Mecánica Computacional Vol. XXII
M. B. Rosales, V. H. Cortínez y D. V. Bambill (Editores)
Bahía Blanca, Argentina, Noviembre 2003.

# APPLICATION OF LOPI METHOD TO CONVECTION DOMINATED PROBLEMS

**Gloria Simonetti, Amal Azzam y Carlos Zuppa**

Departamento de Matemática. Universidad Nacional de San Luis.
Chacabuco y Pedernera, (5700) San Luis, Argentina.
e-mail: zuppa@unsl.edu.ar

**Key Words:** Meshless method, Lopi collocation, convection dominated problems

**Abstract.** The Local Optimal Point Interpolation (LOPI) method is a truly meshless method based on the boolean sum of a radial basis function interpolator and a least squares approximation in a polynomials space. In this way, it can interpolate solutions in data points, while at the same time fit exactly polynomial solutions up to certain degree. Systems of PDEs could be solved in strong form using point collocation, without meshes or integration cells. In this work, we introduce the use of LOPI method in convection dominated problems under an upwind scheme. As a main example, this scheme is applied as a spatial approximation for solving the nonlinear Burger's equation. For comparison purposes, a low order explicit finite difference approximation of the time derivative is employeed. Numerical comparisons are made with existing numerical schemes for solving the Burger's equation.

## 1. INTRODUCCION

Entre los últimos trabajos dedicados al estudio de los métodos meshless y entre aquellos que aproximan directamente la solución de PDEs en forma fuerte, se encuentra el método de colocación basado en interpolación optimal local de puntos. El esquema de interpolación LOPI consiste de una base de interpolantes locales capaz de reproducir polinomios de hasta grado r. Las funciones tienen soporte compacto y verifican la propiedad de la delta de Kronecker simplificando la introducción de condiciones de borde esenciales.

En Zuppa-Cardona[3] se presentan experimentos mostrando la gran flexibilidad y precisión del método en la aplicación a la resolución de problemas elípticos.

En este trabajo se propone el uso del esquema LOPI para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales de tipo convectivo- difusivo.

Se investiga el comportamiento del esquema LOPI aplicado a problemas de transporte de fluidos.[5] Para tratar este problema, la clase de interpolantes LOPI es modificada aquí siguiendo la idea de la aproximación ¨upwind ¨en diferencias finitas. El término correctivo tiene en cuenta la dirección de la velocidad $U$ para la elección de la estrella del nodo dentro de la nube de puntos . Con ello se logran soluciones no oscilatorias para un amplio rango de valores del número Peclet .

## 2. DESCRIPCION DEL METODO LOPI

Daremos una breve descripción del método . Los detalles matemáticos y sus propiedades fueron analizadas por Zuppa y Cardona.[3]

Sea $\mathbf{f} = (f_\alpha)_{1\leq\alpha\leq N}$ un conjunto de valores dados en los puntos distintos de $\mathcal{N} = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N\} \subset \mathbb{R}^d$. Sea $\{\varphi_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq N}$ el conjunto de funciones básicas obtenidas a partir del método LOPI, las cuales verifican la delta Dirac. Entonces la función aproximante se describe mediante la combinación lineal:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N} f_\alpha \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \tag{1}$$

donde

$$\varphi_\alpha = \mathcal{T}_\chi\left[\mathbf{e}_\alpha\right], \alpha = 1, ...N, \qquad \{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^{N} \text{ la base canónica de } \mathcal{F} := \mathbb{R}^N$$

El operador LOPI es definido como :

$$\mathcal{T}_\chi\left[\mathbf{f}\right](\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}), P_\chi \mathbf{f}\rangle + \langle \mathbf{b}(\mathbf{x}), Q_\chi \mathbf{f}\rangle \tag{2}$$

donde $\langle ., .\rangle$ es el producto escalar Euclideano entre vectores. El segundo término en la fórmula es la aproximación de Mínimos cuadrados de los datos y el primero es la corrección que hace que la aproximación sea interpolante.El conjunto $\mathcal{X}$ (la nube) definido por los puntos en el entorno del punto de evaluación, characterizes this scheme as compactly supported, lowering its computational cost

La matriz $Q_\chi$es la matriz normal standar de mínimos cuadrados pesados definida como:

$$Q_\chi = (B_\chi^t W B_\chi)^{-1} B_\chi^t W$$

La matriz $P_\chi$de la corrección es

$$P_\chi = V^{-1}(I - B_\chi Q_\chi)$$

donde $V$ es la *Vandermondiana* de la función multicuádrica radial $(MQ)$ de clase $C^\infty$ : $g(\mathbf{x}) = \sqrt{1 + c\left\|\mathbf{x}\right\|^2}, c > 0$

$$V = \begin{bmatrix} g(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1) & \cdot\ \cdot\ \cdot & g(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_K) & \cdot\ \cdot\ \cdot & g(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_K) \end{bmatrix}$$

la que se supone inversible. El vector $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, la base de polinomios para el deseado orden de aproximación y el vector $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ son definidos:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1), ...g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_K)) \qquad y \qquad \mathbf{b}(\mathbf{x}) = (1, b_1(\mathbf{x}), ..., b_p(\mathbf{x}))$$

La derivada viene dada por la fórmula

$$D\mathcal{T}_\chi\left[\mathbf{f}\right](\mathbf{x}) = \langle D\mathbf{v}(\mathbf{x}), P_\chi \mathbf{f}\rangle + \langle D\mathbf{b}(\mathbf{x}), Q_\chi \mathbf{f}\rangle \tag{3}$$

### 2.1. Solución aproximada de ecuaciones diferenciales por colocación

Para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales suponemos un problema a valores de contorno:

$$\begin{array}{l} Pu(x) = f(x), \qquad x \in \Omega \\ B_N u(x)\left|_{\Gamma_N}\right. = s_N(x) \\ B_D u(x)\left|_{\Gamma_D}\right. = s_D(x) \end{array} \tag{4}$$

Aquí $\Omega$ es un domínio abierto acotado en $\mathbb{R}^n$, $B_D$ es un operador Dirichlet y $B_N$ un operador Neumann o mixto.

Sea $\Omega^N$ un conjunto arbitrario de $N$ puntos $\mathbf{x}_\alpha \in \overline{\Omega}$ llamados nodos

$$\Omega^N = \left\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_N\right\}, \qquad \mathbf{x}_\alpha \in \overline{\Omega}$$

Sea $\mathcal{I}_N = \{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ un cubrimiento abierto finito de $\overline{\Omega}$ que consiste de $N$ nubes $\omega_\alpha$ tal que $\mathbf{x}_\alpha \in \omega_\alpha$, $\alpha = 1, ...N$,constituye el centro de la estrella, y

$$\overline{\Omega} \subset \alpha = 1 \overset{N}{\cup} \omega_\alpha$$

Después de reordenar se puede particionar el conjunto de nodos $\Omega^N$ en la forma

$$\Omega^N = \{(\mathbf{x}_\beta)\ |_{\beta=1,\dots M_1} \subset \Omega, (\mathbf{x}_\beta)\ |_{\beta=M_1+1,\dots M_2} \subset \Gamma_N, (\mathbf{x}_\beta)\ |_{\beta=M_2+1,\dots N} \subset \Gamma_D\}$$

En cada nube $\omega_\alpha$, se aproximará la solución del problema (4) en la forma

$$u_h(\mathbf{x}) = \mathcal{T}_\alpha [\mathbf{u}] (\mathbf{x}) = i = 1 \sum\limits^{M_2} u_i \varphi_i^\alpha (\mathbf{x}) + S_D^\alpha (\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \omega_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots N \tag{5}$$

where $\quad S_D^\alpha (\mathbf{x}) = i = M_2 + 1 \sum\limits^{N} s_D (\mathbf{x}_i) \cdot \varphi_i^\alpha (\mathbf{x}).$

Sustituyendo $u_h(\mathbf{x})$ en (4) y usando colocación en los nodos de $\Omega^N$, se obtiene el sistema algebraico lineal

$$\begin{aligned} Pu_h (\mathbf{x}_\alpha) &= i = 1 \sum\limits^{M_2} u_i P\varphi_i^\alpha (\mathbf{x}_\alpha) = f (\mathbf{x}_\alpha) - PS_D^\alpha (\mathbf{x}_\alpha), && \alpha = 1, \dots M_1 \\ B_N u_h (\mathbf{x}_\alpha) &= i = 1 \sum\limits^{M_2} u_i B_N \varphi_i^\alpha (\mathbf{x}_\alpha) = s_N (\mathbf{x}_\alpha) - B_N S_D^\alpha (\mathbf{x}_\alpha), && \alpha = M_1 + 1, \dots M_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Las condiciones de borde esenciales son aplicadas directamente.

### 2.2. Aplicación a la ecuación de transporte

En primer lugar se investiga el comportamiento del esquema LOPI aplicado a problemas de movimientos de fluidos. Una ecuación simplificada que modela estos problemas es la ecuación de convección-difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(k \frac{\partial u}{\partial x_i}) + Q = 0 \tag{7}$$

(con notación de índices iguales) donde $U_i$ es en general un campo de velocidades conocido y $u$ la cantidad transportada por esta velocidad de modo convectivo o por acción de la difusión; $Q$ representa una fuente externa y $k$ el coeficiente de difusión.

Consideramos aquí el caso escalar en estado estacionario reduciendo la ecuación (7) a

$$U_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(k \frac{\partial u}{\partial x_i}) + Q = 0 \tag{8}$$

con condiciones de contorno Dirichlet.

En la resolución numérica de este tipo de ecuaciones aparecen problemas de estabilidad y precisión. En la discretización de la ecuación, para un grilla de tamaño $h$, el número Peclet de la grilla

$$Pe = \frac{Uh}{2k} \tag{9}$$

juega un papel relevante. La precisión de la solución se deteriora cuando este parámetro crece, y los términos convectivos adquieren mayor importancia, obteniéndose soluciones oscilatorias que no mantienen relación con el problema que se está resolviendo. Cuando $Pe \geq 1$,comienzan a surgir ese tipo de inconvenientes.

Para tratar este problema, la clase de interpolantes LOPI es modificada aquí, definiendo el método que llamaremos LOPI-UP, siguiendo la idea de upwind utilizada en el método de Diferencias Finitas.

## 3. EL METODO LOPI-UP

En términos generales, el método LOPI-UP introduce, en el término convectivo, una corrección que tiene en cuenta la dirección de la velocidad $U$. El método LOPI define punto a punto, para cada nodo, una función básica $\varphi_\alpha$, teniendo en cuenta la estrella cuyo centro es $x_\alpha$. LOPI-UP define, además, una función básica $\varphi_\alpha^*$ que considera, de aquella estrella, sólo los nodos aguas arriba (up stream). Ambas funciones intervienen en una combinación convexa $\lambda\varphi_\alpha+(1-\lambda)\varphi_\alpha^*$ en la discretización correspondiente al término convectivo. Los términos restantes de la ecuación diferencial permanecen sin cambios con respecto al método LOPI.

### 3.0.1. Descripción

Consideremos un nodo fijo $\mathbf{x}_\alpha$ , centro de la nube $\omega_\alpha$,y $\mathcal{S}(\alpha)$ el conjunto de nodos en $\omega_\alpha$ que forma la nube. Sean $\mathcal{S}^*(\alpha)$=$\{\mathbf{x}_\beta \in \omega_\alpha \mid x_\beta$ es usado en upwind$\}$ y $\varphi_\beta^*$ las funciones básicas de LOPI obtenidas a partir de $\mathcal{S}^*$ para dichos nodos.

En cada nube,aproximamos la solución por

$$u_h(\mathbf{x}) = \beta \in \mathcal{B} \sum u_\beta \varphi_\beta\left(\mathbf{x}\right) + S_D\left(\mathbf{x}\right), \qquad \mathbf{x} \in \omega_\alpha \tag{10}$$

con $S_D\left(\mathbf{x}\right) = \beta \in \mathcal{B}_D \sum s_D\left(\mathbf{x}_\beta\right)\varphi_\beta\left(\mathbf{x}\right)$ donde $\mathcal{B}_D = \{\beta \mid \mathbf{x}_\beta \in \partial\Omega\}$. Sustituyendo en la ecuación (8) y usando colocación en los nodos de la estrella, se obtiene el siguiente sistema algebraico donde el vector incógnita $\mathbf{u}$, son los valores de la solución en los nodos interiores de $\Omega$

$$\lambda \sum_{\beta\in\mathcal{B}} U_i \frac{\partial\varphi_\beta(\mathbf{x}_\alpha)}{\partial x_i} u_\beta + (1-\lambda) \sum_{\beta\in\mathcal{B}^*} U_i \frac{\partial\varphi_\beta^*(\mathbf{x}_\alpha)}{\partial x_i} u_\beta - k \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \frac{\partial^2\varphi_\beta(\mathbf{x}_\alpha)}{\partial x_i^2} u_\beta = f_\alpha \qquad \alpha = 1, ..., N \tag{11}$$

donde $\mathcal{B} = \{\beta \mid \mathbf{x}_\beta \in \mathcal{S}(\alpha)\}$ , $\mathcal{B}^* = \{\beta \mid \mathbf{x}_\beta \in \mathcal{S}^*(\alpha)\}$ , $0 \leq \lambda \leq 1$ y

$$f_\alpha = Q(\mathbf{x}_\alpha) - \lambda \sum_{\beta\in\mathcal{B}_D} U_i \frac{\partial\varphi_\beta(\mathbf{x}_\alpha)}{\partial x_i} s_D\left(\mathbf{x}_\beta\right) + (1-\lambda) \sum_{\beta\in\mathcal{B}_D^*} U_i \frac{\partial\varphi_\beta^*(\mathbf{x}_\alpha)}{\partial x_i} s_D\left(\mathbf{x}_\beta\right) - k \sum_{\beta\in\mathcal{B}_D} \frac{\partial^2\varphi_\beta(\mathbf{x}_\alpha)}{\partial x_i^2} s_D\left(\mathbf{x}_\beta\right)$$

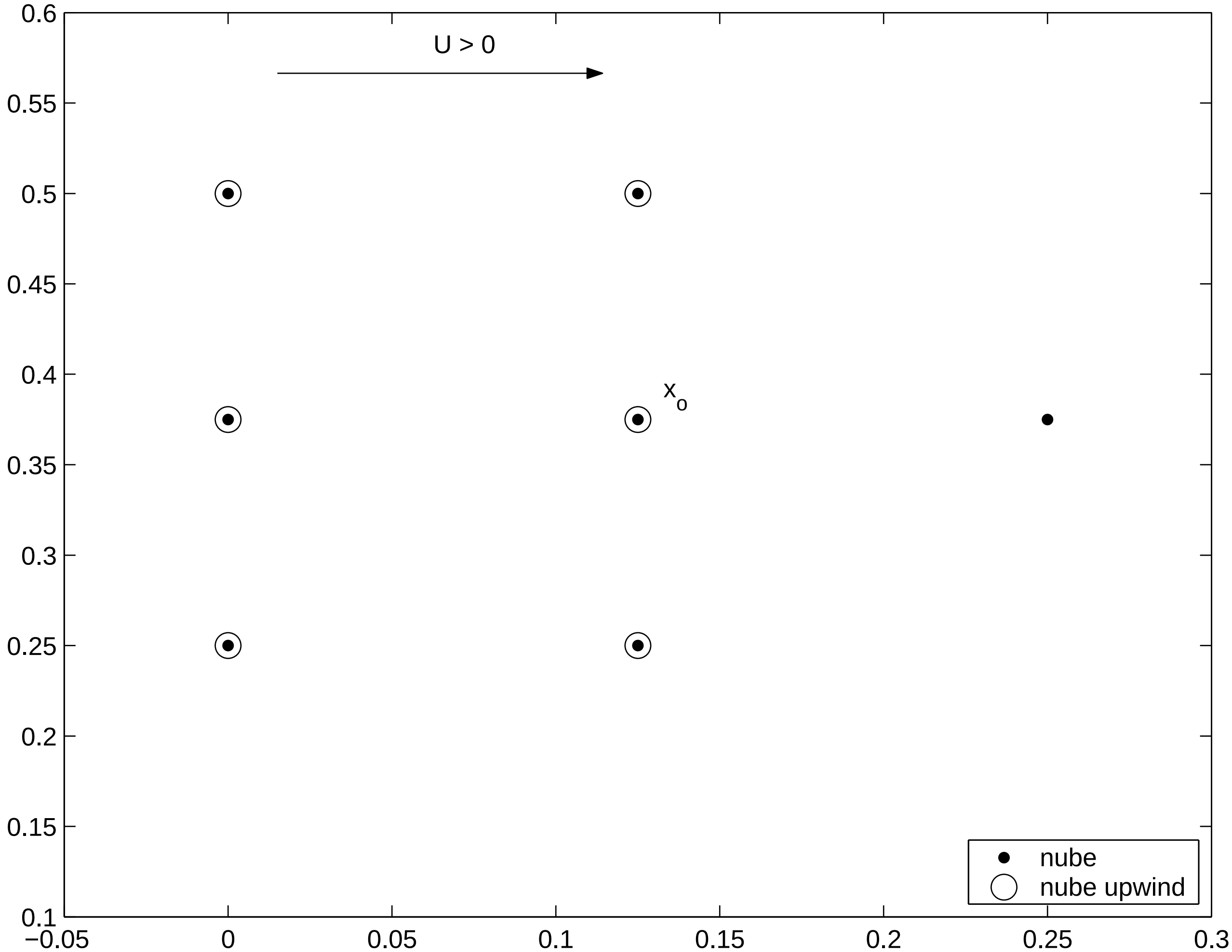


Figura 1: Nube seleccionada para el upwind cuando $U_1 > 0$ y $U_2 = 0$

### 3.0.2. Selección de la nube

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$ para $\mathbf{x} \in \Omega$ , $U = (U_1, U_2)$ el vector velocidad en (8)

Sea $\mathcal{S}(\alpha) = \{\mathbf{x}_{\alpha 1}, \mathbf{x}_{\alpha 2}, ..., \mathbf{x}_{\alpha r}\}$ la nube determinada por el método LOPI, cuyo centro es $\mathbf{x}_\alpha$.

El método usado para la selección de los nodos que conforman la nube upwind $\mathcal{S}^*(\alpha)$ es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{si } U_i > 0 & \mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ \mathbf{x}_{\alpha j} \in \mathcal{S}(\alpha) \,| x^i_{\alpha j} \leq x^i_\alpha \right\} \\ \text{si } U_i < 0 & \mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ \mathbf{x}_{\alpha j} \in \mathcal{S}(\alpha) \,|( x^i_{\alpha j} \geq x^i_\alpha \right\} \end{array}$$

### 3.1. Experimentos numéricos

Se muestran algunos ejemplos donde se ha aplicado el esquema LOPI-UP descripto anteriormente y se analiza el comportamiento del método. En todos los casos la medida del error está dada por la fórmula

$$eu_{l^2} = \frac{1}{\beta = 1, ...M_2 \text{máx}\, |u(\mathbf{x}_\beta)|} \sqrt{\frac{1}{M_2} \sum_{\beta=1,...M_2} |(u - u_h)(\mathbf{x}_\beta)|^2} \tag{12}$$

## 4. EXPERIMENTOS NUMERICOS

#### 4.0.1. Modelo 1

En el modelo unidimensional descripto a continuación, $U$ y $k$ son constantes,k=1

$$\begin{array}{l} U\dfrac{du}{dx} - k\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0 \qquad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0; u(1) = 1; \end{array}$$

y la solución exacta está dada por $u(x) = \dfrac{1 - e^{\frac{Ux}{k}}}{1 - e^{\frac{UL}{k}}}$ donde $L = 1$. La figura 1 muestra, dada una grilla fija, la variación de $\lambda$ óptimo en función del $Pe$, y por lo tanto de la velocidad $U$, por la relación (9). Aunque $\lambda$ óptimo depende del tamaño del $Pe$, no se ha podido hallar una relación funcional satisfactoria entre ambos. Sin embargo, se pone en evidencia que en la medida que $Pe$ aumenta, el $\lambda$ óptimo en el sentido del error disminuye, dando mayor peso a los términos de la discretización con upwind, los cuales tienen coeficiente $1 - \lambda$ . Esto muestra que el esquema upwind propuesto mejora el comportamiento de las soluciones en los casos de *capa límite*. En la figura 2 se observa el comportamiento no oscilatorio de la solución aproximada al aplicarse el esquema LopiUp con el valor óptimo de $\lambda$ para la amplitud de grilla h=1/16 y $Pe = 2{,}5$.

**Nota 1** *Obsérvese que el valor $\lambda = 1$ corresponde a la aplicación del método LOPI sin upwind. La figura 2 muestra que en este caso las oscilaciones en la solución no han podido evitarse.*

#### 4.0.2. Modelo 2

En el segundo modelo considerado, el miembro derecho es dependiente de la variable $x$,

$$\begin{array}{l} U\dfrac{du}{dx} - k\dfrac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0; u(1) = 0; \end{array}$$

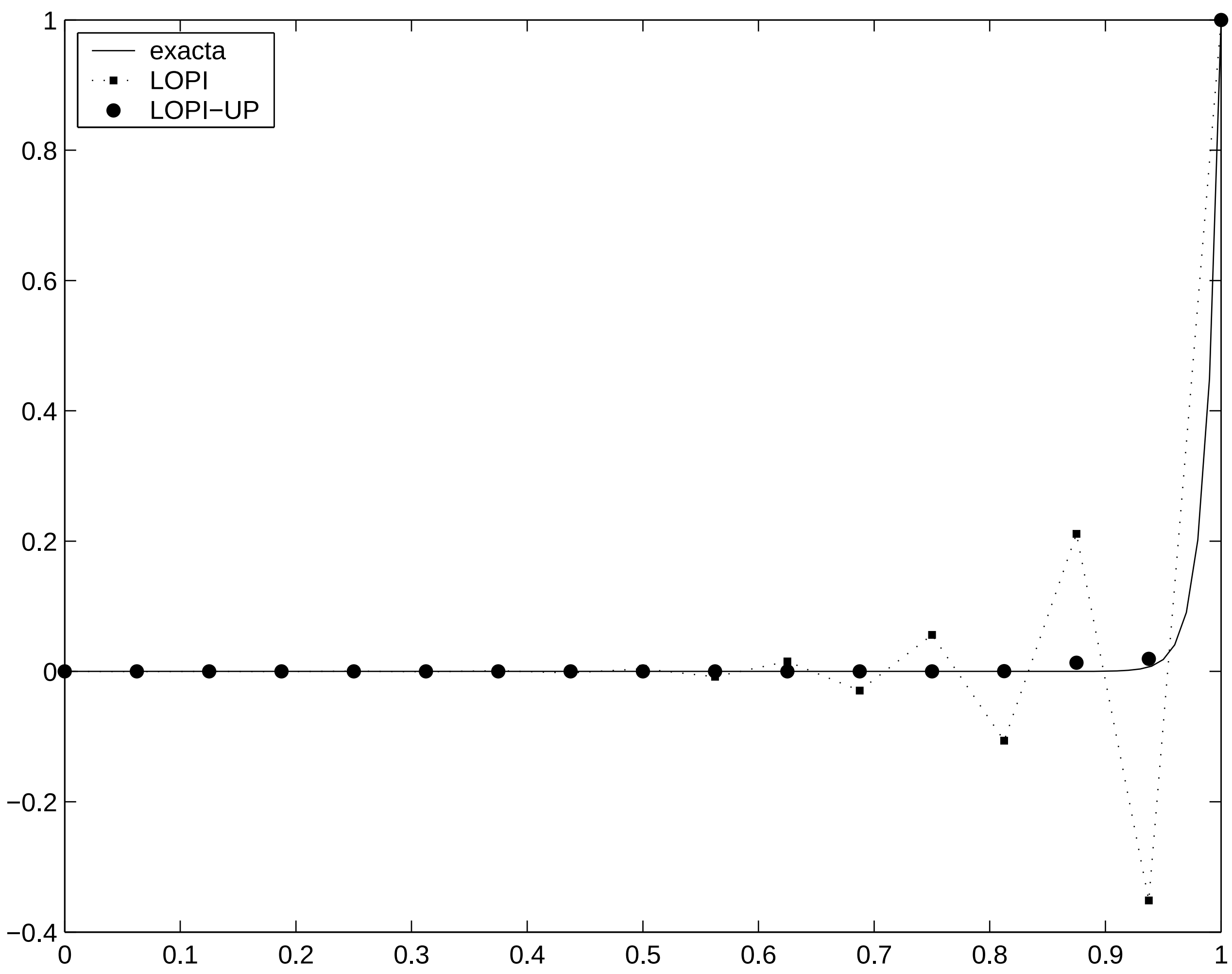


Figura 2: Factor óptimo para la corrección, en función del error

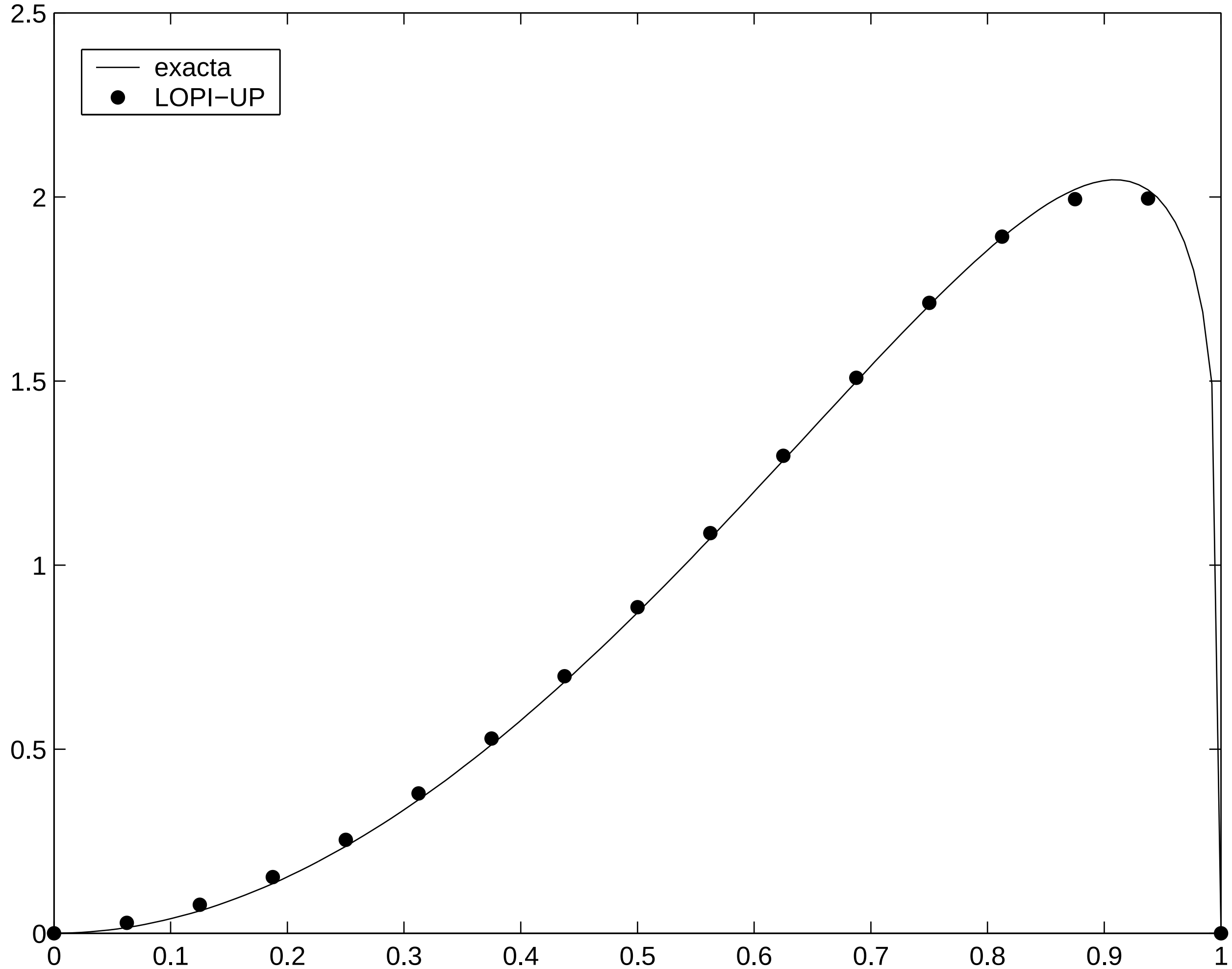


Figura 3: Solución del modelo 3

y $f(x)$ es el término fuente necesario para que la solución exacta sea

$$u(x) = 4 * x^2 * (1 - x)^{0,2}$$

En este problema hemos tomado $U = 400$ y $k = 1$. Cuando $k \ll U$, la solución tiene una capa límite de amplitud $\mathcal{O}(k/U)$. En la capa límite, el problema requiere que $\frac{du}{dx}$ tome valores arbitrariamente grandes mientras que $u$ permanece acotada. Los experimentos numéricos muestran, para una amplitud de la grilla fija $h = 1/16$, soluciones no oscilatorias para valores pequeños $\lambda$, siendo $\lambda = 0{,}2$ el óptimo, evidenciando la importancia del término upwind.

#### 4.0.3. Modelo 3

Para el caso bidimensional hemos considerado el problema con condiciones de borde Dirichlet homogéneas cuyo dominio es el cuadrado unidad :

$$\begin{aligned}&U_1\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)\\&u(x,0)=u(0,y)=u(x,1)=u(1,y)=0\end{aligned}$$

siendo $f(x,y)$ el término fuente para el cual la solución exacta es

u(x,y)=4x$^2(1-x)^{0,3}y(1-y)$.

El error medido es

$$er_\infty=\frac{1}{\max_{\beta=1,\dots M_2}|u(\mathbf{x}_\beta)|}\max_{\beta=1,\dots M_2}\left|(u-u_h)(\mathbf{x}_\beta)\right| \tag{13}$$

Se ha resuelto para una distribución de puntos partiendo de una grilla uniforme con $h=0{,}125/2$ y aplicando una variación random de $0{,}25h$ , obteniéndose los resultados siguientes:

| | $er_2$ | $er_\infty$ |
|---|---|---|
| *Solución* | 0.0086 | 0.0021 |

### 4.1. Aplicación a la ecuación de Burgers

Otra aplicación es el uso del esquema LOPI-UP en la resolución numérica de la ecuación de Burgers.

Dada la ecuación

$$u_t+u\,u_x=\frac{1}{R}u_{xx}\qquad R>0 \tag{14}$$

bajo las condiciones de contorno

$$u(0,t)=0=u(1,t),\qquad t>0$$

y las condiciones iniciales

$$u(x,0)=f(x),\qquad 0\leq x\leq 1$$

se obtiene una solución del problema y se compara los resultados con los obtenidos por varias técnicas numéricas que han sido aplicada para su resolución. Entre aquellas, compact differencing technique de Hirsh[4] ; FEM splitting de de Jain & Raja[6] ; FEM con moving nodes de Herbst et al.[2] ; método MQ de Hon-Mao[1] . En general los esquemas numéricos utilizados funcionan adecuadamente dependiendo de la magnitud de $R$, el número de Reynold. Hon & Mao han mostrado que el MQ mantiene la precisión para un amplio rango de ellos.

Usando una aproximación en diferencias de bajo orden, para discretizar el tiempo en la ecuación de Burger se obtiene el esquema

$$u^m + \Delta t\,(u^{m-1}u_x^m - \frac{1}{R}u_{xx}^m) = u^{m-1}, \qquad m \geq 1 \tag{15}$$

donde $k$ es la longitud del paso del tiempo, $u^m$denota la solución en el paso $m$,siendo este el campo incógnita en cada paso y $R$ el número de Reynold. Aquí utilizamos el esquema LOPI-UP para aproximar $u^m$ en cada iteración. Las dos tablas siguientes muestran resultados comparativos para $R = 1000$ y $R = 10000$ respectivamente.

| | *Christi* | *Compact* | *FEM* | *FEM* | *MQ* | *Lopi* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *diff* | *Split* | *moving* | $(N = 10)$ | |
| $X$ | *Sol* | $\Delta t = ,001$ | $\Delta t = ,01$ | $\Delta t = ,001$ | $\Delta t = ,001$ | $\Delta t = 0{,}01$ |
| 0.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.05 | 0.0422 | 0.0501 | 0.0419 | 0.0422 | 0.0424 | 0.0408 |
| 0.11 | 0.0422 | 0.0501 | 0.0419 | 0.0422 | 0.0424 | 0.0408 |
| 0.16 | 0.1263 | 0.1471 | 0.1253 | 0.1266 | 0.1263 | 0.1301 |
| 0.22 | 0.1684 | 0.1359 | 0.1692 | 0.1687 | 0.1684 | 0.1785 |
| 0.27 | 0.2103 | 0.2611 | 0.2034 | 0.2108 | 0.2103 | 0.2185 |
| 0.33 | 0.2522 | 0.2091 | 0.2666 | 0.2527 | 0.2522 | 0.2661 |
| 0.38 | 0.2939 | 0.3340 | 0.2527 | 0.2946 | 0.2939 | 0.3053 |
| 0.44 | 0.3355 | 0.3048 | 0.3966 | 0.3362 | 0.3355 | 0.3519 |
| 0.50 | 0.3769 | 0.4173 | 0.2350 | 0.3778 | 0.3769 | 0.3977 |
| 0.55 | 0.4182 | 0.3741 | 0.5480 | 0.4191 | 0.4182 | 0.4354 |
| 0.61 | 0.4592 | 0.5059 | 0.2578 | 0.4601 | 0.4592 | 0.4799 |
| 0.66 | 0.5000 | 0.4634 | 0.6049 | 0.5009 | 0.4999 | 0.5164 |
| 0.72 | 0.5404 | 0.5808 | 0.6014 | 0.5414 | 0.5404 | 0.5594 |
| 0.77 | 0.5806 | 0.5369 | 0.4630 | 0.5816 | 0.5805 | 0.5945 |
| 0.83 | 0.6203 | 0.6671 | 0.7011 | 0.6213 | 0.6201 | 0.6358 |
| 0.88 | 0.6596 | 0.6201 | 0.6717 | 0.6605 | 0.6600 | 0.6704 |
| 0.94 | 0.6983 | 0.7410 | 0.7261 | 0.6992 | 0.6957 | 0.6987 |
| 1.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

(TABLA R=10000

| | $Christi$ | $FEM$ $moving$ | $Adapt$ $(N = 10)$ | $MQ$ $(N = 10)$ | $Lopi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $Sol$ | $\Delta t = ,001$ | $\Delta t = ,1$ | $\Delta t = ,001$ | $\Delta t = ,01$ |
| 0.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.05 | 0.0422 | 0.0422 | 0.0421 | 0.0421 | 0.0383 |
| 0.11 | 0.0843 | 0.0844 | 0.0843 | 0.0843 | 0.0839 |
| 0.16 | 0.1263 | 0.1266 | 0.1263 | 0.1264 | 0.1218 |
| 0.22 | 0.1684 | 0.1687 | 0.1682 | 0.1684 | 0.1672 |
| 0.27 | 0.2103 | 0.2108 | 0.2100 | 0.2103 | 0.2049 |
| 0.33 | 0.2522 | 0.2527 | 0.2517 | 0.2522 | 0.2501 |
| 0.38 | 0.2939 | 0.2946 | 0.2931 | 0.2939 | 0.2877 |
| 0.44 | 0.3355 | 0.3362 | 0.3343 | 0.3355 | 0.3326 |
| 0.50 | 0.3769 | 0.3778 | 0.3751 | 0.3769 | 0.3773 |
| 0.55 | 0.4182 | 0.4191 | 0.4156 | 0.4182 | 0.4144 |
| 0.61 | 0.4592 | 0.4601 | 0.4557 | 0.4592 | 0.4586 |
| 0.66 | 0.5000 | 0.5009 | 0.4952 | 0.4999 | 0.4952 |
| 0.72 | 0.5404 | 0.5414 | 0.5341 | 0.5404 | 0.5388 |
| 0.77 | 0.5806 | 0.5816 | 0.5722 | 0.5805 | 0.5748 |
| 0.83 | 0.6203 | 0.6213 | 0.6093 | 0.6202 | 0.6175 |
| 0.88 | 0.6596 | 0.6605 | 0.6453 | 0.6595 | 0.6527 |
| 0.94 | 0.6983 | 0.6992 | 0.6785 | 0.6972 | 0.6925 |
| 1.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos iniciado el estudio de la aplicación del Método LOPI-UP en problemas de convección-difusión. Los ejemplos estudiados muestran que la aplicación de las ideas de upwind en LOPI eliminan notoriamente las oscilaciones aún con baja difusión. No se ha podido establecer aquí una relación funcional adecuada para el $\lambda$ óptimo en la combinación lineal usada en la discretización del término convectivo. Por otra parte, el esquema de interpolación LOPI tiene una gran flexibilidad en la elección de las nubes para el proceso upwind por lo que diversas alternativas pueden ser estudiadas en el caso de dimensión mayor que 1. Estas importantes cuestiones serán objeto de ulteriores estudios.

## REFERENCIAS


[1]

[2] D. F. Griffiths A. R. Mitchell B. M. Herbst, S. W. Schoombie, *Generalized petrov-galerkin methods for the numerical solution of burger's equation*, Int. J. Numer. Methods Eng. **20** (1984), 1273–1289.

[3] A. Cardona C. Zuppa, *A collocation meshless method based on local optimal point interpolation*, Int. J. Numer. Methods Eng. **57** (2003), 509–536.

[4] R. S. Hirsch, *Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique*, J. Comp. Phys. **19** (1975), 90–109.

[5] R. L Taylor O. C. Zienkiewicz, *The finite element methods, vol. 3: Fluid dynamics*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

[6] M. Raja P. C. Jain, *Splitting-up technique for burger's equations*, Indian J. Pure Appl. Math. **10** (1979), 1543–1551.