

## SOLUCIONES ESTÁTICAS DE MECÁNICA ESTRUCTURAL OBTENIDAS A PARTIR DE SOLUCIONES DINÁMICAS POR UN PROCESO DE PASO AL LÍMITE

Antonio Susca\* y Diana V. Bambill†

\* Alumno de Ingeniería Industrial, Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA),  
Universidad Nacional del Sur, Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina, e-mail: asusca@ceia.uns.edu.ar

† Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Universidad Nacional del Sur, Alem 1253,  
B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3219, CONICET, e-mail:  
dbambill@criba.edu.ar

**Palabras clave:** vigas, vibraciones, vinculación elástica, vibración forzada, solución estática.

**Resumen.** *En un gran número de soluciones a problemas de vibraciones forzadas de elementos estructurales es posible obtener la solución estática tomando el valor de la frecuencia de excitación,  $\omega$ , igual a cero. El caso más elemental es el de una viga simplemente apoyada sometida a una carga concentrada  $P_0 \cos(\omega t)$ . En este caso uno expande a la función corrimiento en términos de una serie de Fourier y obtiene los coeficientes igualando términos semejantes comparando con el desarrollo de la carga externa cuando se expresa en términos de la función delta de Dirac. Sin embargo esto no es así en una gran cantidad de problemas, por ejemplo cuando no son autoadjuntos, y ha sido demostrado recientemente<sup>1</sup> que se hace necesario utilizar un proceso de paso al límite. En el presente trabajo se continúan experimentos numéricos sobre el problema en cuestión considerándose el caso de una losa en ménsula sometida a una carga externa uniformemente distribuida  $p_0 \cos(\omega t)$ . El objetivo del trabajo es principalmente educacional, y obviamente, de importancia conceptual, ya que como ha sido señalado reiteradamente, la situación no ha sido tratada en los libros sobre el tema.*

**Abstract.** *In a wide variety of forced vibrations which deals with continuous systems, one is able to obtain the static case as a degenerate situation, by making the external frequency of excitation equal to zero. But in other situations, mainly when dealing with non-self adjoint mathematical system, one cannot accomplish this directly in view of high degree of indetermination of the system. However, one can obtain the static solution by a series of limiting processes as it has been shown recently<sup>1</sup> and it is also performed in this study for a different forced vibration situation.*

## 1 INTRODUCCIÓN

En el presente estudio se demuestra cómo se pueden obtener soluciones estáticas elementales a partir de soluciones dinámicas más complejas, para lo cual se requiere de un proceso de paso al límite, ya que asignando a la frecuencia externa el valor nulo se obtienen expresiones altamente indeterminadas.

En primera instancia el trabajo consiste en determinar las amplitudes de desplazamiento y de los esfuerzos internos dinámicos de una viga en ménsula sometida a vibración forzada, por una carga externa uniformemente distribuida en toda su longitud:  $p_0 \cos(\omega t)$ . Ver Figura 1.

Las amplitudes dinámicas de corrimientos y esfuerzos se analizan en función de las relaciones  $\frac{\omega}{\omega_{01}}$ , siendo  $\omega_{01}$  la frecuencia circular fundamental del sistema dinámico en tratamiento.

La solución estática se reproduce cuando desaparece el efecto dinámico, es decir cuando la relación de frecuencias tiende a cero,  $\frac{\omega}{\omega_{01}} \rightarrow 0$ , y puede ser obtenida del planteo dinámico propuesto haciendo un proceso de paso al límite.

Este trabajo es continuación de estudios realizados por otros investigadores<sup>1,2</sup>.

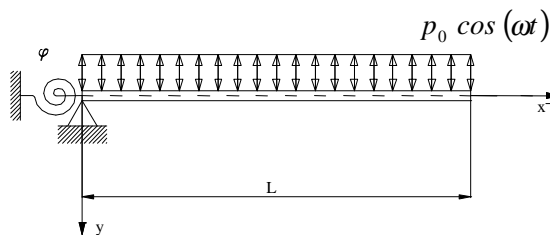


Figura 1: Modelo dinámico

## 2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

### 2.1 Vibraciones forzadas

El sistema diferencial que gobierna el modelo dinámico esquematizado en la Figura 1 es el que se plantea a continuación:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

donde

$w = w(x, t)$  es la función desplazamiento de la viga

$I$  es el momento de inercia de la sección transversal  
 $A_0$  es el área de la sección transversal,  
 $E$  es el módulo de elasticidad del material,  
 $\rho_0$  es la densidad del material  
 $x$  es la coordenada espacial, con origen en el extremo vinculado  
 $p_0 \cos(\omega t)$  carga externa que solicita a la viga  
 $\omega$  es la frecuencia de la carga externa  
 $t$  es el tiempo

Las ecuaciones siguientes representan las condiciones de borde en los extremos de la viga: desplazamiento nulo y giro elásticamente restringido en el extremo vinculado, y esfuerzo de momento flector nulo y esfuerzo de corte nulo en el extremo libre de la viga. Implícito por la ecuación diferencial propuesta están las consideraciones de homogeneidad del material.

$$w(0, t) = 0 \quad (2.a)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{(0, t)} = \varphi EI \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{(0, t)} \quad (2.b)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{(0, t)} = 0 \quad (2.c)$$

$$\left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{(0, t)} = 0 \quad (2.d)$$

donde  $L$  es la longitud de la viga y  $\varphi$  es el coeficiente de flexibilidad del resorte rotacional que restringe el giro en  $x = 0$ .

En un análisis inicial, se desprecia el efecto de alabeo debido al esfuerzo de corte en las secciones transversales de la viga y tampoco se tienen en cuenta la inercia rotatoria, ni la posibilidad de algún tipo de amortiguamiento estructural.

Se propone el planteo de la solución de la ecuación diferencial (1) siguiendo el procedimiento de separación de variables, por lo cual se adopta como expresión de la elástica de la viga una función de la forma:

$$w(x, t) = W(x) \cos(\omega t) \quad (3)$$

donde  $W(x)$  es la función espacial en  $x$  y  $\cos(\omega t)$  es la función que depende del tiempo.

Reemplazando esta ecuación en la ecuación diferencial del problema (1) se obtiene la siguiente expresión:

$$EI \frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \rho A_0 \omega^2 W(x) = p_0 \quad (4)$$

Cuya solución se obtiene mediante la suma de una solución particular más una solución homogénea.

Como solución particular se elige un valor constante que se denomina B:

$$W_p(x) = B \quad (5)$$

Y con la ecuación (4) se determina el valor de dicha constante

$$B = -\frac{p_0}{\rho_0 A_0 \omega^2} \quad (6)$$

Para plantear la solución homogénea se parte de la expresión

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \frac{\rho_0 A_0}{EI} \omega^2 W(x) = 0 \quad (7)$$

Si se introduce la notación

$$r^4 = \frac{\omega^2}{\frac{EI}{\rho_0 A_0}} \quad (8)$$

y se reescribe la ecuación (7) como

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - r^4 W(x) = 0 \quad (9)$$

Para satisfacer la (9), se adopta una solución de la forma

$$W_h(x) = C e^{n x}$$

Con la que se obtiene

$$e^{n x} (n^4 - r^4) = 0$$

De esta forma los valores de  $n$  encontrados son dos raíces reales y dos raíces complejas

$$n_1 = r ; n_2 = -r , n_3 = i r ; n_4 = -i r$$

donde  $i = \sqrt{-1}$ . La forma general de la solución homogénea de la ecuación (9) es

$$W_h(x) = D_1 e^{r x} + D_2 e^{-r x} + D_3 e^{i r x} + D_4 e^{-i r x}$$

La cual también puede ser escrita en su forma equivalente

$$W_h(x) = C_1 \sin(rx) + C_2 \cos(rx) + C_3 \sinh(rx) + C_4 \cosh(rx) \quad (10)$$

Para introducir la razón de frecuencias en la solución se introduce la notación

$$k = \frac{\omega}{\omega_{01}}$$

donde  $k$  es un número positivo y  $\omega_{01}$  es la frecuencia fundamental circular del sistema estructural en estudio.

$$r^4 = \frac{\rho_0 A_0 \omega_{01}^2 k^2}{EI}$$

Finalmente la solución completa puede ser expresada como:

$$W(x) = -\frac{P_0}{\rho_0 A_0 k^2 \omega_{01}^2} + C_1 \sin(rx) + C_2 \cos(rx) + C_3 \sinh(rx) + C_4 \cosh(rx)$$

y la expresión de la elástica

$$w(x, t) = \left[ \begin{array}{l} -\frac{P_0}{\rho_0 A_0 k^2 \omega_{01}^2} + C_1 \sin(rx) + C_2 \cos(rx) + C_3 \sinh(rx) + \\ C_4 \cosh(rx) \end{array} \right] \cos(\omega t) \quad (11)$$

Los  $C_i$  son constantes que se determinan con las condiciones de borde de la estructura. Al resolver el sistema de cuatro ecuaciones de las condiciones de borde (2.a-d), las constantes quedan definidas por las expresiones

$$C_1 = \frac{p_0 (\varphi' rL \cosh(rL) \cos(rL) - \varphi' rL + \varphi' rL \sinh(rL) \sin(rL) + \cosh(rL) \sin(rL) + \sinh(rL) \cos(rL))}{2r^4 EI (\cosh(rL) \cos(rL) - \varphi' rL \sin(rL) \cosh(rL) + \varphi' rL \cos(rL) \sinh(rL) + 1)} \quad (12.a)$$

$$C_2 = \frac{p_0 (1 - \varphi' rL \sin(rL) \cosh(rL) - \sinh(rL) \sin(rL) + \varphi' rL \cos(rL) \sinh(rL) + \cosh(rL) \cos(rL))}{2r^4 EI (\cosh(rL) \cos(rL) - \varphi' rL \sin(rL) \cosh(rL) + \varphi' rL \cos(rL) \sinh(rL) + 1)} \quad (12.b)$$

$$C_3 = \frac{p_0 (-\sinh(rL) \cos(rL) - \cosh(rL) \sin(rL) + \varphi' rL \sinh(rL) \sin(rL) + \varphi' rL - \varphi' rL \cosh(rL) \cos(rL))}{2r^4 EI (\cosh(rL) \cos(rL) - \varphi' rL \sin(rL) \cosh(rL) + \varphi' rL \cos(rL) \sinh(rL) + 1)} \quad (12.c)$$

$$C_4 = \frac{p_0}{r^4 EI} - \frac{p_0 (1 - \varphi' rL \sin(rL) \cosh(rL) - \sinh(rL) \sin(rL) + \varphi' rL \cos(rL) \sinh(rL) + \cosh(rL) \cos(rL))}{2r^4 EI (\cosh(rL) \cos(rL) - \varphi' rL \sin(rL) \cosh(rL) + \varphi' rL \cos(rL) \sinh(rL) + 1)} \quad (12.d)$$

El coeficiente  $\varphi'$  se define como coeficiente de flexibilidad adimensional del resorte

rotacional mediante la expresión:

$$\varphi' = \frac{\varphi EI}{L}$$

Para obtener la solución del problema estático como un caso particular de la solución dinámica obtenida, se propone el siguiente paso al límite:

$$\lim_{k \rightarrow 0} w(x,t) = \frac{p_0 (12\varphi' L^3 x + x^4 - 4Lx^3 + 6L^2 x^2)}{24EI} \quad (13)$$

Analizando el caso de empotramiento rígido ideal ( $\varphi' \rightarrow 0$ ) la elástica de la viga en ménsula está dada por la expresión:

$$w(x,t) = \frac{1}{24} \frac{p_0 (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2 x^2)}{EI} \quad (14)$$

que coincide con la respuesta estática de ese sistema estructural<sup>3</sup>, bajo carga constante uniformemente distribuida  $p_0$ .

El cálculo de los esfuerzos internos, momento flector y corte, se realiza por medio de un procedimiento análogo.

La expresión que corresponde al esfuerzo de momento flector dinámico  $M(x,t)$  de una viga es

$$\frac{M(x,t)}{EI} = -\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$$

Si se reemplaza la solución dinámica obtenida para el desplazamiento,  $w(x,t)$ , el momento flector dinámico se expresa:

$$\frac{M(x,t)}{EI} = -\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = -r^2 [C_1 \text{sen}(rx) + C_2 \text{cos}(rx) + C_3 \text{senh}(rx) + C_4 \text{cosh}(rx)] \cos(\omega t) \quad (15)$$

Nuevamente, y de manera análoga se plantea el paso al límite para calcular la solución estática, tal como se indica:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left( -EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} p_0 (2Lx - L^2 - x^2) \quad (16)$$

La expresión (16) verifica la respuesta estática del sistema y coincide con la solución estática del problema<sup>3</sup>. De manera totalmente similar se calcula el esfuerzo de corte  $Q(x,t)$  en la viga, en función de su expresión correspondiente.

$$Q(x,t) = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (17)$$

cuyo paso al límite permite obtener la solución estática del problema planteado.

$$\lim_{k \rightarrow 0} EI \left( -\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \right) = p_0(L-x) \quad (18)$$

## 2.2 Vibraciones libres: Frecuencia fundamental

A continuación se indica el cálculo de los coeficientes de frecuencia natural fundamental de la estructura para diferentes flexibilidades del resorte a rotación  $\varphi'$ . Cálculo que se incluye a los efectos de complementar este estudio; ya que la consideración de la vinculación elástica en vigas ha sido tratada por varios autores con anterioridad <sup>4</sup>.

El sistema de ecuaciones que gobierna el problema de vibraciones libres de la viga en ménsula vinculada elásticamente a rotación se presenta a continuación:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

Las condiciones de borde son las ya indicadas en las expresiones (2.a-d). Se adopta una solución de la forma:

$$w(x,t) = W(x) \cos(\omega_0 t)$$

que al ser reemplazada en la ecuación diferencial del problema (19), permite obtener la expresión:

$$EI \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} - \rho_0 A_0 \omega_0^2 W(x) = 0 \quad (20)$$

donde  $\omega_0$  son las frecuencias circulares naturales de la estructura.

La solución de la ecuación (20) es:

$$W(x) = D_1 \sin(rx) + D_2 \cos(rx) + D_3 \sinh(rx) + D_4 \cosh(rx)$$

con:

$$r^4 = r^4_{(\omega_0)} = \frac{\rho_0 A_0 \omega_0^2}{EI}$$

Operando matemáticamente las expresiones de las condiciones de borde (2.a-d), se obtiene un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Y la solución no trivial de ese sistema de ecuaciones conduce a la ecuación trascendente de frecuencias del sistema dinámico analizado.

$$2 \left[ -\cosh(r_{(\omega_0)} L) \cos(r_{(\omega_0)} L) + \operatorname{sen}(r_{(\omega_0)} L) \cosh(r_{(\omega_0)} L) \varphi' r_{(\omega_0)} L - \cos(r_{(\omega_0)} L) \operatorname{senh}(r_{(\omega_0)} L) \varphi' r_{(\omega_0)} L - 1 \right] = 0$$

cuyas raíces  $\omega_{0i}$  constituyen los distintos valores de frecuencia naturales del sistema estructural, el menor de los cuales es el coeficiente de frecuencia circular fundamental  $\omega_{01}$ .

Los diferentes valores de  $\varphi'$  representan distintos casos de vinculación elástica a flexión de la viga en ménsula.

### 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

En la primera tabla, Tabla 1, se presentan los coeficientes de frecuencia fundamental adimensional  $\Omega_{01} = \sqrt{\frac{\rho_0 A_0}{EI}} \omega_{01} L^2$ , que le corresponden a la estructura estudiada en este trabajo, en función de las características físico-geométricas del modelo.

Tabla 1 : Coeficientes de frecuencia fundamental del sistema estructural de la Figura 1.

$\varphi' = \frac{\varphi EI}{L}$	$\Omega_{01} = \sqrt{\frac{\rho_0 A_0}{EI}} \omega_{01} L^2$
0	3.516
0.01	3.448
0.10	2.969
0.20	2.611
0.50	2.016
1.00	1.558

Es de mencionar que para el caso de flexibilidad nula en el resorte,  $\varphi' = 0$ , el coeficiente de frecuencia coincide con el valor que asume en la viga con empotramiento perfecto en su extremo <sup>2</sup>.

En la Tabla 2 se muestran los valores de amplitud máxima de la deflexión dinámica,  $\frac{|W_{\max}|}{p_0 L^4 / EI}$ , de la viga, para distintos valores del coeficiente de flexibilidad del resorte.

La amplitud máxima de la deflexión se produce en el extremo libre,  $x = L$ , y se presenta como una función de la razón entre la frecuencia de excitación de la fuerza externa,  $\omega$ , y la frecuencia fundamental del sistema estructural,  $\omega_{01}$ .

Se observa que cuando la razón de frecuencias  $\frac{\omega}{\omega_{01}}$  tiende a cero, los resultados numéricos coinciden con los valores estáticos, tal cual se demostrase en el planteo de paso al límite, expresión (14).

Es de hacer notar el caso  $\varphi' \rightarrow 0$ , que corresponde a la viga empotrada-libre. En la medida



que se considera un resorte más flexible  $\varphi' \rightarrow 0.01, 0.25, 0.50, \dots$  el valor de la deflexión aumenta tal como se observa en los resultados de la tabla.

Tabla 2 : Coeficientes de amplitud máxima de las deflexiones dinámicas del extremo libre de la viga,  $x = L$ .

$\frac{ w_{m\acute{a}x} }{p_0 L^4 / EI}$						
$k = \frac{\omega}{\omega_{01}}$	$\varphi' = \frac{\varphi EI}{L}$					
	0	0.01	0.1	0.2	0.5	1
$k \rightarrow 0$	0.125	0.130	0.175	0.225	0.375	0.625
0.01	0.125	0.130	0.175	0.225	0.375	0.625
0.25	0.133	0.139	0.187	0.240	0.400	0.667
0.50	0.167	0.174	0.234	0.301	0.501	0.834
0.90	0.665	0.692	0.930	1.194	1.985	3.301
0.95	1.297	1.349	1.815	2.330	3.871	6.436
0.99	6.364	6.618	8.899	11.423	18.975	31.545
1.01	6.304	6.556	8.815	11.314	18.791	31.236
1.25	0.227	2.360	0.317	0.407	0.674	1.119
1.50	0.103	0.107	0.144	0.184	0.305	0.505

Tabla 3: Coeficientes de amplitud máxima del momento flector dinámico en el extremo vinculado de la viga,  $x = 0$

$\frac{ M_{m\acute{a}x} }{p_0 L^2}$						
$k = \frac{\omega}{\omega_{01}}$	$\varphi' = \frac{\varphi EI}{L}$					
	0	0.01	0.1	0.2	0.5	1
$k \rightarrow 0$	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.01	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.25	0.530	0.530	0.531	0.532	0.532	0.533
0.5	0.649	0.650	0.655	0.658	0.662	0.663
0.90	2.400	2.411	2.479	2.519	2.570	2.596
0.95	4.624	4.648	4.797	4.884	4.993	5.051
0.99	22.437	22.567	23.362	23.826	24.408	24.717
1.01	22.103	22.237	23.057	23.535	24.135	24.455
1.25	0.736	0.743	0.788	0.815	0.848	0.866
1.50	0.299	0.304	0.334	0.351	0.373	0.385

En la Tabla 3 se muestran los coeficientes de amplitud máxima del momento flector

dinámico  $\frac{|M_{m\acute{a}x}|}{p_0 L^2}$ , coincidente con el empotramiento,  $x=0$ , en funci3n de la relaci3n de frecuencia  $\frac{\omega}{\omega_{01}}$ .

Como era de esperarse, el valor de la amplitud m\acute{a}xima aumenta al aumentar el coeficiente de flexibilidad del resorte tal como se observa en la tabla.

Nuevamente para la condici3n  $\frac{\omega}{\omega_{01}} \rightarrow 0$ , los coeficientes son los que se corresponden con el caso est\acute{a}tico, ecuaci3n (16).

En la Tabla 4 se muestran los par\acute{a}metros de amplitud m\acute{a}xima del esfuerzo de corte  $\frac{|Q_{m\acute{a}x}|}{p_0 L}$  en el extremo vinculado de la viga,  $x=0$ ; para distintos valores del coeficiente  $\varphi'$ .

Tabla 4 : Coeficientes de amplitud m\acute{a}xima del esfuerzo de corte din\acute{a}mico en el extremo vinculado de la viga,  $x=0$ .

		$\frac{ Q_{m\acute{a}x} }{p_0 L}$					
		$\varphi' = \frac{\varphi EI}{L}$					
$k = \frac{\omega}{\omega_{01}}$		0	0.01	0.1	0.2	0.5	1
$k \rightarrow 0$		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.01		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.25		1.041	1.042	1.044	1.045	1.047	1.048
0.50		1.206	1.208	1.220	1.227	1.237	1.242
0.90		3.618	3.643	3.800	3.897	4.025	4.097
0.95		6.680	6.734	7.076	7.287	7.565	7.722
0.99		31.200	31.490	33.313	34.435	35.923	36.763
1.01		30.109	30.408	32.288	33.446	34.982	35.849
1.25		0.695	0.711	0.815	0.879	0.966	1.015
1.50		0.092	0.102	0.170	0.213	0.271	0.304

#### 4 CONCLUSIONES

Uno tender\acute{a} a pensar que los resultados obtenidos son de naturaleza relativamente obvia. Sin embargo y como se se\~{n}ala en la referencia [1] no se ha hallado referencia a este hecho en la literatura t\acute{e}cnico-cient\acute{i}fica conocida.

Los resultados presentados en este trabajo corresponden a un fuerza de excitaci3n del tipo  $p_0 \cos \omega t$  y pueden ser extendidos f\acute{a}cilmente al caso en que la fuerza de excitaci3n es una funci3n de la variable espacial  $p_0(x) \cos \omega t$ , ver Figura 2, y tambi\~{e}n al caso de vigas con otras condiciones de borde.

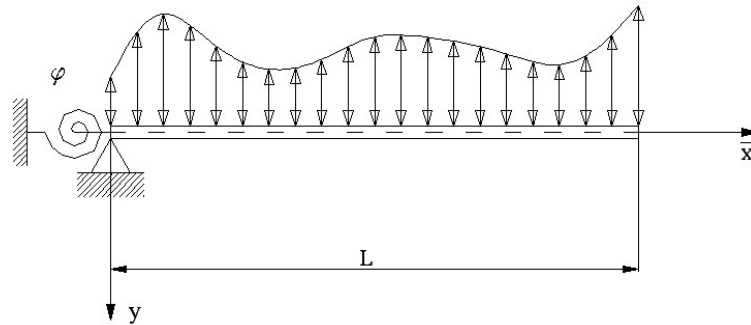


Figura 2: Sistema vibrante excitado por una fuerza variable  $p_0(x) \cos \omega t$

## 5 AGRADECIMIENTOS.

La presente investigación ha sido auspiciada por el CONICET (Proyecto PICT 02152) y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur.

Los autores agradecen al Sr. Santiago Maíz por su cooperación y al Dr. Patricio A. A. Laura por sus consejos y ayuda permanente.

## 6 REFERENCIAS

- [1] E. Alberdi, M. Alemany y P. A. A. Laura, "Obtaining the static solution from forced vibration situation in a common structural dynamic system", *Journal of Sound and Vibration* **266**, 189-192 (2003).
- [2] C. A. Rossit, *Vibraciones longitudinales y transversales de barras. Desarrollos no armónicos de Fourier*. Tesis de Magister en Ingeniería, Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, (1995).
- [3] J. Gere y S. Timoshenko, *Mecánica de materiales*, International Thomson Editores, (1998).
- [4] R. D. Blevins, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Van Nostrand Reinhold Company, (1979)