

SERIES DE POTENCIAS: UNA VENTAJOSA ALTERNATIVA APLICADA A VIBRACIONES LIBRES DE PÓRTICOS

Carlos P. Filipich^{1,2}, Mario R. Escalante^{1,3} y Marta B. Rosales^{1,4}

¹ Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur
Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3200

² Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
11 de abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-0291-4555220 FAX: 0291 4555311
e-mail : dic@frbb.utn.edu.ar

³ Facultad Regional Concepción del Uruguay, Universidad Tecnológica Nacional
Ing. Carlos E Pereyra 676, E3264BTD Concepción del Uruguay, Argentina. TE: 54-03442-425541
e-mail: escalam@frcu.utn.edu.ar, web page: <http://www.frcu.utn.edu.ar>

⁴ Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur
Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3200
e-mail: mrosales@criba.edu.ar, web page: <http://www.uns.edu.ar>
IMA, Universidad Nacional del Sur
CONICET

Palabras clave: Series de Potencias, Vibraciones naturales, Pórticos Planos.

Resumen. *La solución (formas modales) para el problema de vibraciones libres de pórticos planos, poligonales abiertos está gobernada por ecuaciones trascendentes. Al resolver este problema por el método de rigidez, se divide cada tramo en elementos con aproximación algebraica. Para obtener mayor precisión debe aumentarse el número de elementos y consecuentemente el número de incógnitas.*

Es entonces que el caso de series de potencias para simular la forma modal de cada tramo sin aproximaciones, es decir con precisión arbitraria, tiene la ventaja que sólo exige la continuidad estática y geométrica en los nudos comunes, el número de incógnitas es solamente tres, para cualquier tipo de vinculación del pórtico poligonal. Varios Ejemplos numéricos completan esta presentación

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se propone una alternativa para encontrar las frecuencias naturales y formas modales de pórticos planos abiertos simulando, mediante series de potencias, las formas modales trascendentes con la precisión deseada.

El aporte que brinda esta herramienta mediante las conocidas series algebraicas es la sistematización de los algoritmos de recurrencias al imponer el cumplimiento de los sistemas diferenciales, lineales o no^{1,2}, así como abordar mediante la automatización de los productos de series los problemas de coeficientes variables y de no linealidades funcionales.

En el apéndice A se desarrollan brevemente las expresiones generales de estas conocidas series de potencias y se complementan con algunas propiedades. En este trabajo se las aplica a problemas de borde.

Tanto para pórticos de barras uniformes como variables, este reemplazo de la forma modal de cada barra por una serie de potencias, permite imponiendo la continuidad geométrica y estática en cada unión de barras consecutivas, hallar las frecuencias naturales de estos tipos estructurales, con sólo plantear un determinante característico de 6×6 para todos los casos de vinculación. Claro es que este determinante algebraico en el autovalor es de alto orden puesto que proviene de la recurrencia diferencial y cada coeficiente de la serie depende del mismo. Pero un simple método de bisección elimina esta problemática aproximando cada frecuencia a través de la nulidad del determinante aludido. Podemos entonces consignar que el número de incógnitas – cualquiera sea la cantidad de tramos del pórtico abierto – es a lo sumo seis.

Comparando la herramienta que presentamos con el Método de Rigidez³, observamos que éste debe subdividir cada tramo del pórtico, con el inconveniente de crear tres incógnitas por nudo, al aceptar una aproximación cúbica para la forma modal de cada subtramo. Todo lo expuesto se extiende para el caso de barras de directriz curva donde, tanto en el método propuesto como en el de rigidez, debe dividirse el elemento en un número adecuado de tramos rectos.

Varias frecuencias calculadas para un pórtico abierto se presentan indicándose las correspondientes formas modales.

2. PLANTEO DEL PROBLEMA

En la Figura 1 se muestra un pórtico plano abierto ubicado en un sistema de referencia XY . Se introduce además la siguiente nomenclatura:

X, Y : Ejes globales

N : Número de barras

$N + 1$: Número de nodos

(X_i, Y_i) : Coordenadas globales de los nodos ($i = 1, 2, \dots, N + 1$)

a_i ($i = 1, 2, \dots, N$) : longitud de cada barra

x_i, y_i : Ejes locales

$\{(EJ)_i, (EF)_i, (\mathbf{r}F)_i\}$: características mecánicas de cada barra

$$a_i = \sqrt{(X_i - X_{i-1})^2 + (Y_i - Y_{i-1})^2}$$

$$\begin{cases} \cos \mathbf{a}_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{a_i} = c_i \\ \text{sen } \mathbf{a}_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{a_i} = s_i \end{cases}$$

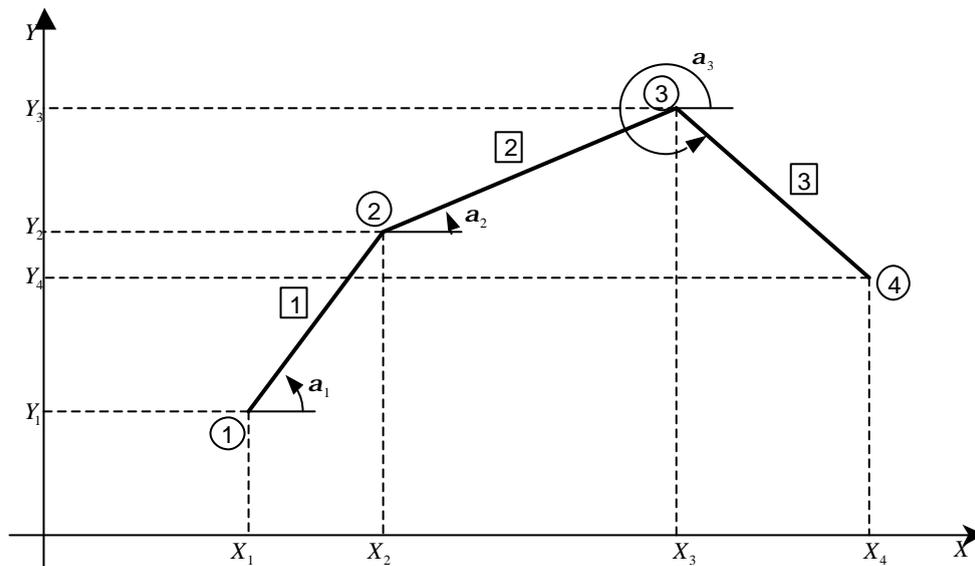


Figura 1: Modelo de pórtico plano abierto.

2.1. Energías

Las expresiones correspondientes a la energía potencial de deformación U y cinética K en función de los desplazamientos u y v , longitudinal y transversal respectivamente son:

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (a) \tag{1}$$

$$K = \sum_{i=1}^N K_i \quad (b)$$

en donde

$$U_i = \frac{1}{2} \left[\int_0^{a_i} \frac{M^2(x_i)}{(EJ)_i} dx_i + \int_0^{a_i} \frac{N^2(x_i)}{(EF)_i} dx_i \right] \tag{2}$$

$$K_i = \frac{1}{2} (\mathbf{r} F)_i \mathbf{w}^2 \int_0^{a_i} (v_i^2 + u_i^2) dx_i \quad (3)$$

$$M(x_i) = -(EJ)_i v_i'' \quad (4)$$

$$N(x_i) = (EF)_i u_i'' \quad (5)$$

y siendo \mathbf{w} único para todo el pórtico. Además es $(\square)'_i = \frac{\partial(\square)}{\partial x_i}$

2.2. Ecuaciones Gobernantes

Las ecuaciones gobernante surgen de plantear el Principio de Hamilton^{4,5}, *i.e.*

$$\mathbf{d}(U - K) = 0 \quad (6)$$

o sea,

$$\sum_{i=1}^N \left((EJ)_i \int_0^{a_i} v_i'' \mathbf{d}v_i'' dx_i + (EF)_i \int_0^{a_i} u_i' \mathbf{d}u_i' dx_i - (E\mathbf{r})_i \mathbf{w}^2 \int_0^{a_i} (v_i \mathbf{d}v_i + u_i \mathbf{d}u_i) dx_i \right) = 0 \quad (7)$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[(EJ)_i v_i' \mathbf{d}v_i' \Big|_0^{a_i} - (EJ)_i v_i''' \mathbf{d}v_i \Big|_0^{a_i} + (EF)_i u_i' \mathbf{d}u_i \Big|_0^{a_i} + \right. \\ & \left. + \int_0^{a_i} \mathbf{d}v_i \left[(EJ)_i v_i'''' - (\mathbf{r}F)_i \mathbf{w}^2 v_i \right] dx_i + \int_0^{a_i} \mathbf{d}u_i \left[(EF)_i u_i'' + (\mathbf{r}F)_i \mathbf{w}^2 u_i \right] dx_i = 0 \right] \quad (8) \end{aligned}$$

De donde, para variaciones arbitrarias se debe cumplir para $i = 1, 2, \dots, N$, que

$$v_i'''' - \Omega_i^2 v_i = 0 \quad (9)$$

$$u_i'' + \left(\frac{\Omega_i}{I_i} \right)^2 u_i = 0 \quad (10)$$

siendo

$$I_i = \frac{a_i}{\sqrt{J_i / F_i}}$$

y además

$$\sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{EJ}{a^2} \right)_i v_i'' \frac{dv_i'}{a_i} \Big|_0^1 - \left(\frac{EJ}{a^3} \right)_i v_i''' dv_i \Big|_0^1 + \left(\frac{EF}{a} \right)_i u_i' du_i \Big|_0^1 \right] = 0 \quad (11)$$

donde hemos adoptado las coordenadas adimensionales en $x_i = \frac{\bar{x}_i}{a_i}$, $v_i(x_i) = \bar{v}_i(a_i x_i)$, en cada barra y

$$\Omega_i^2 = \frac{(rF)_i}{(EJ)_i} \mathbf{w}^2 a_i^4, \quad I_i = \frac{a_i}{\sqrt{(EJ)_i / (EF)_i}}.$$

2.3. Condiciones de continuidad en nodos intermedios

Sea $\Delta \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1}$ el ángulo relativo entre dos barras consecutivas, las tres condiciones geométricas por nudo conducen a

$$v_{i+1}(0) = v_i(1)C - u_i(1)S \quad (a)$$

$$u_{i+1}(0) = v_i(1)S + u_i(1)C \quad (b) \quad (12)$$

$$a_{i+1} v_i'(1) = v_{i+1}'(0) a_i \quad (c)$$

siendo $C = \cos \Delta \mathbf{a}_i$ y $S = \sin \Delta \mathbf{a}_i$

Las variaciones $dv_{i+1}'(0)$, $dv_{i+1}(0)$ y $du_{i+1}(0)$ deducidas de las ecuaciones (12)a,b y c las reemplazamos en (3) obteniendo las condiciones de equilibrio para cada nudo factoréandolas respectivamente y luego deducimos que para cada nudo i -ésimo que:

$$J_{2i+1} v_i''(0) = J_{2i} v_i''(1) \quad (a)$$

$$J_{3i+1} v_i'''(0) = C J_{3i} v_i'''(1) + S F_{1i} u_i'(1) \quad (b) \quad (13)$$

$$F_{1i+1} u_{i+1}'(0) = -S J_{3i} v_i'''(1) + C F_{1i} u_i'(1) \quad (c)$$

donde

$$J_{2i} = \left(\frac{EJ}{a^2} \right)_i; \quad J_{3i} = \left(\frac{EJ}{a^3} \right)_i; \quad F_{1i} = \left(\frac{EF}{a} \right)_i$$

2.4. Series de potencias propuestas

$$\begin{cases} v_i = \sum_{j=0}^M A_{ij} x^j \\ u_i = \sum_{j=0}^M B_{ij} x^j \end{cases} \quad (i=1,2,\dots,N)$$

Reemplazando en (9) y (10), y factorando para cada x^j obtenemos las siguientes ecuaciones de recurrencias

$$A_{i(j+4)} = \frac{\Omega_i^2 A_{ij}}{\mathbf{J}_{4j}} \quad (j=1,2,\dots,M-4) \quad (14)$$

$$B_{i(j+2)} = -\left(\frac{\Omega_i}{I_i}\right)^2 \frac{B_{ij}}{\mathbf{J}_{2j}} \quad (j=1,2,\dots,M-2) \quad (15)$$

$(i=1,2,\dots,N)$

siendo

$$\mathbf{J}_{kj} = (j+1)(j+2)\dots(j+k) = \frac{(j+k)!}{j!}$$

A su vez las condiciones (12) y (13) se escriben como

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{geom} \left\{ \begin{array}{l}
 (v) \Rightarrow A_{(i+1)0} = C \sum_j A_{ij} - S \sum_j B_{ij} \quad (a) \\
 (u) \Rightarrow B_{(i+1)0} = S \sum_j A_{ij} + C \sum_j B_{ij} \quad (b) \\
 (v') \Rightarrow A_{(i+1)1} = \frac{a_{i+1}}{a_i} \sum_j j_{ij} A_{i(j+1)} \quad (c)
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{estát.} \left\{ \begin{array}{l}
 (v'') \Rightarrow A_{(i+1)2} = \frac{J_{2i}}{2J_{2(i+1)}} \sum_j j_{2j} A_{i(j+1)} \quad (d) \\
 (v''') \Rightarrow A_{(i+1)3} = \frac{CJ_{3i} \sum_j j_{3j} A_{i(j+3)} + SF_{1i} \sum_j j_{1j} B_{i(j+1)}}{6J_{3(i+1)}} \quad (e) \\
 (u') \Rightarrow B_{(i+1)1} = \frac{-SJ_{3i} \sum_j j_{3j} A_{i(j+3)} + CF_{1i} \sum_j j_{ij} B_{i(j+1)}}{F_{1(i+1)}} \quad (f)
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (16)$$

con $i = 1, 2, \dots, N$ nudos intermedios.

Por otro lado para los nudos 1 y $N + 1$ las expresiones de ciertas constantes dependerán de las condiciones de borde.

2.5. Condiciones de borde

Pórtico bi-articulado

Nudo 1

En el nudo 1, en $x = 0$ las condiciones de borde $u(0) = v(0) = v''(0) = 0$ permiten determinar, respectivamente las constantes $A_{10} = A_{12} = B_{10} = 0$. Luego quedan por hallar A_{11}, A_{13}, B_{11} . Con estas seis podemos garantizar las ecuaciones diferenciales (9) y (10) en el primer tramo del pórtico través de las recurrencias (14) y (15).

Nudo $N+1$

Para la última barra N , en $x = 1$ se verifican las condiciones del apoyo articulado, de modo que en el nodo $N + 1$ es $u(1) = v(1) = v''(1) = 0$, con lo cual

$$\sum_j A_{Nj} = \sum_j j_{2j} A_{N(j+2)} = \sum_j B_{Nj} = 0$$

Con estas tres condiciones homogéneas obtenemos la ecuación característica que es un sistema lineal homogéneo en A_{11}, A_{13}, B_{11} de donde hallamos los autovalores w .

Pórtico bi-empotrado

Nudo 1:

Para la primera barra, en $x=0$ se verifican las condiciones del apoyo empotrado que son $u(0) = v(0) = v'(0) = 0$, con lo cual resultan $A_{10} = A_{11} = B_{10} = 0$. Las constantes libres (desconocidas) son: A_{12}, A_{13}, B_{11} .

Nudo N+1:

Para la última barra N , en $x=1$ se verifican las condiciones del apoyo articulado, de modo que $u(1) = v(1) = v'(1) = 0$, de donde surgen las condiciones

$$\sum_j A_{Nj} = \sum_j j_{1j} A_{N(j+1)} = \sum_j B_{Nj} = 0$$

Pórtico en ménsula

Nudo 1:

En este caso se verifica para la primera barra en $x=0$, las condiciones del apoyo empotrado, *i.e.*, $u(0) = v(0) = v'(0) = 0$, con lo cual resultan $A_{12} = A_{13} = B_{11} = 0$. De este modo las constantes libres a determinar (desconocidas) son A_{10}, A_{11}, B_{10} .

Nudo N+1:

En el extremo libre $N+1$ de la última barra, se verifica que:

$$\sum_j j_{2j} A_{N(j+2)} = \sum_j j_{3j} A_{N(j+3)} = \sum_j j_{1j} B_{N(j+1)} = 0$$

3. EJEMPLOS

A fin de ilustrar la metodología propuesta, se muestran dos ejemplos de pórticos planos abiertos biarticulados, uno de tres tramos y otro de cuatro tramos. En ambos casos se dan los autovalores hallados y las formas modales correspondientes. Se adoptó barras de sección uniforme con módulo de elasticidad $E = 2.1 \cdot 10^{11} N/m^2$, peso específico $r = 7850 kg/m^3$, sección transversal $F = 0.12 m^2$ y momento de inercia $J = 0.0036 m^4$. Las longitudes de las barras se dan en metros. En las Figuras 2 y 3 se muestran los modelos analizados.

3.1. Ejemplo 1: Pórtico biarticulado de tres tramos

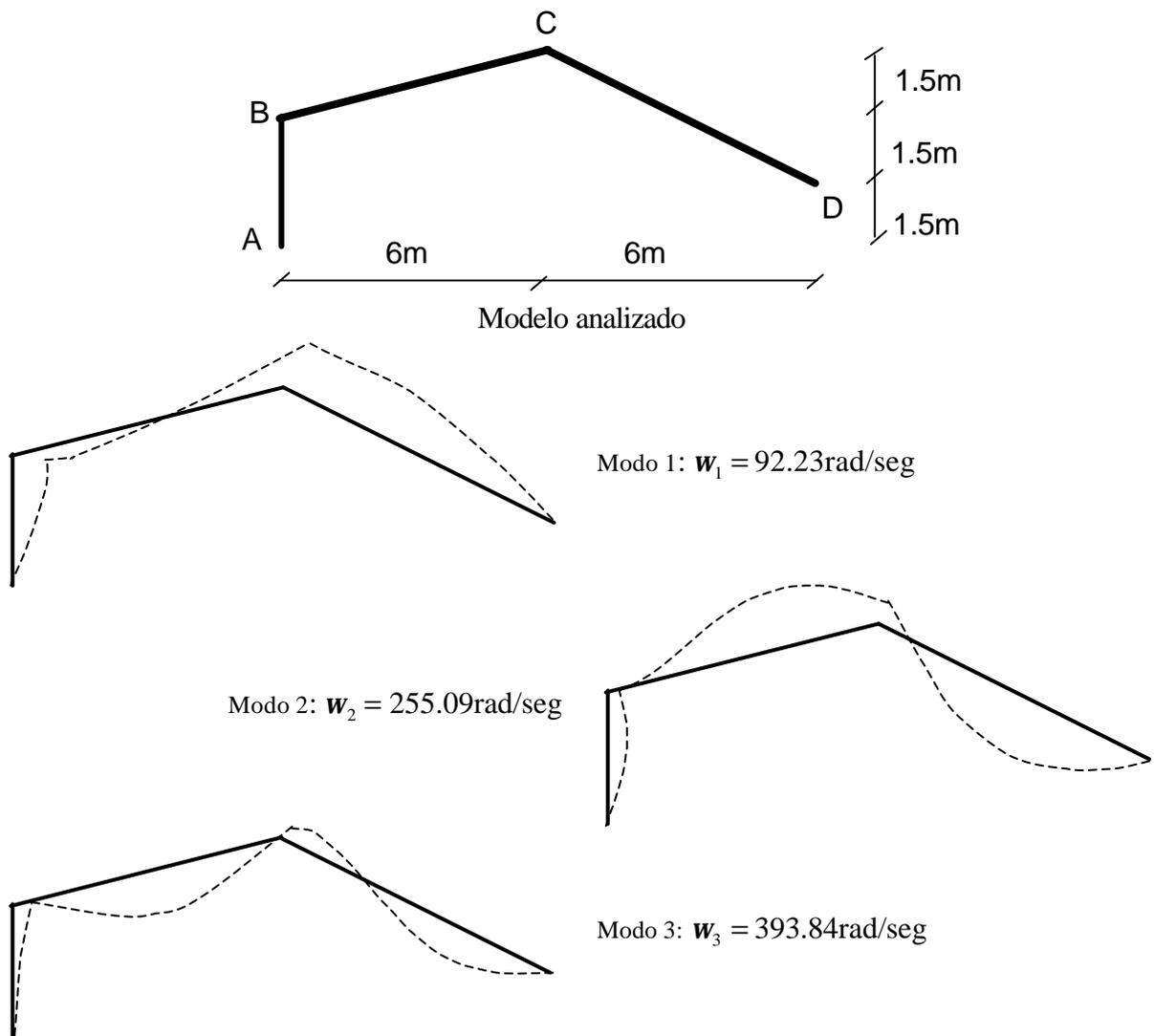


Figura 2 : Formas modales correspondiente a los tres primeros autovalores del pórtico de tres tramos

3.2. Ejemplo 2: Pórtico biarticulado de cuatro tramos

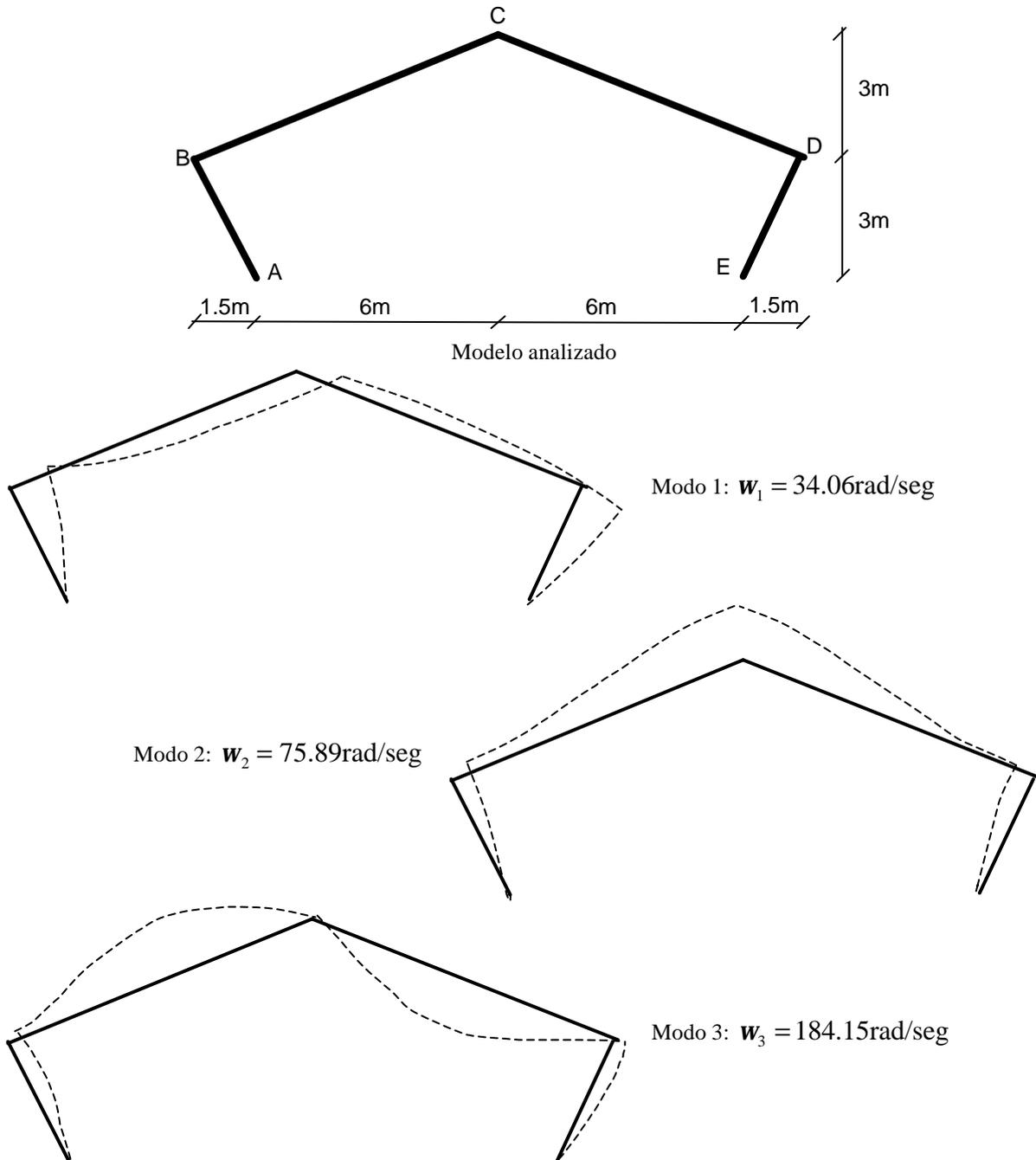


Figura 3 : Formas modales correspondiente a los tres primeros autovalores del pórtico de cuatro tramos

4. COMENTARIOS

Se presentó en este trabajo una alternativa ventajosa para el análisis de las vibraciones libres de pórticos planos abiertos. Se utilizó para ello como herramienta a las conocidas series de potencias. Como pudo verse, en todos los casos el problema de autovalores se redujo siempre a un sistema sencillo de 3×3 cualquiera sea el caso de su vinculación. En estos ejemplos ni siquiera el sistema 6×6 del que hablamos en la INTRODUCCIÓN para condiciones de borde más generales. De pretender resolver este problema por el método de rigidez, el número de incógnitas crece con el número de elementos adoptados para obtener una mayor precisión, no siendo éste el caso de la propuesta aquí presentada.

Es de destacar también, que en todo momento queda librada a la decisión de quien aplique el método de series de potencias, la precisión con que se deben determinar los valores. La elección de la cantidad de términos en que se trunca la serie infinita, otorga la ventaja adicional de fijar en forma arbitraria la precisión, adaptada a las exigencias en cada caso, logrando así también el óptimo rendimiento del recurso computacional.

Los autores han utilizado vastamente este clásico método para abordar problemas de Condiciones Iniciales con fuerte no-linealidades de funciones temporales, en el presente artículo se aplicó a problemas elípticos lineales de Condiciones de Borde, observándose también la versatilidad y ventaja computacional de esta herramienta. Por último es de alguna manera llamativo por qué no se recurre con mayor frecuencia a la metodología presentada para atacar problemas diferenciales ordinarios a coeficientes variables y/o con funcionalidades de alta no-linealidad

5. REFERENCIAS

- [1] C.P. Filipich and M.B. Rosales, "A recurrence solution of strongly non-linear systems," In *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, XXI, 141-149. Eds. A.J. Kassab, D.W. Nicholson and I. Ionescu. Rivercross Publishing, Inc. Orlando. Proceedings, 21st. Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics (SECTAM XXI), Orlando, U.S.A (2002).
- [2] C.P. Filipich, M.B. Rosales and F. Buezas, "Some nonlinear mechanical problems solved with analytical solutions," enviado a *Latin Am Appl Res.* (en prensa) (2002).
- [3] *ALGOR Software*. Versión 12.04 WIN 1999. Pittsburg, USA: Algor Inc.
- [4] Y.C. Fung. *Foundation of Solid Mechanics*. Edit. Prentice Hall of India. Private Ltd. N. Delhi. 1968.
- [5] F.B. Hildebrand. *Methods of Applied Mathematics*. Prentice Hall of India. Private Ltd. N. Delhi. 1968.

APÉNDICE A: SERIES DE POTENCIAS

Consideremos una función continua $f = f(x)$ con $0 \leq x \leq 1$. Escribimos la expansión en series

de potencias como

$$[f] \equiv \sum_{k=0}^N a_{1k} x^k \quad (\text{A.1})$$

y para potencias m -ésimas

$$[f^m] \equiv \sum_{k=0}^N a_{mk} x^k \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (\text{A.2})$$

Para cumplir con la *condición de consistencia algebraica* (C.A.) se debe satisfacer la siguiente relación

$$[f^m] = [f^{m-1}][f] \quad (\text{A.3})$$

Después de reemplazar las series en cada factor de esta ecuación, se obtiene la siguiente expresión de recurrencia

$$a_{mk} = \sum_{p=0}^k a_{(m-1)p} a_{1(k-p)} \quad \text{o} \quad a_{mk} = \sum_{p=0}^k a_{(m-1)(k-p)} a_{1p} \quad (\text{A.4})$$

Ahora expandimos una función analítica $h = \hat{h}(y) = \hat{h}(y(x)) = h(x)$ en series de Taylor

$$\hat{h}(y) = \sum_{m=0}^M \mathbf{a}_m y^m \quad (\text{A.5})$$

donde \mathbf{a}_m son conocidas. En particular, indicamos

$$[1] = \sum_{k=0}^N \mathbf{d}_{0k} x^k \quad (\text{A.6})$$

donde $a_{0k} = \mathbf{d}_{0k}$ y \mathbf{d}_{0k} son los deltas de Kronecker. Si sustituimos la ecuación (A.2) en la ecuación (A.5) (con $y(x) \equiv f(x)$), podemos escribir

$$[h(x)] = \sum_{k=0}^N \mathbf{j}_k x^k \quad \mathbf{j}_k = \sum_{m=0}^M \mathbf{a}_m a_{mk} \quad (\text{A.7})$$

Esta expresión será usada para cualquier función analítica.

Ahora si tenemos una función racional $\hat{F}(y)$

$$\hat{F}(y) = \frac{\hat{g}(y)}{\hat{h}(y)} = \frac{g(x)}{h(x)} = F(x) \quad (\text{A.8})$$

siendo $\hat{g}(y)$ y $\hat{h}(y)$ funciones analíticas y $\hat{h}(0) \neq 0$ y $\hat{g}(y) = \sum_{m=0}^M \mathbf{b}_m y^m$ y \mathbf{b}_m conocidas. Entonces se puede escribir

$$[g(x)] = \sum_{k=0}^N \mathbf{e}_k x^k \quad (\text{a}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_k = \sum_{m=0}^M \mathbf{b}_m a_{mk} \quad (\text{b}) \quad (\text{A.9})$$

Si denominamos

$$[F(x)] = \sum_{k=0}^N \mathbf{I}_k x^k \quad (\text{A.10})$$

Ahora la C.A. debe aplicarse

$$[F(x)][h(x)] = [g(x)] \quad (\text{A.11})$$

$$\left(\sum_{k=0}^N \mathbf{I}_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^N \mathbf{j}_k x^k \right) = \sum_{k=0}^N \mathbf{e}_k x^k \quad \text{donde} \quad \mathbf{e}_k = \sum_{p=0}^k \mathbf{j}_p \mathbf{I}_{(k-p)} \quad (\text{A.12})$$

Los \mathbf{I}_k son desconocidos y los conjuntos \mathbf{j}_k y \mathbf{e}_k son conocidos.

Es evidente que $\mathbf{I}_0 = \mathbf{e}_0 / \mathbf{j}_0$. Ahora la relación de recurrencia para \mathbf{I}_k es

$$\mathbf{I}_k = \frac{\mathbf{e}_k - \sum_{p=1}^k \mathbf{j}_p \mathbf{I}_{(k-p)}}{\mathbf{j}_0} \quad \text{donde} \quad \mathbf{j}_0 \neq 0 \quad \text{y} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Debe notarse que $\mathbf{j}_0 \neq 0$ para que $F(0)$ exista.

También las expansiones pueden efectuarse alrededor de x_0 . En nuestro caso siempre $x_0 = 0$.