez establecidas las condiciones de borde, se pueden emplear las formas de solución convencionales del problema estático, en el dominio de Carson, utilizando las expresiones (29) en las ecuaciones (33)-(35). Finalmente, para obtener la respuesta temporal al problema, se debe efectuar la transformación inversa de Laplace de las soluciones obtenidas en el dominio Carson, empleando las siguientes formas:

$$G(t) = \mathbf{Q}_l^{-1} [\widehat{G}(\widehat{s})] = \mathbf{Q}_l^{-1} \left[ \frac{\widehat{G}(\widehat{s})}{\widehat{s}} \right] \quad (36)$$

En la expresión (36),  $\mathbf{Q}_l^{-1}[\bullet]$  es el operador de transformación inversa de Laplace, mientras que  $\widehat{G}(\widehat{s})$  y  $\widehat{G}(\widehat{s})$  son las funciones en los dominios de Laplace y Carson respectivamente. La transformación inversa (36) se puede operar en forma simbólica o en forma numérica. El primer caso es posible solo en un grupo muy limitado de configuraciones, específicamente, con material ortótropo y/o compuesto de laminación simétrica balanceada. En cambio el segundo caso es más versátil y permite mayor generalidad.

Aun cuando, la resolución de las ecuaciones diferenciales del problema en el dominio de Carson es plenamente viable, la misma está restringida a los casos mencionados en el párrafo anterior, razón por la cual se recurre a elaborar un esquema de cálculo, basado en el método de elementos finitos, con el objetivo de abarcar problemas más generales en régimen de viscoelasticidad lineal. Para ello, se emplea un elemento de tipo iso-paramétrico de dos nodos, denominado **EDCIC2N**<sup>[4]</sup> (Elemento de deformación cortante constante y con integración consistente) que permite representar la mecánica de los movimientos característicos de una viga recta.

En la Figura 3 se puede observar el elemento finito con los desplazamientos genéricos. La

forma de interpolación de un desplazamiento generalizado  $U_i(x)$  vendrá dada por la siguiente expresión genérica <sup>[10]</sup>:

$$U_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{N_N} \mathbf{f}_{ji}(\bar{x}) U_i^{(j)} \quad \text{con } i=1, \dots, 7 \quad \text{con } \bar{x} \in [0, 1] \quad (37)$$

$N_N$  es el número de nodos del elemento,  $\bar{x}$  es la coordenada intrínseca del elemento y  $\mathbf{f}_{ji}(\bar{x})$  son las funciones de forma del elemento definidas en <sup>[4]</sup>:

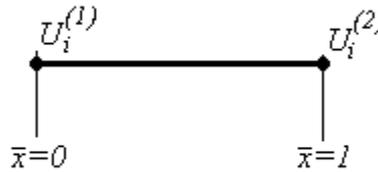


Figura 3. Descripción geométrica del elemento

El vector de desplazamientos nodales de (37) viene descrito de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{U}\} = \{\{\mathbf{U}^{(1)}\}, \{\mathbf{U}^{(2)}\}\} \quad (38)$$

con

$$\{\mathbf{U}_{(j)}^{(i)}\} = \{U_1^{(i)}, U_2^{(i)}, U_3^{(i)}, U_4^{(i)}, U_5^{(i)}, U_6^{(i)}, U_7^{(i)}\}^T = \{u_{xc_j}, u_{yc_j}, \theta_{z_j}, u_{zc_j}, \theta_{y_j}, \phi_{x_j}, \theta_{x_j}\}^T \quad (39)$$

Siguiendo las técnicas convencionales del método de elementos finitos <sup>[9]</sup>, pero substanciadas en el dominio de Carson se obtiene:

$$[\widehat{\mathbf{K}}]\{\widehat{\mathbf{W}}\} = \{\widehat{\mathbf{P}}\} \quad (40)$$

donde  $[\widehat{\mathbf{K}}]$  es la matriz de rigidez global en el dominio de Carson,  $\{\widehat{\mathbf{W}}\}$  y  $\{\widehat{\mathbf{P}}\}$  son el vector global de desplazamientos nodales en el dominio de Carson y el vector global de cargas nodales en el dominio de Carson.

La metodología para resolver el problema de viscoelasticidad lineal, se puede sintetizar en el esquema de la Figura 4. Entonces, una vez definidas la micromecánica y las propiedades de los laminados en el dominio de Carson, se adopta la teoría de vigas rectas para la cual se obtienen los coeficientes de relajación viscoelásticos pertinentes. A continuación se selecciona un conjunto de  $N_L$  valores de la variable “ $\widehat{s}$ ” del dominio de Carson. Para cada valor de esta variable se calculan, mediante el método de elementos finitos los desplazamientos y deformaciones, empleando el elemento mencionado. Posteriormente se adopta un conjunto de funciones, con las cuales se ajusta la solución en el conjunto de  $N_L$  valores de “ $\widehat{s}$ ”. Finalmente, la solución ajustada en el dominio Carson se invierte en forma numérica, para lo cual es necesario previamente seleccionar el tipo de algoritmo de inversión numérica. Para ello, se utiliza un algoritmo de inversión numérica de la transformada de

Laplace, implementado en el programa *Mathematica* <sup>[11]</sup>.

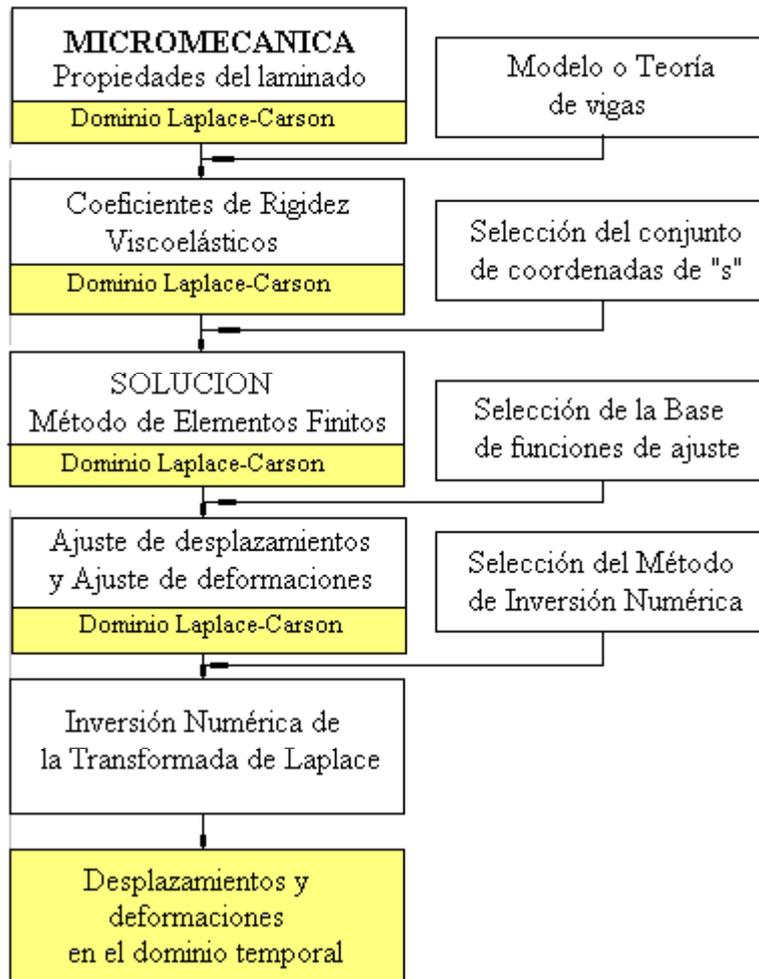


Figura 4. Esquema de resolución para el análisis dependiente del tiempo

La curva de ajuste de las  $N_L$  soluciones de elementos finitos se puede obtener proponiendo las siguientes funciones de ajuste:

$$P_n(\hat{s}) = \hat{s}^{-1/n}, \quad \text{con } n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, \infty\} \quad (41)$$

En general, se requieren pocos términos en las funciones de ajuste y pocos elementos para reproducir con buena precisión los resultados analíticos, según se puede seguir en otros artículos de los autores <sup>[4,5,12]</sup>.

## 4 EJEMPLOS NUMERICOS

### Modelación de una viga curva mediante un reticulado de vigas rectas.

En la Figura 5 se muestra una viga curvada en el plano, empotrada en ambos extremos y solicitada en el medio ( $x=L/2$ ) por una carga  $Q_Z = 4500\text{ N}$  y un momento  $M_X = 4000\text{ Nm}$  aplicados en el centroide de la sección. En tal figura se indican a su vez la geometría seccional en tanto que las propiedades elásticas del material se pueden obtener en Referencias [1,5]. En este caso se emplea un modelo de 20 elementos finitos **EDCIC2N**. En la Figura 6a se comparan las evoluciones temporales de los desplazamientos verticales (en el punto de aplicación de la carga) obtenidos con el modelo de viga curva<sup>[4,5]</sup> y con el presente modelo, para configuraciones de laminación  $\{0/15\}_3$  y  $\{0/30\}_3$ . En la Figura 6b se hace lo propio para el ángulo de rotación torsional. Como se puede apreciar de ambas figuras la concordancia entre la solución de viga naturalmente curvada y la de reticulados es excelente. Adicionalmente se puede observar el característico comportamiento torsional de estos perfiles en la medida que el ángulo de orientación de las fibras aumenta hasta  $30^\circ$ , donde se obtiene la menor deformación por torsión<sup>[4]</sup>.

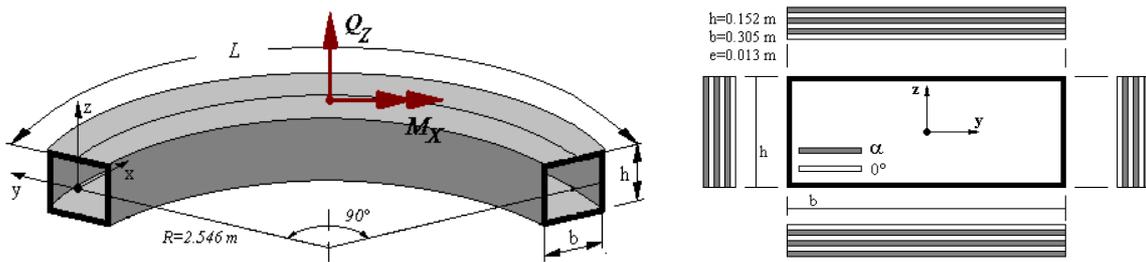


Figura 5. Descripción geométrica del elemento

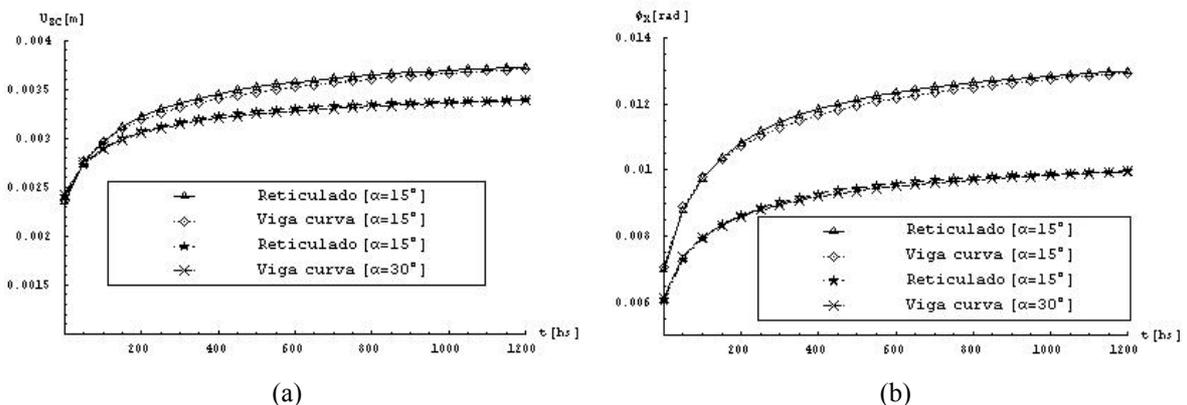


Figura 6. Evolución temporal (a) Desplazamiento  $u_{ZC}$  (b) ángulo de rotación  $\phi_X$

### Comparación experimental.

En la Figura 7 se muestra una viga simplemente apoyada, de material compuesto pultrusionado construida por Creative Pultrusion Inc, que posee una sección cajón cuadrada de 101.6 x 101.6 x 6.35 mm. (las medidas indican las distancias extremas, no a la línea media de la pared seccional). La viga es construida con fibras de E-Glass que refuerzan una resina vinylester (cuyas propiedades viscoelásticas pueden hallarse en Referencia [3]), y cada segmento seccional posee tres capas, una de laminación unidireccional y las otras dos de filamentos arremolinados o *continuous strand mat (CSM)*. La viga es solicitada por dos cargas de 4.5 kN. Qiao y colaboradores<sup>[3]</sup>, efectuaron a su vez un estudio experimental midiendo valores de desplazamientos y deformaciones en el espécimen durante 120 hr.

En la Figura 8 se muestra una comparación de los resultados obtenidos con el presente enfoque y los obtenidos por Qiao y colaboradores<sup>[3]</sup>, tanto experimentales como analíticos. Se debe destacar que en este caso se ha empleado el modelo biparamétrico de Maxwell. En estas circunstancias la expresión (7) viene representada (sólo para este caso) por la (42) y la (8) toma la forma de la expresión (43).

$$M(t) = \frac{1}{E^M} + \frac{t}{\mu^M} \quad (42)$$

$$\widehat{E}_o = \widehat{L}(\widehat{s}) = \frac{1}{\widehat{M}(\widehat{s})} = \frac{E^M \mu^M s}{(E^M + \mu^M s)} \quad (43)$$

La constante  $E^M$  es una propiedad del material, que se interpreta como el módulo de elasticidad  $E^e$  al que se le añaden todos los efectos de la deformación por creep primario condensados en el instante inicial de carga ( $t = 0$ ).

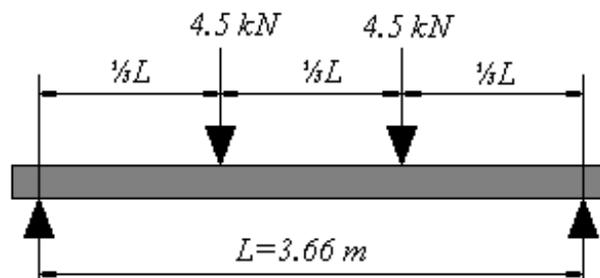


Figura 7. Descripción geométrica del espécimen de viga recta

En la Figura 8 se puede apreciar que las diferencias entre los valores experimentales y los valores calculados con el presente esquema son menores al 5.0%. Se debe mencionar que el modelo de viga empleado por Qiao y colaboradores[3] contempla el corte en forma reducida (es decir solo por flexión), a diferencia de este enfoque donde el elemento estructural de viga recta considera el corte por flexión y por torsión.

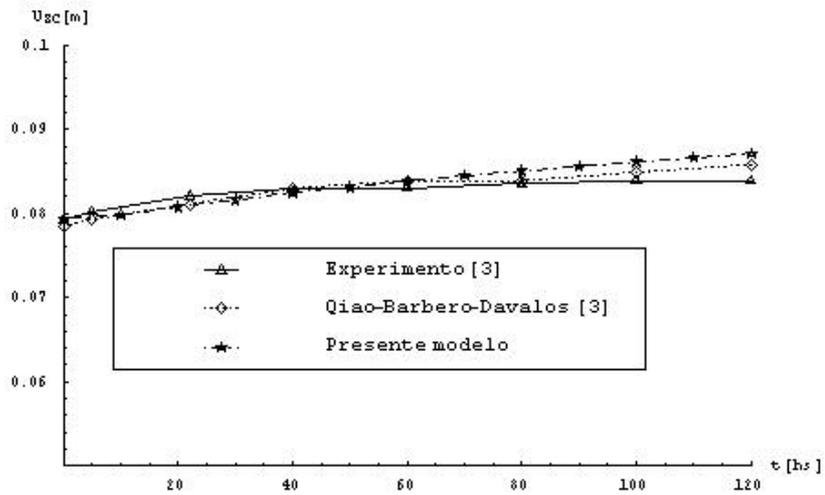


Figura 8. Variación temporal del desplazamiento flexional en el centro de la viga.

### Estudio de un reticulado espacial con vigas de diferentes secciones.

En la Figura 9 se muestra un reticulado espacial construido con tubos cuadrados de resina vinlester reforzado con fibras de vidrio en dos condiciones atmosféricas diferentes (las propiedades del material se pueden hallar en Referencias [1,5]). Cada panel tiene laminación  $[0, \alpha, 0, \alpha, CSM, CSM]$ , (recordar que *CSM* significa *continuous strand mat*). Las dimensiones de la sección cuadrada son las que se indican en el apartado anterior. En la Figura 10 se puede apreciar la evolución temporal del desplazamiento vertical  $U_{zc}$ , en el punto de aplicación de la carga. Nótese la influencia que tienen los factores atmosféricos (temperatura y humedad relativa) en el comportamiento del material.

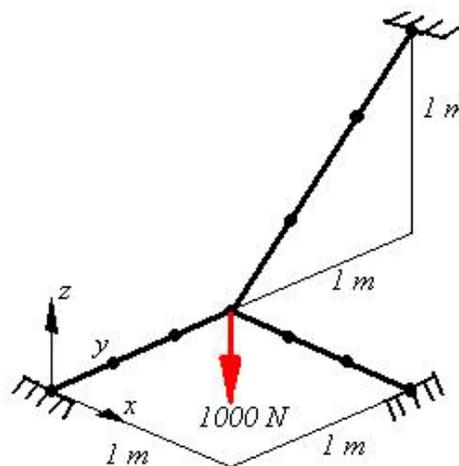


Figura 9. Esquema del reticulado.

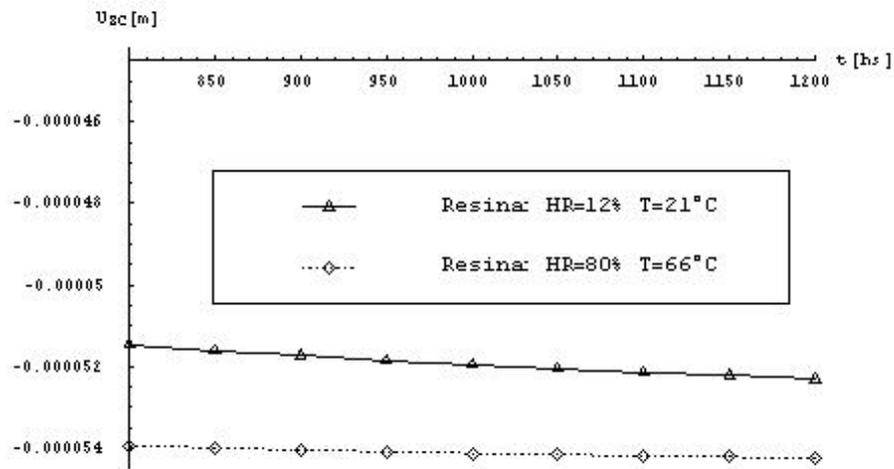


Figura 10. Evolución temporal del desplazamiento  $U_{zc}$  en el punto de aplicación de carga.

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado un esquema de cálculo para poder encarar el problema de desplazamientos (deformaciones) progresivas con el tiempo en reticulados espaciales construidos con vigas de materiales compuestos laminados que poseen matriz viscoelástica en rango lineal. Dentro de las aplicaciones de materiales compuestos, este tipo de análisis no se encuentra con frecuencia. En las conexiones se supuso alabeo restringido. Se ha podido constatar que el enfoque de reticulados compara muy bien con otros enfoques como por ejemplo el de viga naturalmente curvadas que poseen matriz viscoelástica lineal, como también con resultados experimentales de otros autores.

## 6 REFERENCIAS

- [1] E.J. Barbero, R. Luciano, "Micromechanical Formulas for the Relaxation Tensor of Linear Viscoelastic Composites with Transversely Isotropic Fibers", Int. Journal of Solids and Structures 32, 1859-1872 (1995).
- [2] J.S. Harris, E. J. Barbero, "Prediction of Creep Properties of Laminated Composites from Matrix Creep Data", Jou. Reinforced Plastics and Composites 17, 361-378 (1998).
- [3] P. Qiao P., E.J. Barbero, J.F. Dávalos. "On the linear viscoelasticity of thin walled laminated composite beams". J. Composite Materials 34, 39-68 (2000)
- [4] M.T. Piovan, "Estudio Teórico y computacional sobre la mecánica de vigas curvas de materiales compuestos, con sección de paredes delgadas, considerando efectos no convencionales". Tesis Doctoral. Universidad Nacional del Sur (2002).
- [5] M.T. Piovan y V.H. Cortínez. "Comportamiento viscoelástico lineal de vigas curvas

- anisótropas deformables por corte”. *Mecánica Computacional* Vol 21, 1750-1769 (2002).
- [6] G.Mase “*Mecánica del Medio Continuo*”. Compendios Schawm-McGraw-Hill. (1977)
- [7] R. Luciano y E.J. Barbero. “*Analytical Expression for the Relaxation Moduli of Linear Viscoelastic Composites with Periodic Microstructure*”. *Journal of Applied Mechanics*. Paper Number 95-APM-10 (1995).
- [8] R. Luciano y E.J. Barbero. “*Formulas for the Stiffness of Composites with Periodic Microstructure*”. *Intl Journal Solids and Structures*, 31(21), 2933-2944 (1994).
- [9] E.J. Barbero, “*Introduction to Composite Materials Design*”. Taylor and Francis (1998).
- [10] E. Oñate. “*El Cálculo de estructuras con Elementos Finitos*”. Cimne. Barcelona (1992).
- [11] A. Mallet. “*Numerical Inversion of Laplace transform*”. Wolfram Research. (2000).
- [12] V.H. Cortínez y M.T. Piovan, “*Análisis dependiente del tiempo de vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos*”. *Mecánica Computacional* Vol 20 290-297 (2001).