

## MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ EN COORDENADAS MIXTAS CON MINIMIZACIÓN DE LLENADO

Mario Scheble, Agustín G. Rauschert y José Converti

Centro Atómico Bariloche – Instituto Balseiro  
Av. E. Bustillo 9500, R8402AGP San Carlos de Bariloche, Argentina.  
TE: 54-(02944)-445100–Interno 5101  
e-mail: schele@cab.cnea.gov.ar

**Palabras clave:** Rayleigh-Ritz, análisis modal, síntesis de subestructuras, vibraciones libres, autofrecuencias.

**Resumen.** *En este trabajo se presenta una nueva versión del método de Rayleigh-Ritz en coordenadas mixtas, con funciones de forma “a priori” no admisibles, aplicable a síntesis de subestructuras, para el cálculo de frecuencias y modos naturales de una estructura compleja. La implementación anterior del método en coordenadas mixtas fue desarrollada con el objeto de permitir el uso de las técnicas de ensamblaje de FEM, y optimizar los números de condición de las matrices de cada componente y de la estructura conectada. Sin embargo, la aplicación de esta técnica produce el llenado de las matrices asociadas a cada componente estructural, que originalmente son ralas. Cuando se tratan problemas tridimensionales que implican un elevado número de grados de libertad, las dimensiones de estas matrices se hacen muy significativas, con el consiguiente incremento del costo computacional. Con el propósito de atacar este tipo de situaciones, se propone una definición alternativa de coordenadas mixtas, destinada esta vez a minimizar la cantidad de elementos no nulos de las matrices vinculadas al problema de autovalores asociado. Finalmente, a modo de ilustración, se presenta un ejemplo de aplicación que, debido a las dimensiones de las matrices involucradas, habría sido imposible resolver con las formas anteriores del método.*

## 1 INTRODUCCIÓN

El cálculo de frecuencias y modos normales de grandes estructuras ha dado origen a numerosas publicaciones. En general, los métodos empleados descomponen la estructura en un número finito de componentes (síntesis de subestructuras), que se modelan independientemente. La compatibilidad geométrica con los vecinos se impone en el proceso de ensamblaje.

Uno de los primeros métodos basados en esta idea, conocido como “*síntesis de modos componentes*” (CMS), fue presentado por Hurty *et al.*<sup>1</sup>. Aquí, el campo de desplazamientos de cada subestructura se representa como una combinación lineal de tres clases diferentes de modos: modos de cuerpo rígido, modos restringidos, y modos naturales fijos.

Benfield y Hruda<sup>2</sup> adoptaron el uso de modos libres y empotrados para modelar los modos de vibración de cada componente. Los efectos de los componentes adyacentes se tienen en cuenta mediante la introducción de cargas de inercia y rigidez aplicadas en la frontera.

Otros trabajos exploran la utilización de diversos tipos de modos o combinación de modos (modos no-restringidos, modos de interfaz, modos híbridos, etc.) para la representación de cada subestructura (Goldman<sup>3</sup>, Hintz<sup>4</sup>, MacNeal<sup>5</sup>).

Los trabajos citados anteriormente presentan distintas mejoras, tanto en la elección de los modos que representan cada subestructura, como en la imposición de la compatibilidad geométrica en las fronteras internas y externas. Los métodos clásicos de CMS pueden considerarse como métodos de Rayleigh-Ritz (RRM) que, para representar cada subestructura, utilizan como funciones de forma los distintos modos componentes.

Un enfoque alternativo, es construir funciones de forma admisibles a partir de un conjunto completo de funciones simples (e.g. monomios). Algunos de los primeros trabajos basados en esta idea fueron presentados por Meirovitch y Hale<sup>6</sup>, Meirovitch y Kwak<sup>7</sup> y Hale y Meirovitch<sup>8</sup>.

Siguiendo las mejoras realizadas al método Rayleigh-Ritz aplicado a la síntesis de subestructuras, Jen *et al.*<sup>9</sup> proponen la adopción de funciones de forma simples no-admisibles (monomios) en coordenadas generalizadas, y desarrollan una técnica para la imposición de las condiciones de borde *a posteriori* en una manera sistemática.

Scheble *et al.*<sup>10</sup> presentaron nueva técnica utilizando un cambio de coordenadas generalizadas a coordenadas físicas, que retiene todas las ventajas de las versiones previas de RRM, pero simplifica sustancialmente la imposición de las condiciones de borde internas y externas, mediante un proceso de ensamblaje similar a los utilizados en FEM

En una mejora ulterior Scheble *et al.*<sup>11</sup> implementan una versión en coordenadas mixtas del RRM con funciones de forma no-admisibles *a priori*. Estas nuevas coordenadas se definen con el objeto de evitar el mal condicionamiento de las matrices de transformación, que puede producirse como consecuencia del uso de coordenadas físicas innecesarias.

Este artículo presenta una mejora alternativa al método de síntesis de subestructuras usando la técnica de Rayleigh-Ritz. Se propone un nuevo cambio a coordenadas mixtas, destinado esta vez a minimizar la cantidad de elementos no nulos de las matrices involucradas en el

problema de autovalores asociado al cálculo de frecuencias naturales de una estructura compleja.

## 2 FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ CON FUNCIONES DE FORMA NO ADMISIBLES.

El estudio de las frecuencias y modos naturales de una estructura involucra el siguiente problema de autovalores

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(\mathbf{x}) &= \lambda\rho(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) && \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}u(\mathbf{x}) &= 0 && \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{B}$  son operadores diferenciales lineales autoadjuntos,  $\lambda$  es el autovalor,  $u$  es el campo de desplazamiento,  $\mathbf{x}$  es el vector de coordenadas espaciales,  $\rho$  es la densidad de masa y  $\Omega$  es un dominio acotado in  $\mathbb{R}^d$ ,  $d=1,2,3$ , cuya frontera es  $\partial\Omega$ .

Resolver las Ecs. (1) es equivalente a hallar los valores estacionarios del cociente de Rayleigh

$$R(u) = \frac{[u, u]}{(\sqrt{\rho}u, \sqrt{\rho}u)}, \quad (2)$$

donde  $[ , ]$  indica el producto interno de energía asociado a  $\mathcal{L}$ ,  $( , )$  denota el producto interno usual y  $u$  satisface las condiciones de borde geométricas. El cociente de Rayleigh tiene puntos estacionarios en la autofunciones de Ecs.(1), y los valores estacionarios son los autovalores del sistema<sup>12</sup>.

Consideremos ahora una estructura compuesta ensamblada a partir de  $S$  componentes estructurales simples. En general no es posible encontrar una solución analítica exacta del problema planteado en Ecs. (1). Con el objeto de buscar una solución aproximada, elegimos  $n_k$  funciones de forma locales  $\varphi_i^k(\mathbf{x})$ ,  $i=1, \dots, n_k$ , linealmente independientes, definidas sobre el  $k$ -ésimo componente ( $k=1, \dots, S$ ). Estas funciones se extienden al resto de la estructura de modo tal que se anulen en todo componente  $k' \neq k$ .

Sea  $\mathcal{F}^D$  el espacio de dimensión  $N_D = \sum_{k=1}^S n_k$  generado por las  $\varphi_i^k$

$$\mathcal{F}^D = \langle \varphi_1^1, \dots, \varphi_{n_1}^1; \dots; \varphi_1^k, \dots, \varphi_{n_k}^k; \dots; \varphi_1^S, \dots, \varphi_{n_S}^S \rangle. \quad (3)$$

Las  $\varphi_i^k$  se eligen de un conjunto completo (e g: polinomios, series trigonométricas, etc.) y, en general, no son admisibles, es decir no satisfacen ni las condiciones de borde geométricas, ni la compatibilidad geométrica entre componentes estructurales. Por lo tanto, el supraíndice  $D$  hace referencia a la estructura desconectada.

Llamaremos  $\mathcal{F}^A$  al subespacio  $N$ -dimensional de  $\mathcal{F}^D$  ( $N \leq N_D$ ), formado por todas la

funciones admisible de  $\mathcal{F}^D$ . Supondremos que es posible satisfacer las Condiciones de Borde geométricas y las condiciones de Compatibilidad Geométricas (CBCG) mediante una combinación lineal adecuada de las  $\varphi_i^k$ , y por lo tanto  $N > 0$ .

Si  $\{\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_N\}$  es una base  $\mathcal{F}^A$ , donde cada función está dada por

$$\tilde{\varphi}_i = \sum_{k=1}^S \sum_{j=1}^{n_k} b_{ji}^k \varphi_j^k, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

una función admisible arbitraria  $\bar{u}$  puede expresarse como

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i \tilde{\varphi}_i. \quad (5)$$

La misma función con respecto a la base de  $\mathcal{F}^D$  tendrá un desarrollo

$$\bar{u} = \sum_{k=1}^S \sum_{j=1}^{n_k} p_j^k \varphi_j^k. \quad (6)$$

Los coeficientes  $\tilde{p}_i$  y  $p_j^k$  son las coordenadas generalizadas de  $\bar{u}$  con respecto a las bases de bases de  $\mathcal{F}^A$  y  $\mathcal{F}^D$ , respectivamente. Si agrupamos estos coeficientes en forma de vectores  $\tilde{\mathbf{p}} = \{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_N\}^T$  y  $\mathbf{p} = \{p_1^1, \dots, p_{n_1}^1; p_1^2, \dots, p_{n_2}^2; \dots; p_1^S, \dots, p_{n_S}^S\}^T$ , podrán relacionarse a través de

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{p}}, \quad (7)$$

donde  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N_D \times N}$  es la matriz que se obtiene arreglando los coeficientes  $b_{ji}^k$  de la Ec. (4), de manera tal que

$$[\mathbf{B}]_{n_1 + \dots + n_{k-1} + j, i} = b_{ji}^k \quad (8)$$

donde  $[\ ]_{i,j}$  indica el elemento  $i,j$  de la matriz.

El RRM consiste en encontrar los valores estacionarios del cociente de Rayleigh en  $\mathcal{F}^A$ . Reemplazando las Ecs. (4) y (5) en la Ec. (2), obtenemos

$$R(\tilde{\mathbf{p}}) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{p}_i \tilde{p}_j \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^{n_k} \sum_{m=1}^{n_k} b_{li}^k b_{mj}^k [\varphi_l^k, \varphi_m^k]}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{p}_i \tilde{p}_j \sum_{k=1}^S \sum_{l=1}^{n_k} \sum_{m=1}^{n_k} b_{li}^k b_{mj}^k (\sqrt{\rho} \varphi_l^k, \sqrt{\rho} \varphi_m^k)}, \quad (9)$$

donde hemos usado que  $[\varphi_l^k, \varphi_m^{k'}] = 0$  si  $k' \neq k$ , debido a que las  $\varphi_i^k$  son funciones locales. Los productos internos que aparecen en el numerador y denominador de la Ec. (9) son los

elementos  $l, m$  de las matrices de masa  $\mathbf{M}^k$  y de rigidez  $\mathbf{K}^k$  del  $k$ -ésimo componente estructural

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}^k]_{l,m} &= [\varphi_l^k, \varphi_m^k] \\ [\mathbf{M}^k]_{l,m} &= (\sqrt{\rho} \varphi_l^k, \sqrt{\rho} \varphi_m^k). \end{aligned} \quad (10)$$

Denotaremos  $\mathbf{M}^D$  y  $\mathbf{K}^D$  a las matrices de masa y rigidez de la estructura desconectada, las que poseen la siguiente forma diagonal por bloques

$$\mathbf{M}^D = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}^1] & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & [\mathbf{M}^2] & \cdots & \mathbf{0} \\ Sym & & \ddots & \vdots \\ & & & [\mathbf{M}^S] \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}^D = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}^1] & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & [\mathbf{K}^2] & \cdots & \mathbf{0} \\ Sym & & \ddots & \vdots \\ & & & [\mathbf{K}^S] \end{bmatrix} \quad (11)$$

Usando las Ecs. (11) y (8), el cociente de la Ec. (9) puede escribirse abreviadamente en notación matricial como

$$R(\tilde{\mathbf{p}}) = \frac{\tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{K}^D \mathbf{B} \tilde{\mathbf{p}}}{\tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{M}^D \mathbf{B} \tilde{\mathbf{p}}} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{p}}}{\tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{p}}}, \quad (12)$$

donde

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}^T \mathbf{M}^D \mathbf{B} \quad \text{y} \quad \mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{K}^D \mathbf{B} \quad (13)$$

son las matrices de masa y rigidez de orden  $N \times N$  de la estructura conectada.

Las condiciones que hacen estacionario el cociente de Rayleigh conducen a un sistema de  $N$  ecuaciones algebraicas homogéneas llamado *sistema de Ritz*

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{p}} = \lambda \mathbf{M} \tilde{\mathbf{p}}. \quad (14)$$

Resolviendo este sistema se obtienen  $N$  autovectores  $\tilde{\mathbf{p}}_i$ , que mediante las Ecs. (7) y (6) nos permiten encontrar la aproximación de las  $N$  primeras autofunciones del problema establecido en Ecs. (1). De manera similar, obtenemos la aproximación de los primeros  $N$  autovalores  $\lambda_i$ .

### 3 EL MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ EN COORDENADAS MIXTAS

El desarrollo previo presenta el RRM con funciones de forma no admisibles *a priori* en coordenadas generalizadas, definidas como los pesos del campo de desplazamiento en dichas funciones. La imposición de las CBCG se realiza *a posteriori* en la Ec. (13), post multiplicando las matrices de la estructura desconectada por la matriz  $\mathbf{B}$  y pre multiplicándolas por su transpuesta, en un procedimiento que suele llamarse de reducción de orden.

La implementación práctica de esta versión del método requiere la formulación de un procedimiento sistemático para la construcción de la matriz  $\mathbf{B}^9$ . Sin embargo, el empleo de coordenadas generalizadas conduce a matrices  $\mathbf{B}$  y, en consecuencia,  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{M}$  llenas, con el consiguiente costo computacional.

Para sortear esta dificultad se desarrollaron las versiones del RRM en coordenadas físicas<sup>10</sup> y mixtas<sup>11</sup>, en las cuales, mediante cambios de base adecuados se consigue que la matriz  $\mathbf{B}$  sea rala y booleana. De esta manera, la etapa de reducción de orden puede reemplazarse por el procedimiento habitual de ensamblaje utilizado en FEM. Además, las matrices de la estructura conectada resultan ralas, permitiendo el uso de técnicas específicas de diagonalización (e.g. iteración de subespacios).

En la implementación anterior, las coordenadas mixtas<sup>11</sup> se definieron para lograr una mejora sustancial en el número de condición de las matrices de los componentes.

Como acabamos de mencionar, la utilización de coordenadas mixtas o físicas conduce a un patrón ralo para las matrices de la estructura conectada. Aún así, las matrices elementales a ser ensambladas resultan llenas. En muchos casos esto no representa un problema grave, ya que dichas matrices son relativamente pequeñas. Sin embargo, existen problemas donde la dimensión de las matrices elementales es muy significativa (e.g. problemas tridimensionales), y en dichas situaciones es necesario que éstas también sean ralas.

A continuación se presentará el procedimiento sistemático para la transformación a coordenadas mixtas, y se propone su definición para adecuarlas a la nueva necesidad: minimizar la cantidad de elementos no nulos.

### 3.1 Transformación a Coordenadas Mixtas

Consideremos el  $k$ -ésimo componente estructural. Sea  $S^k$  el subespacio de dimensión  $n_k$  de  $\mathcal{F}^D$  definido como  $S^k = \langle \phi_1^k, \dots, \phi_{n_k}^k \rangle$ , y supongamos que solamente necesitamos imponer CBCG a este componente en  $m_k$  puntos  $\mathbf{x}_i^k$  con  $m_k < n_k$ .

Definiremos una nueva base de  $S^k$ ,  $\{\phi_1^k, \dots, \phi_{m_k}^k, \phi_{m_k+1}^k, \dots, \phi_{n_k}^k\}$ , de tal modo que las primeras  $m_k$  funciones cumplan la condición

$$\phi_j^k(\mathbf{x}_i^k) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, m_k, \quad (15)$$

mientras que las  $n_k - m_k$  restantes satisfagan que

$$\phi_j^k(\mathbf{x}_i^k) = 0 \quad i = 1, \dots, m_k; j = m_k + 1, \dots, n_k. \quad (16)$$

Las condiciones de Ecs. (15) y (16) aseguran que las coordenadas asociadas a las primeras  $m_k$  funciones base son coordenadas físicas.

En efecto, sea  $u^k \in S^k$  una función representada en la nueva base por el vector de coordenadas  $\xi^k = \{\xi_1^k, \dots, \xi_{n_k}^k\}^T$ , es decir

$$u^k = \sum_{j=1}^{n_k} \xi_j^k \phi_j^k. \quad (17)$$

Si evaluamos  $u^k$  en alguno de los puntos  $\mathbf{x}_i^k$ , haciendo uso de Ecs. (15) (16) y (17) obtenemos

$$u^k(\mathbf{x}_i^k) = \sum_{j=1}^{m_k} \xi_j^k \phi_j^k(\mathbf{x}_i^k) + \sum_{j=m_k+1}^{n_k} \xi_j^k \phi_j^k(\mathbf{x}_i^k) = \sum_{j=1}^{m_k} \xi_j^k \delta_{ij} + \sum_{j=m_k+1}^{n_k} \xi_j^k 0 = \xi_i^k \quad i=1, \dots, m_k \quad (18)$$

Por lo tanto, la coordenada  $\xi_i^k$  es el desplazamiento en  $\mathbf{x}_i^k$ .

Estas funciones bases, así definidas, permiten la utilización de la técnicas de ensamblaje de FEM.

Llamando  $\mathbf{A}^k$  a la matriz de cambio de base, ambos conjuntos de funciones están relacionados mediante

$$\phi_i^k = \sum_{j=1}^{n_k} [\mathbf{A}^k]_{ji} \phi_j^k, \quad (19)$$

mientras que la transformación de coordenadas será  $\mathbf{p}^k = \mathbf{A}^k \boldsymbol{\xi}^k$ , donde  $\mathbf{p}^k$  es el vector de coordenadas generalizadas de  $u^k$  en la base original.

La correspondiente relación de coordenadas para la estructura desconectada será

$$\mathbf{p} = \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} \quad (20)$$

donde  $\mathbf{A}$  es la matriz diagonal por bloques construida de la manera usual a partir de las  $\mathbf{A}^k$ , y  $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1^1, \dots, \xi_{n_1}^1; \xi_1^2, \dots, \xi_{n_2}^2; \dots; \xi_1^S, \dots, \xi_{n_S}^S\}^T$ .

Este cambio de base induce la siguiente transformación de congruencia en las matrices de los componentes

$$\mathbf{K}_{\xi}^k = (\mathbf{A}^k)^T \mathbf{K}^k \mathbf{A}^k \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_{\xi}^k = (\mathbf{A}^k)^T \mathbf{M}^k \mathbf{A}^k \quad (21)$$

donde  $\mathbf{K}_{\xi}^k$  y  $\mathbf{M}_{\xi}^k$  son las matrices con respecto a la base de las  $\phi_j^k$ .

Podemos definir ahora una matriz rectangular  $\boldsymbol{\Phi}^k$  de dimensiones  $m_k \times n_k$ , cuyas columnas se obtienen evaluando cada función  $\phi_j^k$  en los puntos  $\mathbf{x}_i^k$  de modo tal que

$$[\boldsymbol{\Phi}^k]_{ij} = \phi_j^k(\mathbf{x}_i^k) \quad i=1, \dots, m_k; j=1, \dots, n_k. \quad (22)$$

En la versión de RRM en coordenadas físicas<sup>10</sup>  $m_k = n_k$  y, en consecuencia,  $\mathbf{A}^k = (\boldsymbol{\Phi}^k)^{-1}$ . Sin embargo, esta relación simple deja de ser válida cuando trabajamos en coordenadas mixtas. En las siguientes secciones desarrollaremos un procedimiento sistemático para construir  $\mathbf{A}^k$  a partir de  $\boldsymbol{\Phi}^k$ , de manera tal que se satisfagan las Ecs. (15) y (16) minimizando la cantidad de

elementos no nulos de la matriz.

### 3.2 Condiciones requeridas por la matriz de transformación

Consideremos la siguiente partición de la matriz  $\mathbf{A}^k$  en dos submatrices  $\mathbf{A}_e^k \in \mathbb{R}^{n_k \times m_k}$  y  $\mathbf{A}_i^k \in \mathbb{R}^{n_k \times (n_k - m_k)}$ , asociadas a las coordenadas físicas y a las nuevas coordenadas generalizadas, respectivamente

$$\mathbf{A}^k = \left[ \mathbf{A}_e^k \mid \mathbf{A}_i^k \right]. \quad (23)$$

$\mathbf{A}_e^k$  está formada con las primeras  $m_k$  columnas de  $\mathbf{A}^k$  y  $\mathbf{A}_i^k$  con las restantes.

Empleando estas definiciones, demostraremos a continuación que las condiciones especificadas en las Ecs. (15) y (16) son equivalentes a

$$\mathbf{\Phi}^k \mathbf{A}_e^k = \mathbf{I}_{m_k} \quad (24)$$

$$\mathbf{\Phi}^k \mathbf{A}_i^k = \mathbf{0}_{m_k \times (n_k - m_k)}. \quad (25)$$

En efecto, utilizando la Ec. (22) para escribir el elemento  $ji$  de la matriz que aparece en el primer miembro de la Ec. (24), tenemos que

$$\left[ \mathbf{\Phi}^k \mathbf{A}_e^k \right]_{ji} = \sum_{l=1}^{n_k} \left[ \mathbf{\Phi}^k \right]_{jl} \left[ \mathbf{A}_e^k \right]_{li} = \sum_{l=1}^{n_k} \left[ \mathbf{A}_e^k \right]_{li} \phi_l^k(\mathbf{x}_j^k), \quad (26)$$

y usando Ec. (19) resulta

$$\left[ \mathbf{\Phi}^k \mathbf{A}_e^k \right]_{ji} = \phi_i^k(\mathbf{x}_j^k). \quad (27)$$

Por lo tanto,  $\phi_i^k(\mathbf{x}_j^k) = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, m_k$ )  $\Leftrightarrow \mathbf{\Phi}^k \mathbf{A}_e^k = \mathbf{I}_{m_k \times m_k}$ .

Similarmente,

$$\left[ \mathbf{\Phi}^k \mathbf{A}_i^k \right]_{ji} = \sum_{l=1}^{n_k} \left[ \mathbf{\Phi}^k \right]_{jl} \left[ \mathbf{A}_i^k \right]_{li} = \phi_{m_k+i}^k(\mathbf{x}_j^k) \quad i = 1, \dots, n_k - m_k \quad (28)$$

y entonces,  $\phi_i^k(\mathbf{x}_j^k) = 0$  ( $i = m_k + 1, \dots, n_k$ ;  $j = 1, \dots, m_k$ )  $\Leftrightarrow \mathbf{\Phi}^k \mathbf{A}_i^k = \mathbf{0}_{m_k \times (n_k - m_k)}$ .

### 3.3 Procedimiento para reducir la densidad de elementos no nulos

La Ec. (24) implica que  $\mathbf{A}_e^k$  es una inversa a derecha de  $\mathbf{\Phi}^k$  y la Ec. (25) implica que las columnas de  $\mathbf{A}_i^k$  pertenecen al núcleo de  $\mathbf{\Phi}^k$ . Estas dos condiciones no determinan  $\mathbf{A}^k$ . Aprovecharemos esta libertad para definir  $\mathbf{A}^k$  de manera que se minimice la cantidad de elementos no nulos. Para lograr esto, propondremos que:

a) las  $\phi_i^k$  asociadas a las coordenadas físicas sean combinaciones lineales únicamente de las primeras  $m_k$  funciones  $\varphi_l^k$

$$\phi_i^k = \sum_{l=1}^{m_k} c_{il}^k \varphi_l^k \quad i = 1, \dots, m_k \quad (29)$$

b) y, las  $\phi_i^k$  asociadas a las nuevas coordenadas generalizadas internas tengan un desarrollo de la forma

$$\phi_i^k = \sum_{l=1}^{m_k} c_{il}^k \varphi_l^k + \varphi_i^k \quad i = m_k + 1, \dots, n_k. \quad (30)$$

Así, según la Ec. (29),  $\mathbf{A}_e^k$  presentará la siguiente partición por bloques

$$\mathbf{A}_e^k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e^k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

donde  $\mathbf{C}_e^k \in \mathbb{R}^{m_k \times m_k}$  y sus elementos son  $[\mathbf{C}_e^k]_{il} = c_{il}^k$ .

Por su parte, la Ec. (30) implica que  $\mathbf{A}_i^k$  admite una partición de la forma

$$\mathbf{A}_i^k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i^k \\ \mathbf{I}_{n_k - m_k} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

donde  $\mathbf{C}_i^k \in \mathbb{R}^{m_k \times (n_k - m_k)}$  y sus elementos son los coeficientes de dicha ecuación.

Para determinar  $\mathbf{C}_e^k$  y  $\mathbf{C}_i^k$  resta imponer las condiciones expresadas en las Ecs. (24) y (25). Para esto efectuamos la partición

$$\Phi^k = \left[ \Phi_L^k \mid \Phi_R^k \right], \quad (33)$$

equivalente a la definida en la Ec. (23). Reemplazando las Ecs (31) y (33) en la Ec. (24), obtenemos

$$\Phi^k \mathbf{A}_e^k = \left[ \Phi_L^k \mid \Phi_R^k \right] \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e^k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \Phi_L^k \mathbf{C}_e^k = \mathbf{I}_{m_k}, \quad (34)$$

de donde resulta

$$\boxed{\mathbf{C}_e^k = (\Phi_L^k)^{-1}} \quad (35)$$

De manera similar, reemplazando las Ecs (32) y (33) en la Ec.(25) tenemos

$$\Phi^k \mathbf{A}_i^k = \left[ \Phi_L^k \mid \Phi_R^k \right] \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i^k \\ \mathbf{I}_{n_k - m_k} \end{bmatrix} = \Phi_L^k \mathbf{C}_i^k + \Phi_R^k = \mathbf{0}_{m_k \times (n_k - m_k)}. \quad (36)$$

Entonces

$$\mathbf{C}_i^k = -(\Phi_L^k)^{-1} \Phi_R^k. \quad (37)$$

Reuniendo los resultados, la matriz  $\mathbf{A}^k$  puede escribirse como

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e^k & \mathbf{C}_i^k \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} (\Phi_L^k)^{-1} & -(\Phi_L^k)^{-1} \Phi_R^k \\ \hline 0 \ \dots \ 0 & 1 \ \dots \ 0 \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ \dots \ 1 \end{array} \right] \quad (38)$$

### 3.4 Esquema del RRM en coordenadas mixtas con minimización del llenado

*Paso 1.* Descomposición de la estructura completa y elección de  $\mathcal{F}^D$ .

*Paso 2.* Cálculo de las matrices de masa y rigidez de cada componente estructural usando la Ec. (10).

*Paso 3.* Elección de un conjunto de  $m_k$  puntos  $\mathbf{x}_i^k$ , adecuado para imponer CBCG en cada componente estructural.

*Paso 4.* Escritura de las matrices  $\Phi^k$  a partir de la Ec.(22), y cálculo de  $\mathbf{A}^k$  utilizando la Ec. (38).

*Paso 5.* Transformación a coordenadas mixtas de las matrices de masa y rigidez obtenidas en el Paso 2 mediante la Ec.(21)

*Paso 6.* Ensamblaje de las matrices de cada componente estructural del paso previo, para obtener las matrices globales de la estructura conectada.

*Paso 7.* Resolver el problema de autovalores para las matrices de masa y rigidez de la estructura conectada.

*Paso 8.* “Desensamblado” de los autovectores, pasaje a las coordenadas generalizadas originales a través de la Ec. (20) y desarrollo de las autofunciones en las funciones base originales  $\varphi_i^k$ , mediante la Ec. (6).

El procedimiento presentado es totalmente sistemático, y sus pasos son los indicados en este resumen. El único punto que requiere una consideración particular es el Paso 4, en el cual debe tenerse la precaución de ordenar las funciones  $\varphi_i^k$  de modo tal que las primeras  $m_k$  sean

las adecuadas para definir las coordenadas físicas. Por ejemplo, si se tratara de un modelo de viga de Euler con funciones de forma monómicas,  $m_k = 4$  y  $\varphi_i^k = x^{i-1}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

#### 4 EJEMPLO ILUSTRATIVO

Como ejemplo de aplicación se calcularon las frecuencias naturales de una viga en voladizo de dimensiones  $1 \times 1 \times 10$ , ensamblada a partir de 10 cubos modelados mediante la Teoría de la Elasticidad Tridimensional. Las funciones de forma locales utilizadas para representar las componentes del campo de desplazamiento  $u, v, w$ , fueron productos de los polinomios de Legendre en las tres variables espaciales  $x, y, z$ . El orden máximo de los polinomios empleados fue 9.

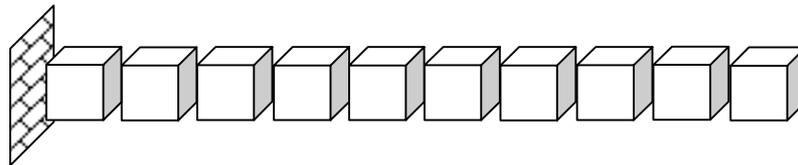


Figura 1: Viga en voladizo ensamblada a partir de 10 cubos.

Este es un buen ejemplo ilustrativo del campo de aplicación del método, ya que, con este orden de polinomios, resultan matrices elementales de dimensión 3000, y un total de 27000 grados de libertad. En el caso de usar coordenadas generalizadas, las matrices de masa y rigidez del problema ensamblado serían llenas, lo que implicaría la tarea imposible de manejar 729 e6 elementos. Aún en el caso de utilizar coordenadas físicas<sup>10</sup> o coordenadas mixtas<sup>11</sup>, una estimación de la cantidad de elementos no nulos del problema sería: Nro. de componentes x Nro. de no ceros del componente =  $10 \times 3000^2 = 90 \text{ e6}$ , ya que las matrices elementales son llenas. Esta cifra a pesar de ser sustancialmente menor, es todavía difícil de manejar.

Tabla 1: Cantidad de elementos no nulos de las diversas matrices asociadas a un componente

	NÚMERO DE NO CEROS	
	Cantidad	Porcentaje
$\mathbf{K}^k$	106.800	1,18
$\mathbf{M}^k$	3.000	0,03
$\mathbf{A}^k$	127.200	1,41
$\mathbf{K}_{\xi}^k$	2.443.520	27,1
$\mathbf{M}_{\xi}^k$	1.089.600	12,1

La Figura 1 muestra un esquema de la viga descompuesta en los cubos utilizados para modelarla. Sobre las caras sombreadas y sus opuestas fueron definidas las coordenadas físicas que se emplearon para imponer las CBCG.

En la Tabla 1 se muestra la cantidad de elementos no nulos de las matrices asociadas a un componente estructural. Como aquí se observa, las matrices en coordenadas generalizadas  $\mathbf{K}^k$  y  $\mathbf{M}^k$  tienen el porcentaje más bajo de elementos no nulos. Sin embargo, si intentáramos imponer las CBCG usando estas coordenadas, obtendríamos matrices llenas para la estructura ensamblada, como se explicó en el párrafo anterior. Podemos notar que, con el cambio de coordenadas propuesto en el presente método a través de la matriz rala  $\mathbf{A}^k$ , se logra mantener una densidad de no ceros razonablemente pequeña en  $\mathbf{K}_\xi^k$  y  $\mathbf{M}_\xi^k$ . La Figura 2 ilustra la distribución de no ceros (zonas oscuras) de ambas matrices

La Tabla 2 nos muestra la cantidad de no ceros de las matrices correspondientes a la estructura ensamblada. El problema de autovalores asociado se resolvió en una PIII de 800Mhz con 768 Mbytes de memoria RAM, utilizando el método de iteración de subespacios. El cálculo de las primeras 30 frecuencias naturales insumió un tiempo de 29 minutos.

Tabla 2: Cantidad de elementos no nulos de las matrices de masa y rigidez de la estructura

	NÚMERO DE NO CEROS	
	Cantidad	Porcentaje
<b>K</b>	11.222.340	3,0
<b>M</b>	5.014.500	1,3

Por último la Tabla 3 muestra las primeras frecuencias naturales calculadas con el presente método comparadas con las obtenidas de las fórmulas elementales de la resistencia de materiales<sup>13</sup>.

Tabla 3: Frecuencias naturales de una viga en voladizo.

MODO	FRECUENCIAS		TIPO DE MODO
	MODELO 3D (PRESENTE MÉTODO)	MODELOS 1D (TIMOSHENKO)	
1	1.011596 e-2	1.01487 e-2	Flexión
2	1.011596 e-2		
3	6.066520 e-2	6.36056 e-2	
4	6.066520 e-2		
5	8.961276 e-2	8.94749 e-2	Torsión
6	1.575224 e-1	1.57079 e-1	Tracción
7	1.597347 e-1	1.78115 e-1	Flexión
8	1.597347 e-1		

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una implementación del método de Rayleigh-Ritz en coordenadas mixtas elegidas de manera de minimizar el llenado que el cambio de base induce en las matrices de cada componente. Este procedimiento es sistemático, y no deja elecciones

libradas al usuario. Esta versión del método retiene las principales ventajas que se derivan del uso de coordenadas físicas, permitiendo resolver casos donde el llenado de las matrices hacía imposible su diagonalización.

En el ejemplo se mostró como, utilizando este método, es posible tratar problemas con una cantidad de grados de libertad importante en un procesador standard.

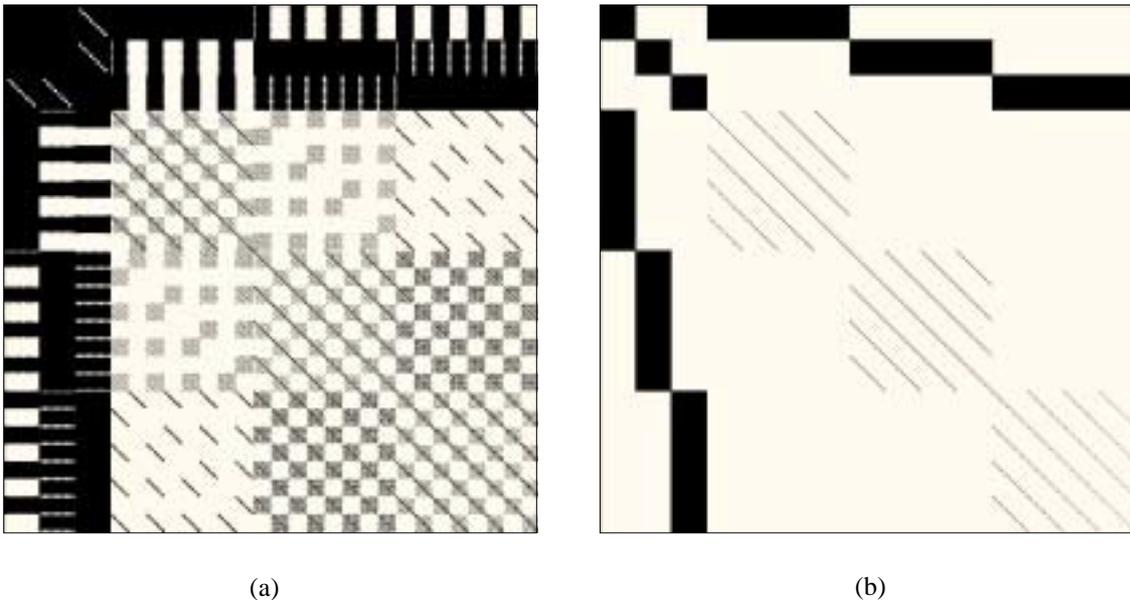


Figura 2: Patrón de no ceros de las matrices de rigidez (a) y masa (b) de un componente estructural

## 6 REFERENCIAS

- [1] W. C. Hurty, "Dynamic analysis of structural systems using component modes", *AIAA Journal*, **3**(4), pp.678-685, 1965.
- [2] W. A. Benfield and R. F. Hruda, "Vibration analysis of structure by component mode substitution", *AIAA Journal*, **9**(7), pp. 1255-1261, 1971.
- [3] R. L. Goldman, "Vibration analysis by dynamic partitioning", *AIAA Journal*, **7**(6), pp. 1152-1154, 1969.
- [4] R. M. Hintz, "Analytical methods in component modal synthesis", *AIAA Journal*, **13**(8), pp. 1007-1016, 1975.
- [5] R. H. MacNeal, "A hybrid method of component mode synthesis", *Comput. Struct.*, **1**(4), pp. 581-601, 1971.
- [6] L. Meirovitch and A. L. Hale, "On the substructure synthesis method", *AIAA Journal*, **19**(7), pp. 940-947, 1981.
- [7] L. Meirovitch and M. K. Kwak, "Rayleigh-Ritz based substructure synthesis for flexible multibody systems", *AIAA Journal*, **29**(10), pp. 1709-1719, 1991

- [8] L. Hale and L. Meirovitch, "A general substructure synthesis method for the dynamics simulation of complex structures", *J. Sound Vibr.*, **69**(2), pp. 309-326, 1980.
- [9] W. Jen, D. A. Johnson and F. Dubois, "Numerical modal analysis of structures based on a revised substructure synthesis approach", *J. Sound Vibr.*, **180**(2), pp.185-203, 1995.
- [10] M. Scheble, C. N. Strizzolo and J. Converti, "A Rayleigh-Ritz substructure synthesis method in physical coordinates for dynamic analysis of structures", *J. Sound Vibr.*, **213**(1), pp. 193-200, 1998.
- [11] M. Scheble, Agustín G. Rauschert and J. Converti, "An Improved Rayleigh-Ritz Substructure Synthesis Method Adopting Mixed Coordinates.", *Int. J. Struct Stab Dyn.*, **3**(4), Dic 2003, in press.
- [12] L. Meirovitch, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff, The Netherlands, 1980.
- [13] S. Timoshenko, D. H. Young and W. Weaver, Jr., *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, Inc., USA, 1974.