

IDENTIFICACIÓN DE MATRICES DE RIGIDEZ AMORTIGUAMIENTO Y MASAS REALES DE EDIFICIOS A PARTIR DE REGISTROS DE ACELERACIONES DURANTE TERREMOTOS INTENSOS

Carlos E. Seguin[†]

[†] Instituto de Investigaciones Antisísmicas “Ing. Aldo Bruschi”
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan
Av. Lib. Gral. S. Martín Oeste 1290 5400 San Juan, Argentina. TE / FAX: 54-0264-428123
e-mail: esequin@unsj.edu.ar, web page: <http://www.fi.unsj.edu.ar/institutos/idia/welcome.htm>

Palabras clave: Identificación de sistemas, modos de vibración, ensayos dinámicos

Resumen. *En la ingeniería sismorresistente los estudios analíticos por sí solos no constituyen un fundamento definitivo para establecer criterios y recomendaciones de diseño. Durante la modelación matemática deben realizarse simplificaciones en cuanto a la geometría, vínculo entre elementos, características de los materiales, etc. En muchas ocasiones es necesario validar los resultados analíticos mediante experimentación. Para alcanzar este objetivo existen dos posibilidades, una de ellas es realizar ensayos dinámicos en modelos a escala o seudo dinámicos en modelos a escala natural. La otra posibilidad es el estudio de estructuras reales sometidas a sismos intensos. En ambos casos se disponen instrumentos de registro en ciertas ubicaciones de la estructura con el objeto de estudiar posteriormente su comportamiento real y compararlo con el estimado analíticamente. En ambos casos es necesario identificar sus características dinámicas reales. La matriz de masas es simple de identificar conociendo adecuadamente la geometría y los pesos unitarios de los materiales. Por el contrario la identificación de la matriz de amortiguamiento y rigidez real no resulta trivial y constituye un capítulo importante dentro de la ingeniería sísmica. En este trabajo se presenta por un lado, el algoritmo de autorrealización con correlación de datos (AAR-CD) en espacio de estado para la identificación de formas periodos y amortiguamientos modales. A partir de ellos es posible identificar sus matrices de rigidez y amortiguamiento reales. Finalmente con ésta metodología se identifican las características dinámicas del USC University Hospital en Los Angeles, California, edificio aislado sísmicamente, durante el terremoto de Northridge (EEUU) ocurrido el 17 de enero de 1994.*

1 INTRODUCCIÓN

En los procesos de identificación de sistemas se trata de construir modelos matemáticos de sistemas dinámicos basados en observaciones de éstos sistemas⁴. Existen dos formas de construirlos, el primero consiste en separar el sistema en componentes cuyo comportamiento es bien conocido, es necesario contar con leyes fundamentales existentes ó experimentación previa, el segundo se basa directamente en medición de entradas y salidas de un sistema (excitación-respuesta). Esto último esquema se conoce como “identificación de sistemas”. Cuando los parámetros que caracterizan al modelo carecen de respaldo físico estamos ante una “caja negra”, si se cuenta con algún respaldo estamos ante una “caja gris”.

La construcción de un modelo requiere de: a)-Tener datos de entrada-salida, b)- un conjunto de modelos factibles, en lo posible basados en consideraciones físicas, c)- definir una algoritmo para escoger el mejor modelo dentro de ésta familia (método de identificación) y d)- un esquema de validación del modelo. Esto implica un proceso iterativo. Éste esquema puede fallar en los siguientes puntos: a)- el método de identificación no es el correcto, b)- el algoritmo numérico puede no alcanzar la solución óptima, c)- la familia de modelos candidatos no es suficientemente buena ó d)- el conjunto de datos es insuficiente.

Las dominios de identificación son dos: a)- dominio de frecuencias y b)- dominio de tiempo. En el primero se trata de identificar la función de transferencia entre la entrada y la salida. En el segundo se intenta identificar la respuesta del sistema ante un impulso, versión en dominio de tiempo de la función de transferencia. Nos concentraremos en el segundo dominio, tratado en espacio de estado⁴.

2 FORMULACIÓN DINÁMICA EN ESPACIO DE ESTADO

Esta formulación ha sido empleada principalmente en la disciplina de control⁴. Se conoce como estado “al conjunto más pequeño de variables, tales que su conocimiento $t = t_0$ y el de la entrada para $t \geq t_0$ determinan el comportamiento para cualquier instante $t \geq t_0$ ”. Este sistema es causal pues es independiente de la historia para todo $t \leq t_0$. Consideremos la siguiente ecuación diferencial escalar:

$$a_n z^{(n)}(t) + \dots + a_i z^{(i)}(t) + \dots + a_1 \dot{z}(t) + a_0 z(t) = cu(t) \quad (1)$$

expresando la derivada de mayor orden en términos de las derivadas de menor orden y mediante un arreglo de las relaciones entre derivadas consecutivas se escribe el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, válido para tiempo continuo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \vdots \\ z^{(i)} \\ \vdots \\ z^{(n)} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0/a_n & \dots & -a_{(i-1)}/a_n & \dots & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}}_{A_c} \underbrace{\begin{bmatrix} z \\ \vdots \\ z^{(i-1)} \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c/a_n \end{bmatrix}}_{B_c} u(t) \quad (2)$$

escrita en un formato compacto se expresa como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{Y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (3)$$

dónde la segunda ecuación se conoce como ecuación de salida. La salida puede ser cualquier variable dependiente, así si $\mathbf{x}(t)$ representa la historia de desplazamientos en un sistema dinámico $\mathbf{Y}(t)$ puede representar la historia de esfuerzos en los distintos elementos que lo componen. Este par de ecuaciones presentado en forma escalar puede extenderse al campo matricial considerando simplemente que las variable \mathbf{x} es ahora un vector de orden $n \times 1$ y los coeficientes \mathbf{a}_i matrices de orden $n \times n$ y la excitación un vector \mathbf{u} de orden $p \times 1$. Así la ecuación dinámica de segundo orden dada por la expresión:

$$\mathbf{m}_e \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{c}_e \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{k}_e \mathbf{z}(t) = -\mathbf{m}_e \mathbf{r} \ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (4)$$

dónde: \mathbf{m}_e = matriz de masas, \mathbf{c}_e = matriz de amortiguamiento, \mathbf{k}_e = matriz de rigidez, \mathbf{z} = grados de libertad, \mathbf{r} = matriz de incidencia o de colocación de la excitación y $\ddot{\mathbf{u}}_g$ = excitación externa, tiene su representación en espacio de estado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}(t) \\ \ddot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{m}_e^{-1} \mathbf{k}_e & -\mathbf{m}_e^{-1} \mathbf{c}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_e^{-1} \mathbf{r} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (5)$$

en las que $\mathbf{0}$ e \mathbf{I} son matrices nulas e identidad de órdenes compatibles. Así, para la ecuación de salida de aceleraciones relativas ($\mathbf{Y}(t) = \ddot{\mathbf{z}}(t)$), se tiene que:

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{m}_e^{-1} \mathbf{k}_e & -\mathbf{m}_e^{-1} \mathbf{c}_e \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \begin{bmatrix} \mathbf{m}_e^{-1} \mathbf{r} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (6)$$

3 ALGORITMO DE AUTOREALIZACIÓN CON CORRELACIÓN DE DATOS

El proceso de identificación se resume a determinar la respuesta al impulso y a partir de ésta, determinar las formas modales, periodos propios de vibración y amortiguamientos modales asociados². Un sistema lineal invariante en el tiempo (LIT) se representa en tiempo discreto en espacio de estado como:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{(k+1)} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_{(k)} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{(k)} \\ \mathbf{y}_{(k)} &= \mathbf{C} \mathbf{x}_{(k)} + \mathbf{D} \mathbf{u}_{(k)}\end{aligned}\quad (7)$$

dónde $\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c T}$; $\mathbf{B} = \mathbf{A}_c^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{I}_{2n \times 2n}) \mathbf{B}_c$, son las matrices de estado discretas, T intervalo de muestreo de la señal, n el número de grados de libertad y el subíndice k representa la respuesta en el instante $t = kT$. La primera de las (7) se puede expresar también como:

$$\mathbf{x}_{(k)} = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_{(0)} + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_{(k-i)} \quad (8)$$

dónde el primer término de la derecha corresponde a la solución de la ecuación diferencial homogénea y el segundo término a la solución particular (convolución en tiempo discreto) para la excitación. Matricialmente puede escribirse como:

$$\mathbf{x}_{(k)} = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_{(0)} + \left[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \right] \left[u_{(k-1)} \quad \dots \quad u_{(0)} \right]^T \quad (9)$$

dónde la matriz $\mathbf{Q}_k = \left[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \right]$ es la matriz de controlabilidad. Se puede demostrar^[1] que el sistema es controlable sii, \mathbf{Q}_k ($2n \times kr$) posee rango $2n$, orden de la matriz de estado \mathbf{A} . Por otro lado, dada la ecuación de salida de las (7) de orden m el sistema es observable sii la matriz de observabilidad \mathbf{P}_k , posee rango $2n$, dónde: $\mathbf{P}_k^T = \left[\mathbf{C} \quad \mathbf{C}\mathbf{A} \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1} \right]$. Note que el sistema puede tratarse modalmente ya que siendo la matriz de estado de rango completo, posee $2n$ valores propios (λ_i) y $2n$ vectores propios independientes (Ψ_i) los que, dado que la matriz \mathbf{A} no es hermitiana resultan complejos conjugados. En este caso se verifica que: $\Psi^{-1} \mathbf{A} \Psi = \Lambda$, con $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_i \quad \dots \quad \lambda_n]$. En éstas condiciones las ecuaciones (7) admiten la transformación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{(k+1)} &= \Lambda \boldsymbol{\eta}_{(k)} + \mathbf{B}_m \mathbf{u}_{(k)} \\ \mathbf{y}_{(k)} &= \mathbf{C}_m \boldsymbol{\eta}_{(k)} + \mathbf{D} \mathbf{u}_{(k)} \end{aligned} \quad (10)$$

dónde $\mathbf{B}_m = \Psi^{-1} \mathbf{B}$, $\mathbf{C}_m = \mathbf{C} \Psi$ y $\boldsymbol{\eta}$ vector de coordenadas modales. Dada una excitación de tipo impulsivo definido como: $u_i(0) = 1$, $u_i(k) = 0$, para $i = 1, \dots, r$ y para $k = 1, 2, \dots$, y sustituyéndola en las (7), se obtiene la secuencia de la respuesta del sistema al impulso unitario:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{y}(0) = \mathbf{D}, \quad \mathbf{Y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B}, \quad \mathbf{Y}_2 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}, \quad \mathbf{Y}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \quad (11)$$

Las matrices constantes \mathbf{Y}_i que se corresponden con la respuesta al impulso del sistema en los tiempos $0, 1, 2, \dots, k$, se conocen como los parámetros de Markov y constituyen la base para identificar las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , y \mathbf{D} . Ésta identificación se conoce como realización. Note que existen infinitas realizaciones que poseen la misma relación entrada-salida y esto se debe a que existen infinitas transformaciones de similaridad sobre la matriz \mathbf{A} . Con la realización mínima se obtiene el modelo en espacio de estado cuyo conjunto de valores propios corresponde a los del sistema real. Así dada una matriz de estado \mathbf{A} , de orden $2n$, con un conjunto de vectores propios Ψ , linealmente independientes y su conjunto de valores propios Λ asociados, no necesariamente distintos, la realización en términos de \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , puede transformarse en la realización Λ , \mathbf{B}_m , \mathbf{C}_m , \mathbf{D} , en la que la matriz diagonal Λ , contiene las frecuencias amortiguadas y cantidades de amortiguamiento de los modos de vibración en tiempo discreto. La matriz \mathbf{B}_m define el valor inicial de la amplitud de los modos y la matriz \mathbf{C}_m la forma modal en los puntos dónde se ha obtenido un registro de la respuesta del sistema.

La frecuencia y amortiguamiento del sistema continuo se obtiene con: $\Lambda_c = \ln(\Lambda)/T$.

Es importante destacar que la transformación de tiempo discreto a continuo tampoco es única. Dado que la parte imaginaria del logaritmo natural de un número complejo que difiere en $2\pi/T$, no se puede distinguir cuando se observa en una señal muestreada a intervalos de tiempo constantes T . Este problema se resuelve en forma práctica con intervalos de muestra T suficientemente pequeños o con el uso de un filtro que prevenga la aparición de frecuencias más allá de las establecidas en el teorema de Nyquist.

La realización del sistema comienza con la construcción de la matriz generalizada de Hankel de orden $\alpha m \times \beta r$:

$$\mathbf{H}_{(k-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta-1} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{k+\alpha-1} & \mathbf{Y}_{\alpha+1} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} \quad \text{con } k = 1; \quad \mathbf{H}_{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \cdots & \mathbf{Y}_\beta \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \cdots & \mathbf{Y}_{\beta+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_\alpha & \mathbf{Y}_{\alpha+1} & \cdots & \mathbf{Y}_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

en los que \mathbf{Y}_k son matrices de orden $m \times r$, cuyas columnas son los parámetros de Markov. Dado que $\mathbf{Y}_{(0)} = \mathbf{D}$ no está incluida en $\mathbf{H}_{(0)}$, si $\alpha \geq 2n$ y $\beta \geq 2n$, la matriz generalizada de Hankel posee rango superior a $2n$. Descomponiendo la matriz $\mathbf{H}_{(k-1)}$ en tres matrices, se verifica de acuerdo a la (11) y teniendo en cuenta la definición de \mathbf{P} y \mathbf{Q} , que:

$$\mathbf{H}_{(k-1)} = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_\beta \quad (13)$$

A partir de éstas ecuaciones básicas puede establecerse el AAR operando con $\mathbf{H}_{(0)}$, sin embargo, dado que en general las señales poseen ruido debido a una serie de factores externos y propios de los equipos, es preferible emplear el AAR-CD que se presenta a continuación.

Básicamente, ambos algoritmos (AAR y AAR-CD), se desarrollan en forma similar sólo que el algoritmo AAR-CD requiere de la definición de una matriz cuadrada de orden $\gamma = m\alpha$, donde m es el número de salidas. Esta matriz, obtenida por la correlación entre dos matrices de Hankel está dada por:

$$\mathbf{R}_{\text{hh}(k)} = \mathbf{H}_{(k)} \mathbf{H}_{(0)}^T \quad (14)$$

La matriz resultante $\mathbf{R}_{\text{hh}(k)}$ es de menor tamaño que la matriz generalizada de Hankel. En particular, si $k = 0$:

$$\mathbf{R}_{\text{hh}(0)} = \mathbf{H}_{(0)} \mathbf{H}_{(0)}^T \quad (15)$$

La (15) es simétrica y sus términos son las auto-correlaciones de los parámetros de Markov en la diagonal principal y la correlación cruzada de las salidas fuera de la diagonal. Así si el ruido presente en los parámetros de Markov no se encuentra correlacionado, la matriz de correlación $\mathbf{R}_{\text{hh}(0)}$ contiene menor nivel de ruido que la matriz generalizada de Hankel $\mathbf{H}_{(0)}$. A

partir de la (15) y de acuerdo a la ecuación (13) se verifica que:

$$\mathbf{R}_{hh(k)} = \mathbf{H}_{(k)} \mathbf{H}_{(0)}^T = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^k \mathbf{Q}_\beta \mathbf{Q}_\beta^T \mathbf{P}_\alpha^T = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^k \mathbf{Q}_c \quad (16)$$

A partir de éstas matrices se puede construir la matriz de correlación de Hankel de orden ξ x ζ , como:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{(k)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{hh(k)} & \mathbf{R}_{hh(k+\tau)} & \cdots & \mathbf{R}_{hh(k+\zeta\tau)} \\ \mathbf{R}_{hh(k+\tau)} & \mathbf{R}_{hh(k+2\tau)} & \cdots & \mathbf{R}_{hh(k+(\zeta+1)\tau)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{hh(k+\xi\tau)} & \mathbf{R}_{hh(k+(\xi+1)\tau)} & \cdots & \mathbf{R}_{hh(k+(\xi+\zeta)\tau)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\alpha & \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^\tau & \cdots & \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{\xi\tau} \end{bmatrix}^T \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_c & \mathbf{A}^\tau \mathbf{Q}_c & \cdots & \mathbf{A}^{\zeta\tau} \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} = \mathbf{P}_\xi \mathbf{A}^k \mathbf{Q}_\zeta \end{aligned} \quad (17)$$

dónde τ es el corrimiento en el tiempo entre ambas matrices. En particular para $k = 0$:

$$\mathbf{H}_{(0)} = \mathbf{P}_\xi \mathbf{Q}_\zeta \quad (18)$$

Asumamos ahora que existe una matriz \mathbf{H}^\dagger , tal que satisfaga la relación:

$$\mathbf{Q}_\zeta \mathbf{H}^\dagger \mathbf{P}_\xi = \mathbf{I} \quad (19)$$

el superíndice \dagger , significa pseudo inversa e \mathbf{I} matriz identidad, así se cumple que:

$$\mathbf{H}_{(0)} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}_{(0)} = \mathbf{P}_\xi \mathbf{Q}_\zeta \mathbf{H}^\dagger \mathbf{P}_\xi \mathbf{Q}_\zeta = \mathbf{P}_\xi \mathbf{Q}_\zeta = \mathbf{H}_{(0)} \quad (20)$$

lo que implica que: $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}_{(0)}^\dagger$, admitiendo $\mathbf{H}_{(0)}$ descomposición en valores singulares, como:

$$\mathbf{H}_{(0)} = \mathbf{R} \mathbf{\Sigma} \mathbf{S}^T \quad (21)$$

dónde:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ en la que } \mathbf{\Sigma}_n = \text{diag}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]; \text{ con } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n, \text{ dado que ésta matriz}$$

tiene rango $2n$, verifica que: $\mathbf{H}_{(0)} = \mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{S}_n^T$, en la que \mathbf{R}_n y \mathbf{S}_n son matrices ortogonales.

Comparando las ecuaciones (18) y (21) resulta razonable admitir que:

$$\mathbf{P}_\xi = \mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n^{1/2}; \quad \mathbf{Q}_\zeta = \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \quad (22)$$

Resultando \mathbf{P}_ξ y \mathbf{Q}_ζ , adecuadamente balanceadas. Por otro lado se cumple que:

$$\mathbf{H}_{(1)} = \mathbf{P}_\xi \mathbf{A} \mathbf{Q}_\zeta = \mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{A} \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \Rightarrow \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_{(1)} \mathbf{S}_n \mathbf{\Sigma}_n^{-1/2} \quad (23)$$

dónde $\hat{\mathbf{A}}$, es la matriz identificada. Para completar el trío de matrices, definamos \mathbf{O}_γ e \mathbf{I}_γ , como matrices nulas e identidad de orden γ , podemos así construir la matriz:

$$\mathbf{E}_\gamma = [\mathbf{I}_\gamma \quad \mathbf{O}_\gamma \quad \cdots \quad \mathbf{O}_\gamma] \quad (24)$$

a partir de la cual se puede identificar:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}} &= \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_\gamma \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{E}_\gamma^T \mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \end{aligned} \quad (25)$$

Ecuaciones con las que se rescata el primer bloque de \mathbf{Q}_ξ y \mathbf{P}_ξ respectivamente. Para señales que posean ruido la matriz $\boldsymbol{\Sigma}_n$ resulta consistente debido a que la longitud de los datos empleados es mayor que $2n$. Aparecen en el proceso valores singulares espurios debido tanto al ruido que contiene la señal como a errores de truncamiento local, por lo que deben eliminarse una cantidad de pequeños valores singulares a fin de conservar solo la información relevante del sistema a identificar.

De la ecuación (1) surge claramente que los parámetros de Markov están relacionados con $\hat{\mathbf{A}}$; $\hat{\mathbf{B}}_m$ y $\hat{\mathbf{C}}_m$ identificados por la expresión:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}} & \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\mathbf{B}}_m & \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{B}}_m & \cdots & \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\mathbf{A}}^{L-2} \hat{\mathbf{B}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_0 & \hat{\mathbf{Y}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{Y}}_{L-1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

dónde L es el número de parámetros de Markov. Para el caso en que la señal se encuentre libre de ruidos la secuencia de parámetros de Markov es la combinación de la respuesta al impulso de los modos de vibración, generados por la aplicación de pulsos unitarios en las distintas entradas. En particular la columna j -ésima de la matriz $\hat{\mathbf{Y}}_i$ de los parámetros de Markov representa la respuesta al impulso en el tiempo i -ésimo a un impulso unitario aplicado en el input j -ésimo. Los parámetros de Markov son una secuencia de coordenadas independientes y única, así las matrices $\hat{\mathbf{B}}_m$ y $\hat{\mathbf{C}}_m$ en el caso general están dadas por:

$$\hat{\mathbf{B}}_m^T = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 & \hat{\mathbf{b}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{b}}_{2n} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{C}}_m = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_1 & \hat{\mathbf{c}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{c}}_{2n} \end{bmatrix} \quad (27)$$

dónde n es el número de grados de libertad. Así por ejemplo, el parámetro de Markov $\hat{\mathbf{Y}}_2$ puede ser escrito como una combinación de la contribución de cada modo en la forma:

$$\hat{\mathbf{Y}}_2 = \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{B}}_m = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \lambda_i \mathbf{b}_i \quad (28)$$

por lo que para una longitud de datos L , cada coordenada se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\mathbf{b}}_i & \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{b}}_i & \cdots & \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i^{L-2} \hat{\mathbf{b}}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

en la que:

$$\hat{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_i & \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{b}}_i & \cdots & \hat{\lambda}_i^{L-2} \hat{\mathbf{b}}_i \end{bmatrix} \quad (30)$$

así la secuencia de Markov queda expresada por:

$$\hat{Y} = \left[\mathbf{D} \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\mathbf{q}}_i \right] \quad (31)$$

dónde $\hat{\mathbf{q}}_i$ es la historia de amplitudes modales del modo i -ésimo. Nótese que el vector de output $\hat{\mathbf{c}}_i$ representa en coordenadas modales, la forma modal i -ésima en el punto dónde se ubica un sensor. La secuencia $\hat{\mathbf{q}}_i$, puede obtenerse desde la matriz de correlación de Hankel:

$$\mathbf{H}_{(0)} = [\mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2}] [\Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T] \quad (32)$$

obteniendo los vectores propios Ψ de la matriz identificada \hat{A} :

$$\mathbf{H}_{(0)} = [\mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2}] \Psi \Psi^{-1} [\Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T] = \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{Q}} \Rightarrow \hat{\mathbf{Q}} = \Psi^{-1} \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \quad (33)$$

los valores $\hat{\mathbf{q}}_i$ son una aproximación de los modos reales \mathbf{q}_i , siendo iguales solo en el caso en que la señal no posea ruido. Note que los modos $\hat{\mathbf{q}}_i$ ocurren de a pares en forma de complejos conjugados. No todos los modos pertenecen al sistema real, por lo que se debe establecer un criterio para discriminar entre modos verdaderos y espurios. Un criterio para discriminar es el máximo valor singular (MSV). Se parte de la premisa que si un modo aporta una gran contribución a la respuesta al pulso unitario entonces, es un modo verdadero identificado por el algoritmo. El MSV de cada modo se estima mediante la aproximación:

$$\text{MSV}_i = \sqrt{\frac{|\hat{\mathbf{c}}_i| |\hat{\mathbf{b}}_i|}{1 - |\hat{\lambda}_i|}} \quad (34)$$

aproximación válida solo si $|\hat{\lambda}_i| < 1$ y el número de parámetros de Markov es suficientemente grande. Una manera conveniente de ordenarlos es mediante una proporción directa respecto del máximo MSV_i hallado y en base a ésta última, tomar una decisión.

De la ecuación (7), resulta que para una excitación dada se puede establecer la secuencia:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(0)} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{y}_{(0)} &= \mathbf{D} \mathbf{u}_{(0)} \\ \mathbf{x}_{(1)} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{(0)} \\ \mathbf{y}_{(1)} &= \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}_{(0)} + \mathbf{D} \mathbf{u}_{(1)} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_{(L-1)} &= \sum_{i=1}^{L-1} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_{(L-1-i)} \\ \mathbf{y}_{(L-1)} &= \sum_{i=1}^{L-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_{(L-1-i)} + \mathbf{D} \mathbf{u}_{(L-1)} \end{aligned} \quad (35)$$

Esta ecuación escrita en forma matricial conduce a:

$$\mathbf{y}_{m \times 1} = \mathbf{Y}_{m \times rL} \mathbf{U}_{rL \times 1} \quad (36)$$

dónde: $\mathbf{y} = [y_{(0)} \quad y_{(1)} \quad \cdots \quad y_{(L-1)}]$; $\mathbf{Y} = [\mathbf{D} \quad \mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \cdots \quad \mathbf{CA}^{L-2} \mathbf{B}]$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(0)} & \mathbf{u}_{(1)} & \mathbf{u}_{(2)} & \cdots & \mathbf{u}_{(L-1)} \\ 0 & \mathbf{u}_{(0)} & \mathbf{u}_{(1)} & \cdots & \mathbf{u}_{(L-2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_{(0)} & \cdots & \mathbf{u}_{(L-3)} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{u}_{(0)} \end{bmatrix}$$

de la (36) se puede apreciar que existen más incógnitas que ecuaciones por lo que la solución para \mathbf{Y} , no es única. Sin embargo resulta obvio que la solución para el sistema debe ser única. Solo en el caso en que $r = 1$ la solución es única, sin embargo dado que $\mathbf{u}_{(0)} = 0$ y que la matriz contiene términos sinusoidales, esta resulta mal condicionada. Consideremos el caso en que \mathbf{A} sea asintóticamente estable, de modo que para un número p grande se verifique que $\mathbf{A}^k \approx 0$ para todo tiempo $k \geq p$, en estas condiciones la ecuación anterior puede aproximarse como:

$$\bar{\mathbf{y}}_{m \times L} = \bar{\mathbf{Y}}_{m \times r(p+1)} \bar{\mathbf{U}}_{r(p+1) \times L} \quad (37)$$

Eligiendo ahora la longitud de datos $L > r(p+1)$, dónde p es un entero tal que: $\mathbf{CA}^k \mathbf{B} \approx 0, \quad \forall k \geq p$, tenemos entonces más ecuaciones que incógnitas y la solución de la (37) está dada por:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{U}}^\dagger \quad (38)$$

dónde: $\bar{\mathbf{y}} = [y_{(0)} \quad y_{(1)} \quad \cdots \quad y_{(p)} \quad \cdots \quad y_{(L-1)}]$; $\bar{\mathbf{Y}} = [\mathbf{D} \quad \mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \cdots \quad \mathbf{CA}^{p-1} \mathbf{B}]$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(0)} & \mathbf{u}_{(1)} & \mathbf{u}_{(2)} & \cdots & \mathbf{u}_{(p)} & \cdots & \mathbf{u}_{(L-1)} \\ 0 & \mathbf{u}_{(0)} & \mathbf{u}_{(1)} & \cdots & \mathbf{u}_{(p-1)} & \cdots & \mathbf{u}_{(L-2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_{(0)} & \cdots & \mathbf{u}_{(p-2)} & \cdots & \mathbf{u}_{(L-3)} \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{u}_{(p-3)} & \cdots & \mathbf{u}_{(L-4)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{u}_{(p-4)} & \cdots & \mathbf{u}_{(L-5)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{u}_{(0)} & \cdots & \mathbf{u}_{(L-p-1)} \end{bmatrix}$$

Así en un sistema que tenga la realización dada en la (37) se pueden conocer los primeros p parámetros de Markov. En sistemas poco amortiguados los enteros p y L requeridos hacen que la aproximación anterior sea muy onerosa computacionalmente o imposible a efectos de calcular \mathbf{U}^\dagger numéricamente. Para aumentar artificialmente el amortiguamiento del sistema se

suma y resta a la primera de las ecuaciones (7) el término $\mathbf{G} \mathbf{y}_{(k)}$, como:

$$\mathbf{x}_{(k+1)} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_{(k)} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}_{(k)} \quad (39)$$

dónde: $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{G} \mathbf{C}$; $\bar{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} + \mathbf{G} \mathbf{D} \quad -\mathbf{G}]$; $\mathbf{v}_{(k)} = [\mathbf{u}_{(k)} \quad \mathbf{y}_{(k)}]^T$

ecuación en la que \mathbf{G} es una matriz de $n \times m$ arbitraria elegida para que $\bar{\mathbf{A}}$ sea tan estable como se desee. La (39) es una ecuación de observación y a la matriz \mathbf{G} es el observador de Kalman^[1]. En estas condiciones los parámetros de Markov del nuevo sistema están referidos a los parámetros observadores de Markov. La ecuación que vincula la excitación y la salida esta dada ahora por:

$$\bar{\mathbf{y}}_{m \times 1} = \bar{\mathbf{Y}}_{m \times [(m+r)(l-1)+r]} \mathbf{V}_{[(m+r)(l-1)+r] \times 1} \quad (40)$$

dónde:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_{(0)} \quad \mathbf{y}_{(1)} \quad \cdots \quad \mathbf{y}_{(l-1)}]; \quad \bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{B}} & \cdots & \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}}^{p-1} \bar{\mathbf{B}} & \cdots & \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}}^{L-2} \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \cdots & \mathbf{u}(p) & \cdots & \mathbf{u}(L-1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{v}(0) & \mathbf{v}(1) & \cdots & \mathbf{v}(p-1) & \cdots & \mathbf{v}(L-2) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{v}(0) & \cdots & \mathbf{v}(p-2) & \cdots & \mathbf{v}(L-3) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{v}(0) & \ddots & \mathbf{v}(L-p-1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{v}(0) \end{bmatrix}$$

la inclusión del observador hace que $\mathbf{C} \bar{\mathbf{A}}^k \bar{\mathbf{B}} \approx 0$ para $k \geq p$, condición que hace posible obtener los parámetros de Markov del observador en la forma:

$$\bar{\mathbf{y}}_{m \times L} = \bar{\mathbf{Y}}_{m \times [(m+r)p+r]} \mathbf{V}_{[(m+r)p+r] \times L} \quad (41)$$

dónde la matriz \mathbf{y} posee L términos; $\bar{\mathbf{Y}}$, $p+1$ términos y \mathbf{V} se trunca en la fila correspondiente a $\mathbf{v}(L-p-1)$.

Las ecuaciones anteriores asumen condición inicial nula, circunstancia a tener en cuenta cuando se elige la porción de registro a identificar. Del planteo de ecuaciones anteriores se observa que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(k+1)} &= \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_{(k)} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}_{(k)} \\ \mathbf{x}_{(k+2)} &= \bar{\mathbf{A}}^2 \mathbf{x}_{(k)} + \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}_{(k)} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}_{(k+1)} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_{(k+p)} &= \bar{\mathbf{A}}^p \mathbf{x}_{(k)} + \bar{\mathbf{A}}^{p-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}_{(k)} + \bar{\mathbf{A}}^{p-2} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}_{(k+1)} + \cdots + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}_{(k+p-1)} \end{aligned} \quad (42)$$

consecuentemente la ecuación de salida se escribe como:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}}^p \mathbf{x} + \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{V}} \quad (43)$$

en la que $\bar{\mathbf{A}}^p \approx 0$ por construcción, y dónde:

$$\bar{\mathbf{y}} = [\mathbf{y}_{(p)} \quad \mathbf{y}_{(p+1)} \quad \cdots \quad \mathbf{y}_{(l-1)}] \quad \bar{\mathbf{Y}} = [\mathbf{D} \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{B}} \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \cdots \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{p-1}\bar{\mathbf{B}}]$$

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(p)} & \mathbf{u}_{(p+1)} & \cdots & \mathbf{u}_{(L-1)} \\ \mathbf{v}_{(p-1)} & \mathbf{v}_{(p)} & \cdots & \mathbf{v}_{(L-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_{(0)} & \mathbf{v}_{(1)} & \cdots & \mathbf{v}_{(L-p-1)} \end{bmatrix}$$

ahora es posible resolver para $\bar{\mathbf{V}}$, como:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{V}}^\dagger \quad (44)$$

En este caso es conveniente descomponer $\bar{\mathbf{V}}$ en valores singulares y elegir la cantidad de términos con los cuales reconstruir $\bar{\mathbf{V}}^\dagger$ a fin de eliminar valores singulares ruidosos.

Con el objeto de recuperar los parámetros de Markov del sistema original a partir de los parámetros del observador se realiza la siguiente partición de la matriz $\bar{\mathbf{Y}}$:

Dada: $\bar{\mathbf{Y}} = [\bar{\mathbf{Y}}_0 \quad \bar{\mathbf{Y}}_1 \quad \bar{\mathbf{Y}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{Y}}_p]$, en la que: $\bar{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{D}$,

$$\bar{\mathbf{Y}}_k = \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}}^{k-1} \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})^{k-1} (\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{D})}_{\mathbf{Y}_k^1} & \underbrace{-\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})^{k-1} \mathbf{G}}_{-\mathbf{Y}_k^2} \end{bmatrix} \quad (45)$$

dónde $\bar{\mathbf{Y}}_k$ tiene dimensión $m \times 2r$, los parámetros de Markov del sistema original se obtienen como^[1]:

$$\mathbf{Y}_k = \bar{\mathbf{Y}}_k^{(1)} - \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{Y}}_i^{(2)} \mathbf{Y}_{k-1}; \text{ para } k = 1, \dots, p \quad (46)$$

$$\mathbf{Y}_k = -\sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{Y}}_i^{(2)} \mathbf{Y}_{k-1}; \text{ para } k = p+1, \dots, \infty \quad (47)$$

4. Ejemplo del Edificio USC:

Durante el terremoto del 17 de Enero de 1994 en Nothridge, California (Estados Unidos) se encontraba recientemente construido (1991) el USC University Hospital en Los Angeles. Este Hospital de 8 pisos de altura y con una superficie total de 27991.68 m² de superficie cubierta, cuya planta típica puede apreciarse en las figuras 1-a y 1-b, se encuentra dispuesto sobre un sistema de aislación elastomérica constituida por 68 aisladores perimetrales con

corazón de plomo y 81 aisladores de goma natural centrales. La estructura sismo resistente del hospital consiste en marcos planos rigidizados de acero. Al momento del sismo el edificio se encontraba instrumentado por el CSMIP⁶ con 24 acelerómetros dispuestos típicamente como se muestra en las figuras mencionadas. Las aceleraciones máximas registradas en el terreno fueron de 0.37 g en la dirección N-S y 0.16 g en la dirección E-O. Es de destacar que tanto el edificio como su contenido no sufrió ningún tipo de daños. Por otra parte, a pesar de lo irregular de la planta, los desplazamientos obtenidos a partir de los registros de aceleraciones obtenidos durante el sismo de referencia indican que los bordes, tanto de la superestructura como del sistema de aislación, no sufrieron ampliaciones importantes respecto de su centro de masas.

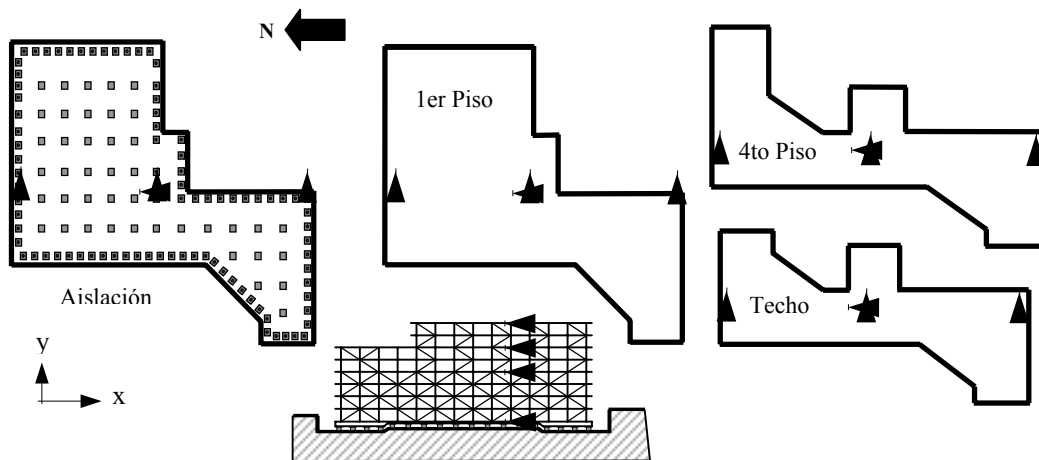


Figura 1 – Plantas y cortes típicos edificio USC University Hospital – ubicación de acelerómetros

4.1 Identificación del sistema tridimensional:

Para la identificación del modelo, primeramente se estimó el centro de rigidez tanto de la superestructura como del sistema de aislación según las dos direcciones principales del edificio. Esta estimación se llevó a cabo mediante la minimización, a lo largo de las direcciones principales en planta, del funcional⁵:

$$L_{\ddot{u}\ddot{\theta}} = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{\ddot{u}\ddot{\theta}(\omega)}^2 d\omega \quad (48)$$

expresión en la que:

$$\Gamma_{\ddot{u}\ddot{\theta}(\omega)} = \frac{S_{\ddot{u}\ddot{\theta}(\omega)}^2}{S_{\ddot{u}\ddot{u}(\omega)} S_{\ddot{\theta}\ddot{\theta}(\omega)}} \quad (49)$$

se conoce como la función de coherencia y dónde los términos $S_{ij(\omega)}$, corresponden a la densidad de potencia espectral cruzada de las señales de aceleración i, j medidas en la estructura. El centro de rigidez según la dirección x , corresponde a aquella línea según y

dónde la función de coherencia entre las aceleraciones torsionales $\ddot{\theta}$ y las aceleraciones traslacionales \ddot{y} es mínima. Para este fin es necesario reducir las aceleraciones registradas a cada punto bajo análisis mediante la aplicación de una transformación cinemática, dada por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{u}_r} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & -y_1 \end{bmatrix}}_{T_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta}_c \end{bmatrix}}_{\ddot{u}_c} \quad / \quad \ddot{u}_c = T_c^{-1} \ddot{u}_r \quad (50)$$

con \ddot{u}_c = aceleraciones en el punto considerado y \ddot{u}_r = aceleraciones en los captadores. La figura 2 muestra las funciones de coherencia para ambas direcciones, considerando las aceleraciones en el techo de la superestructura. A partir de esta determinación podemos determinar los modos de vibración, sus periodos y amortiguamientos asociados según los tres grados de libertad en forma independiente. Las figuras 3 muestra los resultados de la identificación realizada a partir de los datos de señales obtenidos en el edificio para la dirección x, allí se muestran los parámetros de Markov identificados correspondientes al modelo, la comparación entre aceleraciones medidas y modeladas en el techo de la superestructura y el desarrollo temporal del primer y segundo modo. En la tabla 1 se muestran los resultados más relevantes de la identificación realizada.

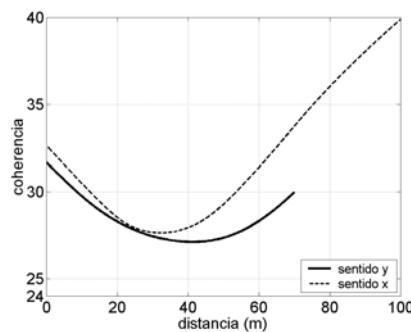


Figura 2 – Ubicación del centro de rigidez en ambos sentidos

Dado que la matriz de masas, los modos clásicos y la estructura tridiagonal de la matriz de rigidez son conocidos es posible identificar la rigidez de cada piso a partir de un procedimiento de optimización. En efecto, minimizando la norma cuadrática ^{1,3} de la diferencia entre el primer modo identificado y el principal obtenido del sistema $A = m^{-1}k$, para valores iniciales de k cualesquiera sujeto a las siguientes restricciones:

$$\mathbf{Det}(k) > 0 \quad \text{y} \quad k_i > 0 \quad (51)$$

se obtiene una matriz de rigidez proporcional a la real y cuyo factor de proporcionalidad está dado por el cuadrado del cociente entre el periodo fundamental del sistema dinámico optimizado y el identificado. En la tabla 2 se muestran las rigideces para x, y, θ obtenidas para el sistema bajo análisis. Nótese que la información de los modos es incompleta, ya que

no se poseen registros de aceleraciones en todos los pisos (figuras 1a y 1b), sin embargo se puede estimar el valor del modo fundamental en los pisos dónde no se tiene registros

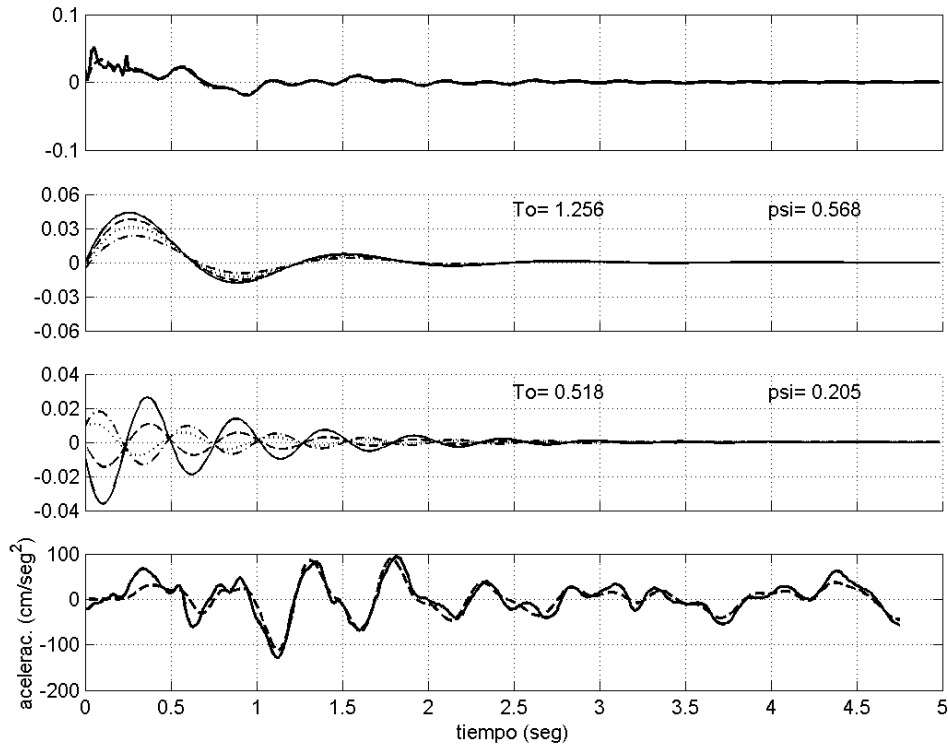


Figura 3 – a)- respuesta al impulso s/x identificada y modelada último piso; b)- primer modo s/x; c)- segundo modo s/x; d)- aceleraciones medidas y modeladas s/x último piso.

considerando que éste es proporcional a las masas acumuladas, tal como se hace en el método de Rayleigh para estimar el período fundamental de la estructura^[1]. Nótese que en el caso de tener información completa el funcional a minimizar en el proceso de optimización es la suma de la norma cuadrática de las diferencias entre modos identificados y los obtenidos del sistema $\mathbf{A} = \mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}$. A modo de ejemplo y por razones de espacio se muestra en la figura 4 la comparación entre los desplazamientos medidos y los obtenidos del modelo identificado solo para la dirección x, apreciándose una notable concordancia entre ambos.

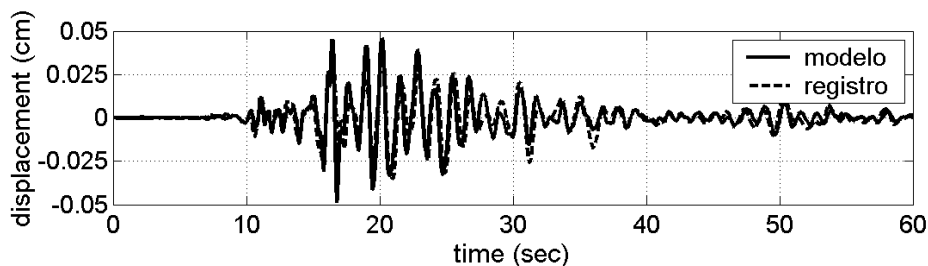


Figura 4- Comparación de modelo matemático y registro de desplazamientos techo sentido x

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado una metodología eficiente de identificación de sistemas en el tiempo que permite la determinación de modos de vibración en sistemas dinámicos de edificios como una caja negra. A partir del conocimiento de la física del problema puede transformarse en una caja gris tal que permite identificar los parámetros físicos de la estructura. Esta última etapa se logra con la combinación con algoritmos de optimización.

Tabla 1 – Identificaciones realizadas

| Característica | Sentido X | | | Sentido Y | | | Rotacional | |
|----------------|-----------|---------|----------|-----------|---------|----------|------------|---------|
| | modo I | modo II | modo III | modo I | modo II | modo III | modo I | modo II |
| T_i | 1.26 | 0.51 | 0.28 | 1.35 | 0.54 | 0.29 | 0.82 | 0.47 |
| ζ_i | 0.57 | 0.21 | 0.04 | 0.54 | 0.2 | 0.04 | 0.45 | 0.06 |
| ϕ_8 | 1.0000 | 1.0000 | 0.7788 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| ϕ_6 | 0.8686 | 0.4019 | -0.9448 | 0.8792 | 0.4016 | -0.6515 | 0.8718 | 0.4420 |
| ϕ_4 | 0.7173 | -0.2981 | -1.0000 | 0.7273 | -0.2275 | -0.9443 | 0.7015 | -0.3504 |
| ϕ_a | 0.5325 | -0.4993 | 0.7623 | 0.5694 | -0.4551 | 0.7426 | 0.5030 | -0.5474 |

Tabla 2- Características mecánicas optimizadas (ton, m, seg)

| Característica | Aislación | Piso 1 | Piso 2 | Piso 3 | Piso 4 | Piso 5 | Piso 6 | Piso 7 | Piso 8 |
|-----------------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Masas | 319.6 | 201.7 | 201.7 | 199.6 | 199.6 | 199.6 | 150.9 | 138.1 | 171.7 |
| Inercia R. | 506799.7 | 211016.3 | 210373.5 | 210373.5 | 210373.5 | 210373.5 | 172752.3 | 139019.2 | 143552.3 |
| Rigidez x | 59600.0 | 669150.0 | 634410.0 | 505160.0 | 273970.0 | 209350.0 | 134260.0 | 112100.0 | 65610.0 |
| Rigidez y | 49910.0 | 948440.0 | 741520.0 | 380150.0 | 265100.0 | 170250.0 | 128520.0 | 92570.0 | 69890.0 |
| Rig. rot. (E+6) | 160.9 | 1933.0 | 1507.9 | 852.8 | 532.7 | 441.4 | 294.3 | 209.4 | 156.5 |

6. REFERENCIAS

- [1]- Eaton, J. W., GNU – OCTAVE – Version 2.1.46 (alphaev67-decosf5.1) (1996-2003).– free software - <http://www.octave.org>.
- [2]- Juang, J. N. (1994). *Applied System Identification*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey
- [3]- *Matlab The Language of Technical Computing*, (1999). Version 5.0.10183 (R11). *The Mathworks Inc.*
- [4]- Ogata, K., (1992). “*System Dynamics*”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [5]- Safak, E., Mehmet, C. (1990). “Method to estimate center of rigidity using vibration recordings.”, *J. Struc. Engrg. Div., ASCE*, 116(1), 85 – 97.
- [6]- Shakal, A., Huang, M., and Darragh, R. et al. (1994). *CSMIP strong motions records from the Northridge earthquake of January of 1994*. Report N° OSMS 94 – 07, California Strong Motion Instrumentation Program, California Department of Conservation, Division of Mines and Geology, California.