

ANÁLISIS DINÁMICO DE VIGAS COMPUESTAS DE PAREDES DELGADAS CON TORSIÓN Y CURVATURA NATURALES

Eduardo Guillermo[†] Marcelo T. Piovan[†] y Víctor H. Cortínez[†]

[†]Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
11 de abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-0291-4555220 FAX: 0291 4555311
e-mail: vcortine@frbb.utn.edu.ar, web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar/gasm>

Palabras clave: Pretorsión. Precurvatura. Vigas. Paredes Delgadas. Anisotropía.

Resumen. *En este artículo se desarrolla una teoría de vigas anisótropas de paredes delgadas que presentan pretorsión y precurvatura. El modelo, que incorpora en una misma concepción analítica la deformabilidad por corte flexional y por alabeo torsional, se deduce empleando el principio de trabajos virtuales, y siguiendo un planteamiento específico en cuanto al análisis seccional. A partir de definir la geométrica en el sistema de coordenadas curvilíneas tridimensionales, se obtienen los tensores métricos y las deformaciones correspondientes. Se plantea, luego, la ecuación del principio de trabajos virtuales en tres dimensiones y se integra en la sección, para transformar las ecuaciones a un sistema unidimensional en función de la coordenada longitudinal. La estrategia computacional adoptada hace uso del método de elementos finitos para el análisis seccional, y posteriormente del método de cuadratura diferencial para resolver el problema unidimensional resultante. El modelo se aplica al análisis de vibraciones libres de los elementos estructurales aludidos.*

1 INTRODUCCIÓN

La determinación de las características dinámicas de vigas pretorsionadas es de gran importancia en el diseño de varios componentes mecánicos tales como álabes de turbinas, compresores, impulsores y álabes de rotores de helicópteros y aerogeneradores, debido fundamentalmente a que la falla de tales elementos se debe frecuentemente al fenómeno de fatiga, cuando los álabes vibran en condiciones cercanas a la resonancia.

Desde el punto de vista de la mecánica de los sólidos, el análisis mecánico de los álabes, es difícil ya que se trata de estructuras geoméricamente complicadas, debiéndose recurrir, para su adecuada caracterización dinámica a modelos de elementos finitos tipo lámina o tridimensionales.

Una forma computacionalmente más eficiente para tratar estos miembros estructurales es la modelización matemática a partir de teorías unidimensionales (teorías de vigas). En ellas, las diferentes magnitudes físicas a estudiar dependen de funciones variables con la longitud de la viga, que definen la cinemática. La complejidad de la formulación matemática dependerá aquí de la cantidad de variables que describen el movimiento de cada punto de la sección.

La literatura sobre miembros estructurales pretorsionados es muy extensa, uno de los primeros investigadores que consideró el efecto de la pretorsión sobre barras fue Love [1] , quien desarrolló ecuaciones que explicaban los fenómenos de acoplamientos encontrados en barras curvadas y pretorsionadas. Rosen [2] condujo una revisión comprensiva sobre este tipo de miembros estructurales. Desde la revisión de Rosen, puede decirse que los estudios de elasticidad tridimensional aparecidos son muy limitados, mayormente dedicados a miembros isótropos y restringidos a análisis elásticos estáticos.

Un enfoque basado en una teoría de elasticidad tridimensional para el estudio de vibraciones libres de vigas pretorsionadas de sección arbitraria pero uniforme fue propuesto por Balhaddad y Onipede [3]. Las ecuaciones de elasticidad y las de movimiento se obtuvieron usando un sistema coordinado rotante con la sección transversal. La relación entre el sistema coordinado cartesiano fijo y el sistema coordinado rotante está basada en la variación del ángulo de pretorsión. De los resultados obtenidos por estos autores puede extraerse como conclusión que las frecuencias de vibraciones torsionales y longitudinales de una viga rectangular, como la estudiada, no son afectadas significativamente por la introducción de una pretorsión. Las formas modales correspondientes a este tipo de vibraciones, en cambio, se ven afectadas más severamente, mostrando acoplamiento entre modos longitudinales y torsionales. Por otro lado, tanto las frecuencias como las formas modales correspondientes a modos flexionales resultan afectados de forma severa y se evidencian acoplamientos entre modos flexionales.

Varios investigadores, en el campo de las vibraciones de álabes de turbinas, han estudiado las características de vibración de álabes rectos y pretorsionados en condiciones rotantes y no-rotantes, usando distintos modelos. Carnegie [4] desarrolló un sistema de ecuaciones que definen el comportamiento dinámico de álabes de sustentación e investigó el efecto de la pretorsión sobre las frecuencias de vibración usando el método de Rayleigh-Ritz. Thomas y col. [5] aplicaron el método de elementos finitos para el análisis de vibración de álabes pretorsionados no uniformes.

Downs [6], estudió el efecto de la pretorsión en las propiedades de rigidez de vigas esbeltas de sección combada. Subrahmanyam y Kaza [7] realizaron un análisis mediante diferencias finitas para estudiar las vibraciones torsionales de vigas empotradas pretorsionadas rotantes y no-rotantes, considerando el efecto de alabeo a través de un enfoque tipo Vlasov , es decir, sin consideración de efectos de inercia rotatoria y de alabeo o deformación por corte.

Un enfoque muy interesante fue propuesto por Washizu [8] quien utilizó un sistema coordinado no ortogonal para describir el estado no deformado de una viga pretorsionada, incluyendo una función de alabeo torsional.

Este enfoque fue aplicado luego por otros investigadores. Hodges [9] lo utilizó para estudiar el efecto de las cargas axiales sobre la torsión de vigas pretorsionadas. También Ohtsuka [10], quien analizó sobre la base de la teoría de Washizu, la despretorsión que producen las fuerzas centrífugas en álabes rotantes y la consecuente distribución de tensiones causadas por aquélla.

Las publicaciones sobre vigas pretorsionadas anisótropas son relativamente escasas. Cesnik y Hodges [11] presentaron una metodología para el análisis seccional de vigas pretorsionadas y precurvadas anisótropas basada en un enfoque de elasticidad tridimensional de geometría no-lineal para pequeñas deformaciones, curvaturas y pretorsión.

Yildirim [12] analizó el comportamiento vibratorio de una viga compuesta pretorsionada basado en la teoría de Timoshenko, considerando curvaturas y efectos de inercia rotatoria y deformación por corte y axial.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo teórico y computacional aplicable al estudio de vigas esbeltas construidas con materiales compuestos. El presente enfoque constituye una generalización de la teoría de Washizu, desarrollado originalmente para el análisis estático de vigas pretorsionadas y precurvadas isotrópicas, en pos de estudiar el comportamiento dinámico de vigas cerradas o abiertas de pared delgada de material compuesto.

La investigación computacional incluye como característica distintiva la utilización de dos métodos numéricos diferentes en distintos niveles de cálculo: el método de elementos finitos (MEF) para el análisis seccional y el método de cuadratura diferencial (MCD), posteriormente, cuya aplicación permite abordar el estudio unidimensional. Así es posible, por tanto, generalizar tanto las características geométricas como elásticas de los miembros estructurales bajo estudio.

Se presentan en este trabajo algunos resultados obtenidos para el problema de vibraciones libres.

2 DESARROLLO TEÓRICO

2.1. Geometría previa a la deformación

Sea el locus de los centroides de las secciones transversales de la viga, una curva en el espacio, representada por:

$$\mathbf{r}_0^{(0)} = \mathbf{r}_0^{(0)}(s) \quad (1)$$

Denominamos con \mathbf{t} al vector unitario tangente a la curva. En la sección transversal de la viga introducimos las direcciones η y ξ coincidentes con los ejes principales de inercia que pasan a través del centroide y definimos los vectores unitarios \mathbf{i}_η e \mathbf{i}_ξ . La relación entre éstos, el vector normal principal \mathbf{n} y el vector binormal \mathbf{b} está dada por la correspondiente transformación de coordenadas, esto es:

$$\mathbf{i}_\xi = \mathbf{n} \cos \vartheta + \mathbf{b} \sin \vartheta \quad (2)$$

$$\mathbf{i}_\eta = -\mathbf{n} \sin \vartheta + \mathbf{b} \cos \vartheta \quad (3)$$

Utilizando la formulación de Frenet es posible obtener el siguiente sistema de ecuaciones, donde las derivadas con respecto a s aparecen primadas.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}'_{\xi} \\ \mathbf{i}'_{\eta} \\ \mathbf{t}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_s & -k_{\eta} \\ -k_s & 0 & k_{\xi} \\ k_{\eta} & -k_{\xi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{\xi} \\ \mathbf{i}_{\eta} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde:

$$k_{\xi} = k_1 \operatorname{sen} \vartheta, \quad k_{\eta} = k_1 \operatorname{cos} \vartheta, \quad k_s = k_2 + \vartheta' \quad (5)$$

y k_1 y k_2 son la curvatura y torsión de la curva, respectivamente. El vector posición de un punto arbitrario $P(0)$ de la viga puede representarse por (Fig.1):

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{r}_0^{(0)} + \xi \mathbf{i}_{\xi} + \eta \mathbf{i}_{\eta} \quad (6)$$

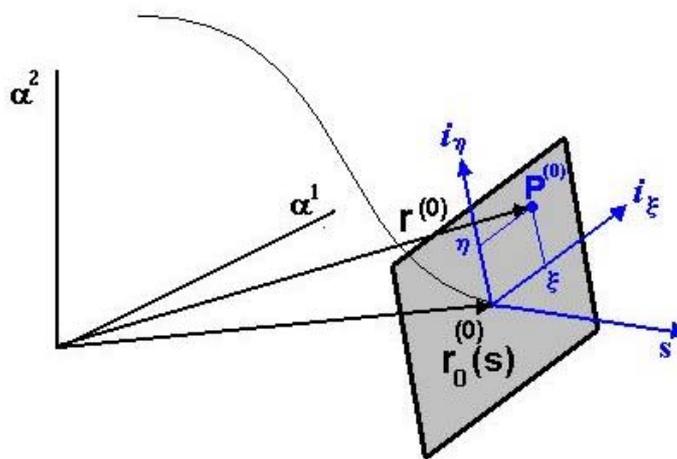


Figura 1

Esto implica que puede utilizarse un conjunto de tres parámetros (ξ, η, s) en coordenadas curvilíneas para especificar la posición del punto durante las deformaciones posteriores. Este sistema

de coordenadas curvilíneas (ξ, η, s) , en general, es no-ortogonal. Utilizaremos cuando convenga notaciones $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ en lugar de (ξ, η, s) .

El tensor métrico covariante en coordenadas curvilíneas puede obtenerse de la Ec.(6) como:

$$g_{\lambda\mu} = (\partial \mathbf{r}^{(0)} / \partial \alpha^\lambda) \cdot (\partial \mathbf{r}^{(0)} / \partial \alpha^\mu) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Utilizando las expresiones (7) y (6) y la expresión (4) obtenemos:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 \\ g_{12} &= 0 \\ g_{13} &= -\eta k_s \\ g_{21} &= 0 \\ g_{22} &= 1 \\ g_{23} &= \xi k_s \\ g_{31} &= -\eta k_s \\ g_{32} &= \xi k_s \\ g_{33} &= (1 - \xi k_\eta + \eta k_\xi)^2 + k_s^2 (\xi^2 + \eta^2) \end{aligned} \quad (8)$$

cuyo determinante viene dado por:

$$\mathbf{g} = |\mathbf{g}_{\lambda\mu}| = (1 - \xi k_\eta + \eta k_\xi)^2 \quad (9)$$

El volumen de un paralelepípedo infinitesimal encerrado por las seis superficies $\alpha^\lambda = cte$ y $\alpha^\lambda + d\alpha^\lambda = cte$ ($\lambda = 1, 2, 3$), está dado por:

$$dV = \sqrt{\mathbf{g}} d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \quad (10)$$

Introducimos aquí un sistema local de coordenadas cartesianas (y_1, y_2, y_3) en el origen del punto $P(0)$. Vamos a notar con \hat{j}_λ al vector unitario correspondiente al eje \mathbf{y}^λ , donde las direcciones de \hat{j}_1, \hat{j}_2 y \hat{j}_3 son elegidas coincidentes con i_ξ, i_η y t de la sección transversal respectivamente. De la relación geométrica :

$$d\mathbf{r}^{(0)} = \sum_{\lambda=1}^3 (\partial \mathbf{r}^{(0)} / \partial \alpha^\lambda) d\alpha^\lambda = \sum_{\mu=1}^3 \mathbf{j}_\mu dy^\mu \quad (11)$$

obtenemos:

$$\frac{\partial \alpha^\lambda}{\partial y^\mu} = \sum_{\kappa=1}^3 g^{\lambda\kappa} \left(\mathbf{i}_\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^\kappa} \right) = \sum_{\kappa=1}^3 g^{\lambda\kappa} \Lambda_{\mu\kappa} \quad (12)$$

donde $g^{\lambda\mu}$ es el tensor métrico contravariante antes de la deformación, que está definido por

$$\sum_{\kappa=1}^3 g^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu} = \delta_\mu^\lambda \quad (13)$$

y δ_μ^λ es el símbolo de Kronecker.

2.2. Tensiones y Deformaciones en Coordenadas Curvilíneas

Luego de la deformación el punto $\mathbf{P}^{(0)}$ se mueve a \mathbf{P} (ver Fig.3.2), el nuevo vector posición estará dado por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{u} \quad (14)$$

donde $\mathbf{u}(\xi, \eta, s)$ es el vector desplazamiento.

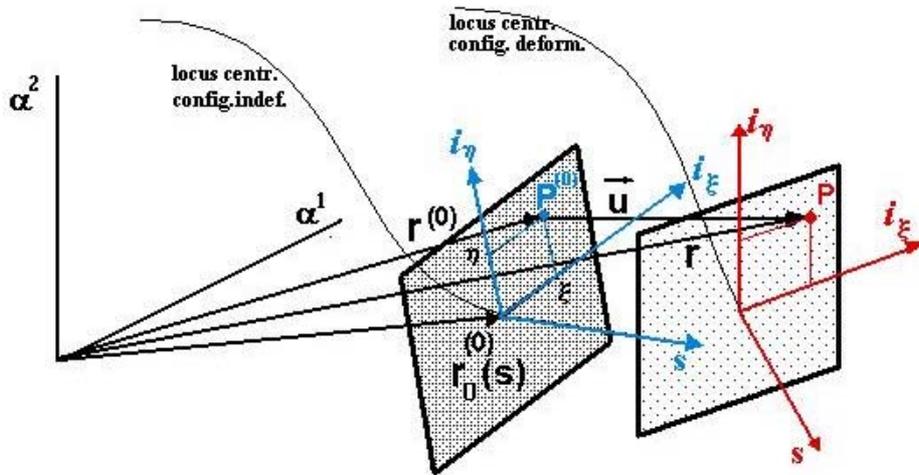


Figura 2

Consideremos ahora las fuerzas internas actuando en el paralelepípedo deformado. La fuerza interna actuante sobre la superficie representada por los lados $(\partial \mathbf{r} / \partial \alpha^2) d\alpha^2$ y $(\partial \mathbf{r} / \partial \alpha^3) d\alpha^3$ estará dada por $\boldsymbol{\tau}^1 \sqrt{g} d\alpha^2 d\alpha^3$ como muestra la Fig.3. Las cantidades $\boldsymbol{\tau}^2$ y $\boldsymbol{\tau}^3$ se definen de manera similar. Entonces, el vector de tensiones $\boldsymbol{\tau}^\lambda$ puede definirse de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau}^\lambda = \tau^{\lambda\mu} G_\mu = \sum_{\mu=1}^3 \tau^{\lambda\mu} (\partial \mathbf{r} / \partial \alpha^\mu) \quad (15)$$

donde $\tau^{\lambda\mu}$ es el tensor de tensiones contravariante.

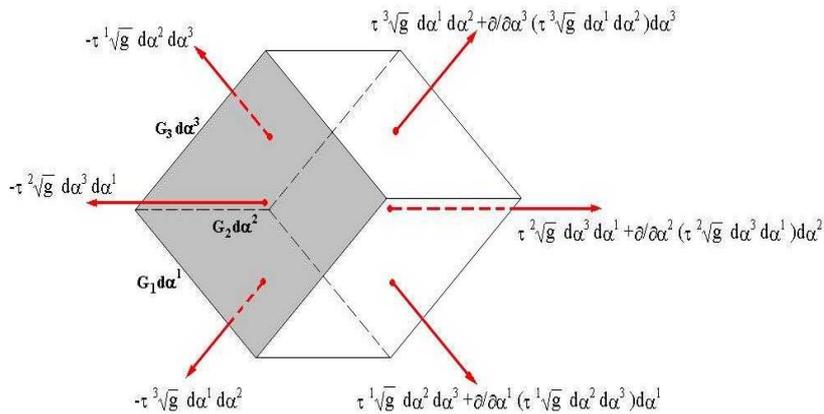


Figura 3

El tensor de deformaciones en coordenadas curvilíneas $f_{\lambda\mu}$ puede definirse como [8] :

$$2 f_{\lambda\mu} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^\lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^\mu} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{r}^{(0)}}{\partial \alpha^\lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^{(0)}}{\partial \alpha^\mu} \right) \quad (16)$$

2.3. Tensiones y Deformaciones en las Coordenadas Cartesianas Locales

Supongamos que las relaciones tensión-deformación del material están dadas en un sistema cartesiano rectangular local en la forma:

$$\sigma^{\lambda\mu} = \sigma^{\lambda\mu}(\mathbf{e}_{\alpha\beta}) \quad , \quad \lambda, \mu, \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (17)$$

donde $\sigma^{\lambda\mu}$ y $e_{\alpha\beta}$ son los tensores de tensión y deformación definidos con respecto al sistema Cartesiano rectangular local. Estos tensores están relacionados con aquellos definidos con respecto al sistema coordenado curvilíneo por las siguientes relaciones(Ref. 8):

$$\sigma^{\lambda\mu} = \sum_{\kappa, \rho=1}^3 \sum \frac{\partial y^\lambda}{\partial \alpha^\kappa} \cdot \frac{\partial y^\mu}{\partial \alpha^\rho} \cdot \tau^{\kappa\rho} \quad (18)$$

$$e_{\lambda\mu} = \sum_{\kappa, \rho=1}^3 \sum \frac{\partial \alpha^\kappa}{\partial y^\lambda} \cdot \frac{\partial \alpha^\rho}{\partial y^\mu} \cdot f_{\lambda\mu} \quad (19)$$

En virtud de estas relaciones, podemos expresar:

$$\sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \sigma^{\lambda\mu} \delta e_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \tau^{\lambda\mu} \delta f_{\lambda\mu} \quad (20)$$

Utilizando los tensores de tensiones y deformaciones definidos, podemos hallar la expresión del trabajo virtual por unidad de volumen de las fuerzas internas actuando sobre el paralelepípedo, esto es:

$$\iiint_V \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \tau^{\lambda\mu} \delta f_{\lambda\mu} \sqrt{g} \, d\alpha^1 \, d\alpha^2 \, d\alpha^3 = \iiint_V \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \sigma^{\lambda\mu} \delta e_{\lambda\mu} \sqrt{g} \, d\alpha^1 \, d\alpha^2 \, d\alpha^3 \quad (21)$$

Vamos a notar las componentes de $\sigma^{\lambda\mu}$ y $e_{\alpha\beta}$ por $(\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\eta\eta}, \sigma_{ss}, \tau_{s\eta}, \tau_{s\xi}, \tau_{\xi\eta})$ y

$(e_{\xi\xi}, e_{\eta\eta}, e_{ss}, e_{s\eta}, e_{s\xi}, e_{\xi\eta})$, respectivamente. Aquí hemos utilizado componentes covariantes para el tensor de tensiones expresado en forma contravariante.

2.4. Hipótesis del modelo

De aquí en adelante nuestro problema estará confinado a la teoría de pequeños desplazamientos de una viga esbelta de sección transversal constante. Adicionalmente se harán dos hipótesis basadas en la esbeltez de la viga:

- las componentes de tensión $\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\eta\eta}$ y $\tau_{\xi\eta}$ se consideran despreciables con respecto a las remanentes.
- el desplazamiento de la viga se adopta de la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = U \mathbf{i}_\xi + V \mathbf{i}_\eta + W \mathbf{t} \quad (22)$$

donde:

$$\begin{aligned} U &= u(s) - \eta \theta_s(s), \quad V = v(s) - \xi \theta_s(s), \\ W &= w(s) + \eta \theta_\xi(s) - \xi \theta_\eta(s) + \alpha(s) \varphi(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (23)$$

Aquí, $\varphi(\xi, \eta)$ es la función de alabo de Saint-Venant, equivalente a la torsión de un eje cilíndrico que tiene la misma sección transversal que la viga bajo consideración ; u, v y w , son los desplazamientos según las direcciones $\mathbf{i}_\xi, \mathbf{i}_\eta$ e \mathbf{i}_s , respectivamente mientras que θ_ξ, θ_η son los giros flexionales con respecto a los ejes coordenados ξ y η , θ_s el giro torsional alrededor del eje s , y α es una variable que representa la magnitud del alabeo. La Figura 4 muestra la notación adoptada.

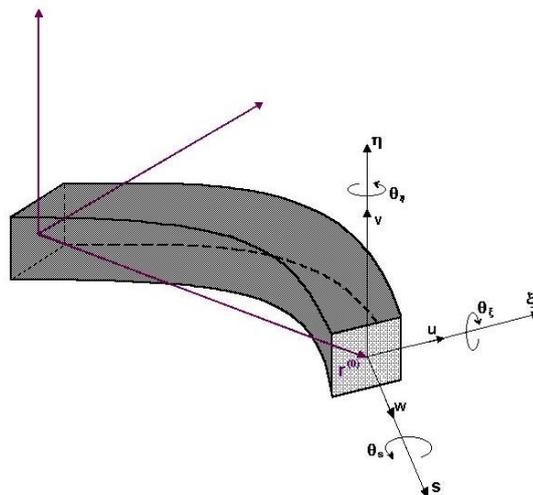


Figura 4

2.5. Análisis de deformaciones

Teniendo en cuenta la segunda hipótesis los grados de libertad de la deformación se restringen a siete funciones de s (y de la variable temporal), que son: $u, v, w, \theta_\xi, \theta_\eta, \theta_s$, y α . Las expresiones (23) permiten tomar en cuenta el efecto del alabeo torsional no uniforme y la deformación por corte flexional y torsional. Utilizando las expresiones (23), (14), (16) y (19) es posible obtener las componentes lineales del tensor de deformación en coordenadas cartesianas locales

$$e_{\xi\xi} = e_{\eta\eta} = e_{\xi\eta} = 0 \quad (24.a)$$

$$\sqrt{g} e_{ss} = \varepsilon_s + \eta \omega_\xi - \xi \omega_\eta + \varphi \alpha' + k_s [(\partial\varphi / \partial\xi)\eta - (\partial\varphi / \partial\eta)\xi] \alpha \quad (24.b)$$

$$2\sqrt{g} e_{s\xi} = \sqrt{g} \gamma_{s\xi} = \varepsilon_\xi - \theta_\eta - \eta \omega_s + [\sqrt{g}(\partial\varphi / \partial\xi) + k_\eta \varphi] \alpha \quad (24.c)$$

$$2\sqrt{g} e_{s\eta} = \sqrt{g} \gamma_{s\eta} = \varepsilon_\eta + \theta_\xi + \xi \omega_s + [\sqrt{g}(\partial\varphi / \partial\eta) - k_\xi \varphi] \alpha \quad (24.d)$$

en estas ecuaciones se han definido:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= u' - k_s v + k_\eta w & \omega_\xi &= \theta'_\xi - k_s \theta_\eta + k_\eta \theta_s \\ \varepsilon_\eta &= v' - k_\xi w + k_s u & \omega_\eta &= \theta'_\eta - k_\xi \theta_s + k_s \theta_\xi \\ \varepsilon_s &= w' - k_\eta u + k_\xi v & \omega_s &= \theta'_s - k_\eta \theta_\xi + k_\xi \theta_\eta \end{aligned} \quad (25)$$

Estas deformaciones coinciden con las obtenidas por Ohtsuka[10].

2.6. Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas a partir del principio de trabajos virtuales. Suponemos que la viga está sujeta a fuerzas externas aplicadas en uno de los extremos, cuyas componentes en las direcciones de $\mathbf{i}_\xi, \mathbf{i}_\eta$ y \mathbf{t} se notan con $\overline{X}_\xi, \overline{X}_\eta$ y \overline{X}_s , respectivamente; fuerzas externas y momentos distribuidos aplicados a lo largo de la viga, notados con $(\overline{Y}_\xi, \overline{Y}_\eta, \overline{Y}_s)$ y $(\overline{T}_\xi, \overline{T}_\eta, \overline{T}_s)$ respectivamente; y fuerzas de volumen notados con F_ξ, F_η y F_s . El principio de trabajos virtuales para este problema puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 & \iiint_V (\sigma_{ss} \delta e_{ss} + \tau_{s\xi} \delta \gamma_{s\xi} + \tau_{s\eta} \delta \gamma_{s\eta}) dV - \\
 & - \iiint_V \left(\mathbf{F}_\xi - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \delta U + \left(\mathbf{F}_\eta - \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) \delta V + \left(\mathbf{F}_s - \bar{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) \delta W - \\
 & - \int_0^l (\bar{Y}_\xi \delta u + \bar{Y}_\eta \delta v + \bar{Y}_s \delta w + \bar{T}_\xi \delta \theta_\xi + \bar{T}_\eta \delta \theta_\eta + \bar{T}_s \delta \theta_s) ds - \\
 & - \iint_S (\bar{X}_\xi \delta U + \bar{X}_\eta \delta V + \bar{X}_s \delta W) d\xi d\eta = 0
 \end{aligned} \tag{26}$$

donde $\bar{\rho}$ es la densidad media del material laminado. Substituyendo las Expresiones (23) en la (26), integrando con respecto a ξ y η , y aplicando finalmente cálculo variacional, es posible obtener las siguientes ecuaciones unidimensionales que gobiernan la dinámica del miembro estructural considerado.

$$-\mathbf{Q}'_\xi + k_s \mathbf{Q}_\eta - k_\eta \mathbf{Q}_s + \bar{\rho} \left(J_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - J_\eta \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial t^2} \right) = \bar{Y}_\xi \tag{27.a}$$

$$-\mathbf{Q}'_\eta + k_\xi \mathbf{Q}_s - k_s \mathbf{Q}_\xi + \bar{\rho} \left(J_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - J_\xi \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial t^2} \right) = \bar{Y}_\eta \tag{27.b}$$

$$-\mathbf{Q}'_s + k_\eta \mathbf{Q}_\xi - k_\xi \mathbf{Q}_\eta + \bar{\rho} \left(J_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + J_\eta \frac{\partial^2 \theta_\xi}{\partial t^2} - J_\xi \frac{\partial^2 \theta_\eta}{\partial t^2} + J_\varphi \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \right) = \bar{Y}_s \tag{27.c}$$

$$-\mathbf{M}'_\xi + k_s \mathbf{M}_\eta - k_\eta \mathbf{M}_s + \mathbf{Q}_\eta + \bar{\rho} \left(J_\eta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + J_{\eta\eta} \frac{\partial^2 \theta_\xi}{\partial t^2} - J_{\xi\eta} \frac{\partial^2 \theta_\eta}{\partial t^2} + J_{\eta\varphi} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \right) = \bar{T}_\xi \tag{27.d}$$

$$-\mathbf{M}'_\eta + k_\xi \mathbf{M}_s - k_s \mathbf{M}_\xi - \mathbf{Q}_\xi + \bar{\rho} \left(-J_\xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - J_{\xi\eta} \frac{\partial^2 \theta_\xi}{\partial t^2} + J_{\xi\xi} \frac{\partial^2 \theta_\eta}{\partial t^2} - J_{\xi\varphi} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \right) = \bar{T}_\eta \tag{27.e}$$

$$-\mathbf{M}'_s + k_\eta \mathbf{M}_\xi - k_\xi \mathbf{M}_\eta + \bar{\rho} \left(-J_\eta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + J_\xi \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_p \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial t^2} \right) = \bar{T}_s \tag{27.f}$$

$$-\mathbf{B}' + \mathbf{M}_a + \bar{\rho} \left(J_\varphi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + J_{\varphi\eta} \frac{\partial^2 \theta_\xi}{\partial t^2} - J_{\xi\varphi} \frac{\partial^2 \theta_\eta}{\partial t^2} + C_w \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \right) = \bar{\mathbf{b}} \tag{27.g}$$

Las condiciones de borde (en $s = 0, L$) serán:

$$\mathbf{Q}_\xi - \overline{\mathbf{Q}}_\xi = 0 \quad \circ \quad \delta u = 0 \quad ; \quad (28.a)$$

$$\mathbf{Q}_\eta - \overline{\mathbf{Q}}_\eta = 0 \quad \circ \quad \delta v = 0 \quad ; \quad (28.b)$$

$$\mathbf{Q}_s - \overline{\mathbf{Q}}_s = 0 \quad \circ \quad \delta w = 0 \quad ; \quad (28.c)$$

$$\mathbf{M}_\xi - \overline{\mathbf{M}}_\xi = 0 \quad \circ \quad \delta \theta_\xi = 0 \quad ; \quad (28.d)$$

$$\mathbf{M}_\eta - \overline{\mathbf{M}}_\eta = 0 \quad \circ \quad \delta \theta_\eta = 0 \quad ; \quad (28.e)$$

$$\mathbf{M}_s - \overline{\mathbf{M}}_s = 0 \quad \circ \quad \delta \theta_s = 0 \quad ; \quad (28.f)$$

$$\mathbf{B} - \overline{\mathbf{B}} = 0 \quad \circ \quad \delta \alpha = 0 \quad ; \quad (28.g)$$

donde se han introducido resultantes de tensión definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\xi &= \iint \tau_{s\xi} d\xi d\eta & \mathbf{M}_\xi &= \iint \sigma_s \eta d\xi d\eta \\ \mathbf{Q}_\eta &= \iint \tau_{s\eta} d\xi d\eta & \mathbf{M}_\eta &= -\iint \sigma_s \xi d\xi d\eta \\ \mathbf{Q}_s &= \iint \sigma_s d\xi d\eta & \mathbf{M}_s &= \iint (\tau_{s\eta} \xi - \tau_{s\xi} \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (29)$$

$$\mathbf{B} = \iint \varphi \sigma_s d\xi d\eta \quad \mathbf{B}_1 = \iint [(\partial\varphi/\partial\xi)\eta - (\partial\varphi/\partial\eta)\xi] \sigma_s d\xi d\eta$$

$$\mathbf{B}_2 = \iint \left\{ \left[\sqrt{g}(\partial\varphi/\partial\xi) + k_\eta \varphi \right] \tau_{s\xi} + \left[\sqrt{g}(\partial\varphi/\partial\eta) - k_\xi \varphi \right] \tau_{s\eta} \right\} d\xi d\eta$$

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{B}_2 + k_s \mathbf{B}_1$$

$$\begin{aligned} \text{y} \\ \overline{\mathbf{Q}}_\xi &= \iint \overline{X}_\xi d\xi d\eta & \overline{\mathbf{M}}_\xi &= \iint \overline{X}_s \eta d\xi d\eta \\ \overline{\mathbf{Q}}_\eta &= \iint \overline{X}_\eta d\xi d\eta & \overline{\mathbf{M}}_\eta &= -\iint \overline{X}_s \xi d\xi d\eta \\ \overline{\mathbf{Q}}_s &= \iint \overline{X}_s d\xi d\eta & \overline{\mathbf{M}}_s &= \iint (\overline{X}_\eta \xi - \overline{X}_\xi \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (30)$$

$$\overline{\mathbf{B}} = \iint \varphi \overline{X}_s \eta d\xi d\eta$$

En las ecuaciones anteriores \mathbf{Q}_s es la fuerza axial, \mathbf{M}_ξ y \mathbf{M}_η son momentos flectores, \mathbf{B} es el bimomento, \mathbf{M}_s el momento torsor, \mathbf{M}_a un esfuerzo generalizado (que para el caso de viga recta es comparable al momento flexotorsor de la teoría de Vlasov). Además, se introdujeron coeficientes definidos por:

$$I_P = J_{\xi\xi} + J_{\eta\eta} \quad (31.a)$$

$$C_w = J_{\varphi\varphi} \quad (31.b)$$

2.7. Ecuaciones Constitutivas para las Resultantes de Tensiones

El espesor de la pared de la viga bajo análisis está compuesta por un número finito de capas individuales. Considerando el hecho de que la dirección del eje de la viga no coincide con la dirección de las fibras en cada una de las capas, las ecuaciones constitutivas para cada lámina pueden escribirse, de la siguiente manera [13]:

$$\sigma_{ss} = \bar{Q}_{11} e_{ss} + \bar{Q}_{12} e_{\xi\xi} + \bar{Q}_{16} \gamma_{s\xi} \quad (32.a)$$

$$\sigma_{\xi\xi} = \bar{Q}_{12} e_{ss} + \bar{Q}_{22} e_{\xi\xi} + \bar{Q}_{26} \gamma_{s\xi} \quad (32.b)$$

$$\tau_{s\xi} = \bar{Q}_{16} e_{ss} + \bar{Q}_{26} e_{\xi\xi} + \bar{Q}_{66} \gamma_{s\xi} \quad (32.c)$$

$$\tau_{\xi\eta} = \bar{Q}_{44}^* \gamma_{\xi\eta} + \bar{Q}_{45}^* \gamma_{s\eta} \quad (32.d)$$

$$\tau_{s\eta} = \bar{Q}_{45}^* \gamma_{\xi\eta} + \bar{Q}_{55}^* \gamma_{s\eta} \quad (32.e)$$

donde los \bar{Q}_{ij} son las componentes de la matriz constitutiva transformada reducida.

Teniendo en cuenta que por hipótesis del modelo $\sigma_{\xi\xi}$ y $\tau_{\xi\eta}$ son despreciables, las (32) se reducen a

$$\sigma_s = \bar{Q}'_{11} e_{ss} + \bar{Q}'_{16} \gamma_{s\xi} \quad (33.a)$$

$$\tau_{s\xi} = \bar{Q}'_{16} e_{ss} + \bar{Q}'_{66} \gamma_{s\xi} \quad (33.b)$$

$$\tau_{s\eta} = \bar{Q}_{55}^* \gamma_{s\eta} \quad (33.c)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{Q}'_{11} &= \bar{Q}_{11} - \frac{(\bar{Q}_{12})^2}{\bar{Q}_{22}}; \quad \bar{Q}'_{16} = \bar{Q}_{16} - \frac{\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26}}{\bar{Q}_{22}}; \\ \bar{Q}'_{66} &= \bar{Q}_{66} - \frac{(\bar{Q}_{26})^2}{\bar{Q}_{22}}; \quad \bar{Q}_{55}^* = \bar{Q}_{55}^* - \frac{(\bar{Q}_{45}^*)^2}{\bar{Q}_{44}^*} \end{aligned} \quad (34)$$

Es importante notar que las ecuaciones (33) toman en cuenta el efecto Poisson. Se podría descartar “a priori” las deformaciones $e_{\xi\xi}$ y $\gamma_{\xi\eta}$ de acuerdo a la expresión (32), con lo cual se obtendrían las mismas expresiones que las (33) pero, en este caso, $\bar{Q}'_{ij} = \bar{Q}_{ij}$, es decir se anularían los segundos términos de las expresiones (34). Sin embargo, esto implicaría despreciar el efecto Poisson que puede

ser importante para materiales compuestos. De acuerdo con esto, las expresiones constitutivas empleadas pueden dar mejores resultados que las enunciadas en el último caso. Este hecho, considerado por Cortínez y Piovan [14], fue demostrado numéricamente por Smith y Chopra [15].

Para posterior conveniencia vamos a definir esfuerzos generalizados adicionales:

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{Q}_\eta k_s - \mathbf{Q}_s k_\eta \quad (35.a)$$

$$\mathbf{Q}_v = -\mathbf{Q}_\xi k_s + \mathbf{Q}_s k_\xi \quad (35.b)$$

$$\mathbf{Q}_w = \mathbf{Q}_\xi k_\eta - \mathbf{Q}_\eta k_\xi \quad (35.c)$$

$$\mathbf{M}_{\theta_\xi} = \mathbf{M}_\eta k_s - \mathbf{M}_s k_\eta + \mathbf{Q}_\eta \quad (35.d)$$

$$\mathbf{M}_{\theta_\eta} = -\mathbf{M}_\xi k_s + \mathbf{M}_s k_\xi - \mathbf{Q}_\xi \quad (35.e)$$

$$\mathbf{M}_{\theta_s} = \mathbf{M}_\xi k_\eta - \mathbf{M}_\eta k_\xi \quad (35.f)$$

$$\mathbf{M}_\alpha = \mathbf{M}_a \quad (35.g)$$

Reemplazando (33.b-d) en (29) y (35) es posible escribir las ecuaciones que relacionan los esfuerzos con las variables de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \mathfrak{R} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

donde \mathfrak{R} es una matriz simétrica de catorce filas por catorce columnas compuesta por cuatro submatrices de siete filas por siete columnas, donde las submatrices de la diagonal principal (\mathbf{A} y \mathbf{D}), resultan simétricas, mientras que $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$. Además, se han utilizado la siguiente notación:

$$\hat{\mathbf{q}} = \{\mathbf{Q}_u, \mathbf{Q}_v, \mathbf{Q}_w, \mathbf{M}_{\theta_\xi}, \mathbf{M}_{\theta_\eta}, \mathbf{M}_{\theta_s}, \mathbf{M}_\alpha\}^T \quad (37.a)$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \{\mathbf{Q}_\xi, \mathbf{Q}_\eta, \mathbf{Q}_s, \mathbf{M}_\xi, \mathbf{M}_\eta, \mathbf{M}_s, \mathbf{B}\}^T \quad (37.b)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \{u, v, w, \theta_\xi, \theta_\eta, \theta_s, \alpha\}^T \quad (37.c)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \{u', v', w', \theta_\xi', \theta_\eta', \theta_s', \alpha'\}^T \quad (37.d)$$

Las componentes de las matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ y \mathbf{D} dependen de las características geométricas seccionales, de la arquitectura de laminación y de las precurvaturas.

Mediante el uso de las ecuaciones (27), (35) y (37) se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas para $u, v, w, \theta_\xi, \theta_\eta, \theta_s$ y α que puede ser expresado en forma matricial como:

$$\left[\mathbf{A} + (\mathbf{B} - \mathbf{C})\Delta^{(1)} - \mathbf{D}\Delta^{(2)} \right] \bar{\mathbf{u}} + \bar{\rho} \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathfrak{S}}^T \quad (38)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ está dada por la expresión (3.50.c) mientras que:

$$\bar{\mathbf{u}} = \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \theta_\xi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \theta_\eta}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \right\} \quad (39)$$

Por otra parte se ha definido

$$\bar{\mathfrak{S}} = \left\{ \bar{\mathbf{Y}}_\xi, \bar{\mathbf{Y}}_\eta, \bar{\mathbf{Y}}_s, \bar{\mathbf{T}}_\xi, \bar{\mathbf{T}}_\eta, \bar{\mathbf{T}}_s, \bar{\mathbf{b}} \right\} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)} &= \frac{d(\cdot)}{ds} \\ \Delta^{(2)} &= \frac{d^2(\cdot)}{ds^2} \end{aligned} \quad (41)$$

3. ANÁLISIS COMPUTACIONAL

La estrategia de cálculo adoptada tiene como característica fundamental la utilización de dos métodos numéricos diferentes a distintos niveles del proceso de cálculo. Esta metodología permite aprovechar las ventajas comparativas de cada método en relación con las incógnitas a determinar y las características de las variables en juego.

En la primera etapa de cálculo, se recurre al método de elementos finitos (MEF) a través del uso del software FLEX-PDE (PDE Solutions) para efectuar el cálculo seccional. Esto es la determinación de las matrices que aparecen en la ecuación (37) y en sus correspondientes condiciones de borde.

Una vez definidas las características seccionales, se realiza el estudio unidimensional de la viga aplicando el método de cuadratura diferencial. Dicho método, es de rápida convergencia (se requieren entre diez y quince elementos para lograr resultados estables) y de muy fácil aplicación.

4. EJEMPLOS NUMERICOS Y RESULTADOS

Con el fin de comparar los resultados obtenidos mediante el presente método se analiza el caso de una viga de sección rectangular de acero con tres pretorsionados diferentes: 0° , 60° y 90° . Los resultados obtenidos por el presente enfoque se comparan con los publicados para vigas pretorsionadas por Imregun y Tsoutrelis [16], mediante funciones de acoplamiento por respuesta en frecuencia (matrices FRF), basados en la teoría de Timoshenko y adoptando un coeficiente de corte clásico de $5/6$. También se compara con los resultados obtenidos por Subrahmanyam y Kaza en la referencia [17].

La Fig. (5) muestra la geometría de la viga donde $h = 0.005$ m, $b = 0.010$ m, $L = 0.5$ m. Las propiedades del material utilizado son: $E = 207.0$ Gpa, $\nu = 0.3$ y $\rho = 7.85 \times 10^3$ kg/m³.

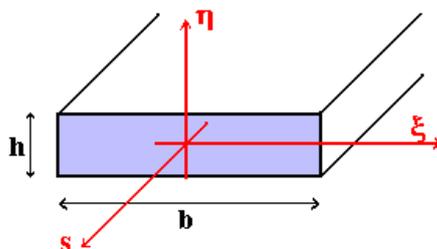


Figura 5

La Tabla (1) muestra las frecuencias obtenidas según el siguiente detalle:

- Caso I: modelo de (FRF) con coeficiente de corte $k=0.851$ [16]
- Caso II: Subrahmanyam y Kaza [17]
- Caso III: Presente enfoque

Los resultados muestran una buena correspondencia con las referencias citadas, con un promedio de diferencia del 0.64% y una diferencia máxima de 0.75%. Todos los valores obtenidos mediante el presente enfoque están por debajo de los utilizados como comparación.

También se analiza el caso de una viga U (canal) construida en acero inoxidable 304. Los resultados se comparan con aquellos obtenidos por Klausbruckner y Pryputniewitz [18] en forma experimental, mediante un interferómetro holográfico láser, aplicando la teoría clásica de Timoshenko y por medio de un modelo de elemento finito tridimensional de 3200 elementos. Los parámetros de comparación están basados en las relaciones dadas por el aspecto de la sección transversal (h/b) y la esbeltez (L/b). Las condiciones de borde establecidas son para el caso de empotrado-libre. Las dimensiones de la viga son: Longitud:

295 mm, Medida del ala (b):6 mm, Alma(h): 27, Espesor: 0.45 mm. Las propiedades del material son E: 190 Gpa, ν : 0.3, ρ : $7.93 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

Tabla 1

FRECUENCIAS NATURALES DE VIGA RECTA DE ACERO PARA DISTINTAS PRETORSIONES (L = 0.5 m , h = 0.005 m, b = 0.010 m)				
ANG.MÁX. DE PRETORSIÓN	Caso	Frecuencias Naturales (Hz)		
		Modos		
		1°	2°	3°
0°	I	166.80	334.20	1045.90
	II	166.90	333.80	1046.00
	III	165.89	331.72	1039.21
60°	I	168.50	321.20	1102.00
	II	168.50	320.80	1101.90
	III	167.48	318.88	1094.48
90°	I	170.10	308.20	1164.60
	II	170.40	307.90	1164.60
	III	169.38	305.93	1156.60

Caso I: modelo de (FRF) con coeficiente de corte $k=0.851$ [16]
 Caso II: Subrahmanyam y Kaza [17]
 Caso III: Presente enfoque

La Tabla (3) muestra las frecuencias obtenidas para la viga U, según el siguiente detalle:

- Caso I: Experimental [18]
- Caso II: Teoría de Timoshenko [18]
- Caso III: Elemento finito tipo placa gruesa [18]
- Caso IV: Presente enfoque

Puede observarse la buena coincidencia entre los resultados experimentales, el modelo de elemento finito tipo placa gruesa de Klausbruckner y col., y el presente enfoque hasta la séptima frecuencia. Claramente el enfoque de Timoshenko se separa de los demás resultados a medida que el número de frecuencia aumenta. A partir de la novena frecuencia natural, el presente enfoque da resultados más bajos que el modelo de elementos finitos, manteniéndose más cercanos a los obtenidos experimentalmente. La Fig (6) muestra las diferencias en forma cualitativa, donde puede observarse la tendencia de cada enfoque.

Por último se analiza una viga recta de material grafito-epoxy, de ocho láminas con dos tipos de laminados, bending stiff (BS) $[02 / \pm 30]$ y quasi-isotropic (QI) $[0/\pm 45/90]$. Los resultados se compararan con aquellos obtenidos por Wu y Sun [19] con un elemento finito tipo viga, y el programa MARC [19]. Las propiedades del material utilizado para el cálculo son las siguientes: $E_1 = 128.0$, $E_2 = 11.0$ Gpa, $G_{12} = 4.48$ Gpa, $\nu_{12} = 0.25$, $\rho = 1.5 \times 10^3$

kg/m³.

La geometría de la sección transversal está dada por $b=76$ mm y $h=0.13$ mm, con una longitud de viga de 608 mm.

<i>FRECUENCIAS NATURALES PARA LA VIGA U</i> <i>(L=295, b=6, h=27)</i>				
<i>Frecuencia</i>	<i>Caso (I)</i>	<i>Caso (II)</i>	<i>Caso (III)</i>	<i>Caso (IV)</i>
<i>1</i>	<i>55.10</i>	<i>54.3</i>	<i>57.9</i>	<i>53.16</i>
<i>2</i>	<i>102.10</i>	<i>112.5</i>	<i>102.90</i>	<i>101.76</i>
<i>3</i>	<i>314.70</i>	<i>331.5</i>	<i>321.80</i>	<i>320.29</i>
<i>4</i>	<i>337.70</i>	<i>506.2</i>	<i>354.80</i>	<i>332.61</i>
<i>5</i>	<i>446.80</i>	<i>913.2</i>	<i>453.90</i>	<i>437.14</i>
<i>6</i>	<i>861.90</i>	<i>1308.2</i>	<i>887.60</i>	<i>928.89</i>
<i>7</i>	<i>1113.90</i>	<i>1779.6</i>	<i>1147.90</i>	<i>1096.84</i>
<i>8</i>	<i>1335.90</i>	<i>2514.1</i>	<i>1320.40</i>	<i>1813.32</i>
<i>9</i>	<i>1624.30</i>	<i>2935.4</i>	<i>2935.40</i>	<i>1895.35</i>
<i>10</i>	<i>1842.80</i>	<i>4124.3</i>	<i>4124.30</i>	<i>2079.89</i>

Caso I: Experimental
Caso II: Teoría de Timoshenko
Caso III: Elemento finito tipo placa gruesa
Caso IV: Presente enfoque

Tabla 3

COMPARACION DE FRECUENCIAS NATURALES PARA VIGA U (EMP-LIB) CON RESPECTO A KLAUSBRUCKNER
(L=0.295, h=0.027, b=0.006, e=0.00045)

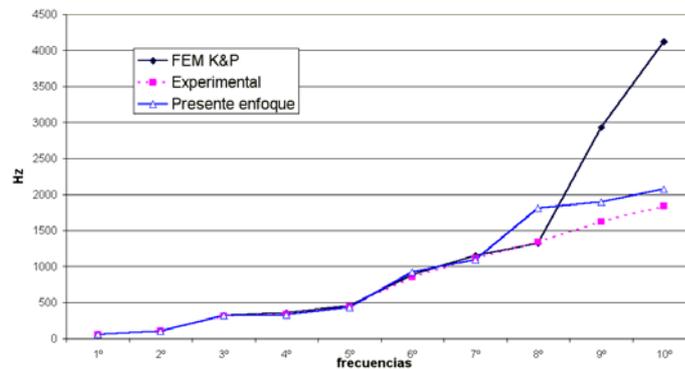


Figura 6

La Tabla (4) y la Figura (7), muestran los resultados obtenidos para la viga anisótropa. Los valores encontrados para los distintos modos guardan una buena aproximación con aquellos obtenidos por Wu y Sun, tanto como para los obtenidos con MARC para los dos tipos de laminados.

FRECUENCIAS PARA DISTINTOS TIPOS DE LAMINADO DE VIGA RECTANGULAR ANISOTROPA (L=608 mm, b=76 mm y h=0.13mm.)				
LAMINADO	MODO	Caso(I)	Caso(II)	Caso(III)
[02/±30] _s (BS)	1ºFLEX	4.056	4.045	4.134
	2ºFLEX	25.16	25.10	24.80
	1ºTORS	26.83	26.82	26.09
	3ºFLEX	70.86	70.67	72.18
	2ºTORS	83.50	83.52	79.061
[02/±45/90] _s (QI)	1ºFLEX	3.408	3.367	3.423
	2ºFLEX	21.33	21.10	21.43
	1ºTORS	37.49	37.35	37.455
	3ºFLEX	59.81	59.09	60.022
	2ºTORS	114.3	113.8	117.58
	2ºFLEX	10.60	9.276	9.286
	3ºFLEX	30.63	25.98	26.00
	1ºTORS	53.90	50.94	47.56
4ºFLEX	62.60	53.54	56.51	

- Caso I: Software MARC [19]
 - Caso II: Modelo de elementos finitos para pared delgada con $\delta=1$ [19]
 - Caso III: Presente enfoque

Tabla 4

Resultados para viga recta de sección rectangular, de material anisótropo, con laminado [02/±30]_s (BS)

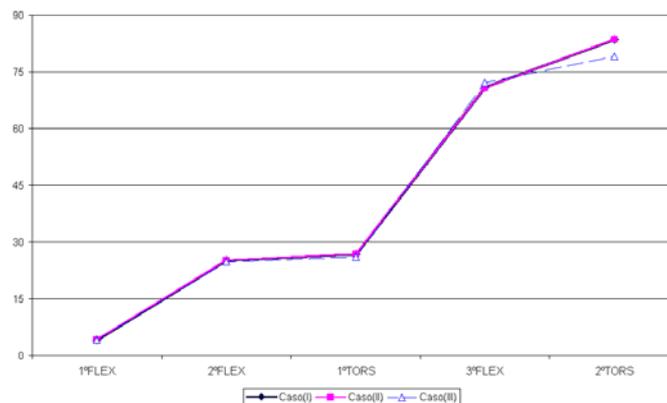


Figura 7

5. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una teoría de vigas anisótropas de paredes delgadas que presentan pretorsión y precurvatura, mediante un modelo que incorpora en una misma concepción analítica la deformabilidad por corte flexional y por alabeo torsional. La estrategia computacional adoptada hace uso del método de elementos finitos para el análisis seccional, y posteriormente del método de cuadratura diferencial para resolver el problema unidimensional resultante. El modelo se aplicó al análisis de vibraciones libres y se desarrollaron comparaciones exitosas con otros resultados teóricos y experimentales.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido auspiciado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional. V. H. Cortínez desea agradecer el apoyo del CONICET.

Esta investigación forma parte de la tesis de Magíster en Ingeniería de Eduardo Guillermo.

REFERENCIAS

1. A.E.Love, 1927, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press 4th. Edition, pp. 529-543
2. A.Rosen, 1991, *Structural and Dynamic Behavior of Pre-Twisted Rods and Bars*, Applied Mechanics Reviews, Vol.44, pp.483-515
3. A.S.Balhaddad and D.Onipede, 1998, *Three-Dimensional Free Vibration of Pretwisted Beams*, AIAA Journal, Vol.36, pp.1524-1528
4. W.Carnegie, 1959, *Vibrations of Rotating Cantilever Bladig: Theoretical Approaches to the Frecuency Problem Based on Energy Methods*, Journal of Mechanical Engineering Science , Vol.1, pp 235-240
5. J.Thomas, E.Dokumaci and w. Carnegie, 1972, *Finite Elements Analysis of Coupled Vibration of Tapered Twisted Blades*, International Conference on Variational Methods, Southampton, England
6. B.Downs, 1979, *The Effect of Substantial Pretwist on the Stiffness Properties of Thin Beams of Cambered Section*, Journal of Applied Mechanics, June, Vol.46, pp. 341-344
7. K.B.Subrahmanyam and K.R.V.Kaza, 1985, *Finite Difference Analysis of Torsional Vibrations of Pretwisted, Rotating Cantilever Beams whit Effect of Warping*, Journal of Sound and Vibration, 99, pp. 213-224
8. K.Washizu, 1964, *Some Considerations on a Naturally Curved and Twisted Slender Beams*, Journal of Mathematics and Physics, Vol.43, No.2, pp.111-116
9. D.H.Hodges, 1980, *Torsion of Pretwisted Beams Due to Axial Loading*, Journal of Applied Mechanics, Vol.47, pp.393-397
10. M.Ohtsuka, 1975, *Untwist of Rotating Blades*, ASME Journal of Engineering for Power, Vol.97, pp.180-187
11. C.Cesnik and D.Hodges, 1993, *Variational-Asymptotical Analysis of Initially Curved and Twisted*

- Composite Beams*, Applied Mechanics Review, Vol.46(11),pp.211-220
12. V.Yildirim, 1999, *Governing Equations of Initially Twisted Elastic Space Rods Made of Limited Composite Material*, International Journal of Engineering Science, Vol.37, pp.1007-1035.
 13. Ever J. Barbero, 1999, *Introduction to Composite Materials Design*, Taylor and Francis, Philadelphia
 14. V.H. Cortínez y M.T. Piovan, 2002, *Vibration and Buckling of Composite Thin-Walled Beams with Shear Deformability*, Journal of Sound and Vibration, 258 (4), 701-723.
 15. E.C.Smith and I.Chopra, 1991, *Formulation and Evaluation of an Analytical Model for Composite Box-Beams*, Journal of American Helicopter Society, Vol.36, 3, pp.33-35.
 16. M.Imregun and A.Tsoutrelis,1989, *Numerical Derivation of FRF Matrices for Curved, Twisted and Rotating Beams*, Proc. Instn. Mech. Engrs. Journal of Mechanical Engineering Science, Vol.203, pp.393-401
 17. K.B. Subrahmanyam and K.R.V.Kaza, 1986, *Vibrations and Buckling of Rotating, Pretwisted, Preconed Beams Including Coriolis Effects*, ASME Journal Vibrations, **99 (2)**, pp.213-224
 18. M.J.Klausbruckner and R.J.Pryputniewicz, 1995, *Theoretical and Experimental Study of Coupled Vibrations of Channel Beams*, Journal of Sound and Vibrations, **183(2)**, pp.239-252.
 19. X.X.Wu and C.T.Sun, *Vibration Analysis of Laminated Composite Thin-Walled Beams Using Finite Elements*, AIAA Journal, Vol.**29(5)**, pp.736-742