

## **SIMULACION NUMERICA DEL COMPORTAMIENTO DINAMICO DE AUTOMOVILES**

**Oscar A. Falcinelli\* y José A. Inaudi &**

\* Departamento de Aeronáutica, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba  
Av. Velez Sarfield 1601 (5000) Córdoba, Argentina.  
falcinelli3@yahoo.com.ar

& Instituto Universitario Aeronáutico  
Av. Fuerza Aérea 6500 (5010) Córdoba, Argentina  
jinaudi@iua.edu.ar

**Key words:** Solid-dynamics, vehicle-simulation.

**Resumen:** *En éste trabajo se presenta el desarrollo de un código para el estudio de la dinámica de un vehículo. El modelo dinámico cuenta con diez grados de libertad correspondientes a los tres desplazamientos y los tres giros del chasis, más las deformaciones de los cuatro sistemas de suspensión. Las entradas del sistema, variables durante la integración temporal, son las acciones del piloto (acelerador, freno, embrague y relación de caja de velocidades), mientras que las variables de “configuración” son el tipo y dimensiones de las suspensiones, tipo de transmisión, constitutivas de los neumáticos, curvas de motor, etc..*

*Durante la integración temporal, las acciones del piloto hacen que el vehículo se vaya moviendo y éste movimiento genera cargas aerodinámicas, fuerzas en los neumáticos y desplazamiento respecto del terreno (de altura variable o no).*

*Para el análisis de las deformaciones de las suspensiones, se utiliza alguna coordenada generalizada que describe el movimiento completo de cada suspensión. La fuerzas generalizadas que cada uno de los esfuerzos anteriores ejerce sobre los distintos grados de libertad, se calcula utilizando la técnica de trabajos virtuales.*

*La matriz de masa se considera variable debido a la variación de las posiciones relativas de las masas que componen el sistema, y se calcula para cada paso de tiempo.*

*El código desarrollado permite el tratamiento de constitutivas de resortes, amortiguadores y neumáticos lineales y no lineales.*

## 1. INTRODUCCION

En éste trabajo se presenta el desarrollo de un código computacional para el modelado de dinámica de vehículos. El programa realiza una integración temporal acoplada, de las ecuaciones de la dinámica de los diez grados de libertad que componen el modelo.

Una de la principales dificultades que se presenta, es que el comportamiento dinámico de vehículos depende fuertemente de pequeños movimientos secundarios que se producen cuando trabajan sus suspensiones. Ejemplos de estos movimientos son:

- movimiento hacia el plano de simetría de los parches de contacto,
- movimiento hacia adelante y atrás de los parches de contacto,
- rotaciones según los tres ejes de los portamasas.

Estos movimientos secundarios dependen del diseño de las suspensiones utilizadas, y varían a medida que estas se deforman. Esto hace que sea insuficiente el modelado de las suspensiones como simples movimientos rectilíneos.

Otro factor que dificulta el modelado es la permanente variación de la distribución de pesos, producto del gran porcentaje de la masa del vehículo distribuida en los órganos de la suspensión en constante movimiento.

El presente trabajo incluye explicaciones de las soluciones dadas a estos problemas y resultados de modelados obtenidos para ciertos casos de prueba particulares.

## 2. MODELO MATEMATICO

El modelo matemático empleado tiene diez grados de libertad que son:

- los tres desplazamientos del centro de gravedad del chasis rígido,
- los tres giros del chasis rígido,
- las cuatro deformaciones de las suspensiones.

El programa trabaja principalmente con tres sistemas de ejes:

$XI, YI, ZI$	fijo en el espacio, se utiliza para seguir la posición y orientación del chasis rígido.
$X, Y, Z$	fijo en el espacio y redefinido al comienzo de cada paso de tiempo, se utiliza para calcular la velocidad de variación del sistema.
$x, y, z$	fijo al chasis del vehículo, se utiliza para ubicar todos los puntos que se mueven con él y definir la matriz de inercias.

Para la definición del sistema  $XI, YI, ZI$  la única restricción es que el versor  $\hat{k}_{XI, YI, ZI}$  sea vertical y apunte hacia arriba.

El sistema  $x, y, z$  (sistema cuerpo) se define del siguiente modo:

- su origen se encuentra en el centro de gravedad del chasis sin órganos de suspensión.
- su versor  $\hat{j}_{x, y, z}$  es normal al plano de simetría del vehículo y es positivo hacia el lado del conductor.

- su versor  $\hat{i}_{x,y,z}$  apunta hacia adelante pudiendo fijarse éste con cierta libertad, siempre que permanezca en el plano de simetría (puede ser el eje principal de inercia, algún eje geoméricamente fácil de referenciar en el vehículo, etc..)
- una vez definidos los versores  $\hat{i}_{x,y,z}$  y  $\hat{j}_{x,y,z}$ , el versor  $\hat{k}_{x,y,z}$  queda definido automáticamente por ser éste un sistema dextrógiro ( $\hat{k}_{x,y,z} = \hat{i}_{x,y,z} \times \hat{j}_{x,y,z}$ ).

El sistema X,Y,Z se define al comienzo de cada paso de tiempo del siguiente modo:

- su origen coincide con el del sistema x,y,z.
- el versor  $\hat{k}_{X,Y,Z}$  es siempre vertical.
- el versor  $\hat{j}_{x,y,z}$  (y por ende el eje "y" cuerpo) queda contenido en el semiplano  $Y > 0-Z$ , definiendo así el versor  $\hat{j}_{X,Y,Z}$ .
- nuevamente, por tratarse de sistemas dextrógiros, el versor  $\hat{i}_{X,Y,Z}$  queda definido por el producto vectorial  $\hat{i}_{X,Y,Z} = \hat{j}_{X,Y,Z} \times \hat{k}_{X,Y,Z}$ .

Por cuestiones de facilidad de programación, la integración numérica se hace lógicamente siguiendo las coordenadas XI,YI,ZI. Sin embargo, en cada paso de tiempo se transforman todas las coordenadas al sistema X,Y,Z definido para ese paso de tiempo. En éste se calculan las velocidades y aceleraciones, y esto se vuelve a pasar al sistema XI,YI,ZI para seguir la evolución temporal. Por esto, las ecuaciones de movimiento se plantean en el sistema X,Y,Z.

Para indicar derivadas respecto del tiempo se utilizarán puntos sobre las variables derivadas. El número de puntos indicará el orden de la derivada ( $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2}$ , etc...).

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$[\mathbf{M}] \bullet [\ddot{\mathbf{q}}] = [\mathbf{F}] \quad (1)$$

siendo  $[\mathbf{M}]$  la matriz de masa del sistema (10x10),  $[\ddot{\mathbf{q}}]$  es el vector de aceleraciones generalizadas y  $[\mathbf{F}]$  es el vector de fuerzas generalizadas.

El vector de coordenadas generalizadas  $[\mathbf{q}]$  está compuesto por:

$$[\mathbf{q}] = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

siendo  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  las coordenadas que miden el desplazamiento del CG del chasis según  $\hat{i}_{X,Y,Z}$ ,  $\hat{j}_{X,Y,Z}$  y  $\hat{k}_{X,Y,Z}$  respectivamente;  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  las coordenadas que miden los giros respecto de los mismos versores; y  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  las coordenadas generalizadas que miden la deformación de los cuatro sistemas de suspensión.

Las variables  $\beta_i$  pueden ser cualquier parámetro que determine unívocamente la posición de todos los elementos que componen el sistema de suspensión en cuestión.

Actualmente, el programa está preparado para trabajar con sistemas de suspensión de dos tipos:

- paralelogramos deformables (ver Figura 1).
- Mac Person .

El Sistema Mac Person es conceptualmente idéntico al de paralelogramos deformables siendo la única diferencia que la parrilla superior es reemplazada por un apoyo rotulado (fijo al chasis), que sostiene una de las puntas de un cilindro telescópico cuyo otro extremo está rígidamente unido al portamasas. Este cilindro telescópico le da su orientación al portamasas.

Las coordenadas generalizadas  $\beta_i$  utilizadas miden el ángulo girado por la parrilla inferior respecto de la horizontal en ejes cuerpo, pero perfectamente se podría haber definido el largo del amortiguador, la altura respecto del chasis de algún punto del portamasas, etc.. Las únicas dos restricciones son:

- por como se han definido los  $\beta_i$ , estos deben medirse en forma relativa al sistema cuerpo,
- la posición y orientación de todos los órganos que componen la suspensión respectiva, deben quedar unívocamente determinados una vez que se fija el valor de  $\beta_i$ .

En lugar de hacerse la integración del sistema de diez ecuaciones de segundo orden presentado en la ecuación 1, se pasó esta formulación a espacio de estado dando lugar a un sistema de veinte ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \bullet \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (3)$$

éste sistema de ecuaciones se integra numéricamente con cualquier integrador numérico tradicional (Runge-Kutta, Euler, etc...).

## 2.1 Armado de la matriz de masa

Para el desarrollo de la matriz de masa se utilizó para casi todos los casos el concepto de producir aceleraciones unitarias en cada grado de libertad, y calcular las fuerzas necesarias en cada coordenada generalizada para equilibrar los esfuerzos inerciales producidos por tales aceleraciones.

Se utilizó también la simetría por lo que sólo se presenta el desarrollo de la mitad inferior de la matriz.

### 2.1.1 Columnas uno a tres

Para el cálculo de la primera columna de la matriz de masa se debe producir una aceleración unitaria según  $\hat{i}_{X,Y,Z}$ . Aparecerán por lo tanto fuerzas  $-\mathbf{m}_i \cdot \hat{i}_{X,Y,Z}$  en todos los centros de gravedad de las piezas que componen cada una de las suspensiones así como en el CG del chasis.

Para el cálculo de las fuerzas generalizadas sobre los grados de libertad  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  y  $\beta_4$  se utilizaron trabajos virtuales. El sistema de fuerzas inerciales y la fuerza generalizada necesaria para equipararlas deben estar en equilibrio. Denotando con  $\mathbf{m}_i[-1,0,0]$  al vector  $-\mathbf{m}_i \cdot \hat{i}_{X,Y,Z}$  y con  $\bullet$  al producto interior, la ecuación de trabajos virtuales se escribe del siguiente modo:

$$[-1,0,0] \bullet \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \partial \bar{\mathbf{X}}_{cg_i} + \mathbf{f}_g \cdot \partial \beta = 0 \quad (4)$$

donde  $\mathbf{m}_i$  es la masa de cada uno de los n componentes del sistema de suspensión en cuestión;  $\partial \bar{\mathbf{X}}_{cg_i}$  es el vector desplazamiento virtual del centro de gravedad del componente i asociado con el desplazamiento virtual  $\partial \beta$  de la coordenada generalizada; y  $\mathbf{f}_g$  es la fuerza generalizada buscada. De la ecuación 4 puede despejarse:

$$\mathbf{f}_g = [1,0,0] \bullet \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{cg_i}}{\partial \beta} \quad (5)$$

Al resolverse el problema geométrico al comenzar cada paso de tiempo, deben calcularse las  $4n$  derivadas  $\frac{\partial \bar{\mathbf{X}}_{cg_i}}{\partial \beta}$  producto de las cuatro suspensiones, para así poder calcular la matriz de masa en ese paso de tiempo. Estas derivadas se calculan numéricamente encontrando la

ubicación de los  $4n$  centros de gravedad de las piezas que componen las suspensiones para los  $\beta_j$  dados y luego para  $\beta_j + \Delta\beta_j$ . Finalmente, las derivadas se calculan según:

$$\frac{\partial \vec{X}_{cg}}{\partial \beta} = \frac{\vec{X}_{cg}(\beta + \Delta\beta) - \vec{X}_{cg}(\beta)}{\Delta\beta} \quad (6)$$

Para el cálculo de la segunda y tercera columna se siguió exactamente el mismo procedimiento.

Las columnas uno a tres de la matriz de masa quedan entonces:

$$\mathbf{M}(:,1:3) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4n+1} m_i & \text{sim.} & \text{sim.} \\ 0 & \sum_{i=1}^{4n+1} m_i & \text{sim.} \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^{4n+1} m_i \\ 0 & -\sum_{i=1}^{4n} m_i Z_i & \sum_{i=1}^{4n} m_i Y_i \\ \sum_{i=1}^{4n} m_i Z_i & 0 & -\sum_{i=1}^{4n} m_i X_i \\ -\sum_{i=1}^{4n} m_i Y_i & \sum_{i=1}^{4n} m_i X_i & 0 \\ [1,0,0] \bullet \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{X}_{cg_i}}{\partial \beta_1} & [0,1,0] \bullet \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{X}_{cg_i}}{\partial \beta_1} & [0,0,1] \bullet \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{X}_{cg_i}}{\partial \beta_1} \\ [1,0,0] \bullet \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{X}_{cg_i}}{\partial \beta_2} & [0,1,0] \bullet \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{X}_{cg_i}}{\partial \beta_2} & [0,0,1] \bullet \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{X}_{cg_i}}{\partial \beta_2} \\ [1,0,0] \bullet \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{X}_{cg_i}}{\partial \beta_3} & [0,1,0] \bullet \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{X}_{cg_i}}{\partial \beta_3} & [0,0,1] \bullet \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{X}_{cg_i}}{\partial \beta_3} \\ [1,0,0] \bullet \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{X}_{cg_i}}{\partial \beta_4} & [0,1,0] \bullet \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{X}_{cg_i}}{\partial \beta_4} & [0,0,1] \bullet \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{X}_{cg_i}}{\partial \beta_4} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Con la sigla **sim.** se indica que estos términos se calculan por simetría.

### 2.1.2 COLUMNAS CUATRO A SEIS

La submatriz comprendida entre las filas 4 y 6 y las columnas 4 y 6 de la matriz de masa, será la matriz de inercias del chasis ( $\mathbf{M}_{ch}$ ) más la matriz de inercias que resulte de los elementos de la suspensión ( $\mathbf{M}_I$ ). Para el cálculo de la matriz de inercias de los elementos de suspensión se tomó en cuenta solamente las masas y distancias a los respectivos CG. Para

incluir las inercias propias de los elementos sobre sus centros de gravedad, la suma de estos puede agregarse a la matriz de inercias del chasis.

Para el cálculo de las fuerzas generalizadas sobre los grados de libertad  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  y  $\beta_4$  se volvieron a utilizar trabajos virtuales, pero teniendo en cuenta que ahora las fuerzas sobre cada CG de los componentes de las suspensiones surgen de aceleraciones rotacionales unitarias sobre cada uno de los tres ejes (para cada una de las columnas 4 a 6). Esto hace que las fuerzas másicas a equilibrar sean  $\mathbf{m}_i[0, \mathbf{Z}_i, -\mathbf{Y}_i]$  asociadas con aceleraciones rotacionales unitarias según X,  $\mathbf{m}_i[-\mathbf{Z}_i, 0, \mathbf{X}_i]$  asociadas con aceleraciones rotacionales unitarias según Y, y  $\mathbf{m}_i[\mathbf{Y}_i, -\mathbf{X}_i, 0]$  asociadas con aceleraciones rotacionales unitarias según Z.

La matriz de inercias del chasis ( $\mathbf{M}\mathbf{I}_{ch}$ ) se obtiene rotando la misma dada en ejes cuerpo, cargada como parte de los datos del problema, a través de la matriz de pasaje que, en cada paso de tiempo, vincula a los sistemas de coordenadas X,Y,Z y x,y,z.

La matriz de inercias de las suspensiones ( $\mathbf{M}\mathbf{I}_s$ ) se calcula según:

$$\mathbf{M}\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4n} \mathbf{m}_i \cdot (\mathbf{Y}_i^2 + \mathbf{Z}_i^2) & \text{sim} & \text{sim} \\ -\sum_{i=1}^{4n} \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{Y}_i & \sum_{i=1}^{4n} \mathbf{m}_i \cdot (\mathbf{X}_i^2 + \mathbf{Z}_i^2) & \text{sim} \\ -\sum_{i=1}^{4n} \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{Z}_i & -\sum_{i=1}^{4n} \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{Z}_i & \sum_{i=1}^{4n} \mathbf{m}_i \cdot (\mathbf{X}_i^2 + \mathbf{Y}_i^2) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Esto da lugar a las siguientes tres columnas de la matriz de masa (columnas 4 a 6):

$$\mathbf{M}(:,4:6) = \begin{bmatrix} \text{sim} & \text{sim} & \text{sim} \\ \text{sim} & \text{sim} & \text{sim} \\ \text{sim} & \text{sim} & \text{sim} \\ \mathbf{M}\mathbf{I}_{ch}(1,1) + \mathbf{M}\mathbf{I}_s(1,1) & \text{sim} & \text{sim} \\ \mathbf{M}\mathbf{I}_{ch}(2,1) + \mathbf{M}\mathbf{I}_s(2,1) & \mathbf{M}\mathbf{I}_{ch}(2,2) + \mathbf{M}\mathbf{I}_s(2,2) & \text{sim} \\ \mathbf{M}\mathbf{I}_{ch}(3,1) + \mathbf{M}\mathbf{I}_s(3,1) & \mathbf{M}\mathbf{I}_{ch}(3,2) + \mathbf{M}\mathbf{I}_s(3,2) & \mathbf{M}\mathbf{I}_{ch}(3,3) + \mathbf{M}\mathbf{I}_s(3,3) \\ \sum_{i=1}^n [0, -\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}_i] \bullet \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_i}{\partial \beta_1} & \sum_{i=1}^n [\mathbf{Z}_i, 0, -\mathbf{X}_i] \bullet \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_i}{\partial \beta_1} & \sum_{i=1}^n [-\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_i, 0] \bullet \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_i}{\partial \beta_1} \\ \sum_{i=1}^n [0, -\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}_i] \bullet \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_i}{\partial \beta_2} & \sum_{i=1}^n [\mathbf{Z}_i, 0, -\mathbf{X}_i] \bullet \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_i}{\partial \beta_2} & \sum_{i=1}^n [-\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_i, 0] \bullet \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_i}{\partial \beta_2} \\ \sum_{i=1}^n [0, -\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}_i] \bullet \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_i}{\partial \beta_3} & \sum_{i=1}^n [\mathbf{Z}_i, 0, -\mathbf{X}_i] \bullet \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_i}{\partial \beta_3} & \sum_{i=1}^n [-\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_i, 0] \bullet \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_i}{\partial \beta_3} \\ \sum_{i=1}^n [0, -\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}_i] \bullet \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_i}{\partial \beta_4} & \sum_{i=1}^n [\mathbf{Z}_i, 0, -\mathbf{X}_i] \bullet \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_i}{\partial \beta_4} & \sum_{i=1}^n [-\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_i, 0] \bullet \mathbf{m}_i \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_i}{\partial \beta_4} \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 2.1.3 COLUMNAS SIETE A DIEZ

Para el cálculo de las columnas siete a diez, los únicos valores aún no calculados y no nulos son los de la diagonal.

En lugar de utilizar el método de las aceleraciones unitarias, para la evaluación de estos términos se deriva dos veces la energía cinética respecto de las velocidades de interés. Para un sistema de paralelogramos deformables, esta puede expresarse según:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \frac{1}{2} \mathbf{I}_{\text{sup}} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I}_{\text{inf}} \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I}_{\text{tens}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I}_{\text{semi}} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right)^2 + \dots \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{m}_{\text{pm}} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_{\text{pm}}}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_{\text{pm}}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{m}_{\text{push}} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_{\text{push}}}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_{\text{push}}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $\mathbf{I}_{\text{sup}}$  e  $\mathbf{I}_{\text{inf}}$  son las inercias rotacionales de las parrillas superior e inferior respecto a sus ejes de giro,  $\mathbf{I}_{\text{tens}}$  e  $\mathbf{I}_{\text{semi}}$  son las inercias rotacionales del tensor y del tramo central del semieje respecto a sus apoyos fijos al chasis, y  $\mathbf{m}_{\text{pm}}$  y  $\mathbf{m}_{\text{push}}$  son las masas del conjunto portamasa más rueda y del actuador del amortiguador más la parte móvil del mismo.  $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$  y  $\frac{\partial \beta}{\partial t}$  son las velocidades de las parrillas superior e inferior respecto de sus ejes;  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  y  $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$  son las velocidades de rotación del tensor de alineación y del tramo recto del semieje respecto de sus apoyos fijos al chasis; por último,  $\frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_{\text{pm}}}{\partial t}$  y  $\frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_{\text{push}}}{\partial t}$  son los vectores velocidad de traslación de los CG del conjunto portamasa más rueda y del actuador del amortiguador más la parte móvil del mismo.

Todas las velocidades pueden ponerse en función de la velocidad de variación de la coordenada generalizada:

$$\frac{\partial ( )}{\partial t} = \frac{\partial ( )}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (11)$$

con lo que la energía cinética queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \frac{1}{2} \left[ \mathbf{I}_{\text{sup}} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right)^2 + \mathbf{I}_{\text{inf}} + \mathbf{I}_{\text{tens}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 + \mathbf{I}_{\text{semi}} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \right)^2 + \mathbf{m}_{\text{pm}} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_{\text{pm}}}{\partial \beta} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_{\text{pm}}}{\partial \beta} \right) + \dots \right. \\ & \left. \mathbf{m}_{\text{push}} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_{\text{push}}}{\partial \beta} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}\mathbf{c}\mathbf{g}_{\text{push}}}{\partial \beta} \right) \right] \cdot \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Derivando dos veces la ecuación 12 respecto de  $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ , se obtienen los términos buscados (elementos  $\mathbf{M}(\mathbf{i}, \mathbf{i})$  con  $i = 7$  a 10).

$$\mathbf{M}(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = \mathbf{I}_{\text{sup}} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right)^2 + \mathbf{I}_{\text{inf}} + \mathbf{I}_{\text{tens}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 + \mathbf{I}_{\text{semi}} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \right)^2 + \dots$$

$$+ \mathbf{m}_{\text{pm}} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}} \mathbf{c} \mathbf{g}_{\text{pm}}}{\partial \beta} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}} \mathbf{c} \mathbf{g}_{\text{pm}}}{\partial \beta} \right) + \mathbf{m}_{\text{push}} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}} \mathbf{c} \mathbf{g}_{\text{push}}}{\partial \beta} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{X}} \mathbf{c} \mathbf{g}_{\text{push}}}{\partial \beta} \right) \quad (13)$$

Cuando se producen aceleraciones unitarias en alguna de las suspensiones, las fuerzas generalizadas en las restantes son nulas. Esto implica que, los términos fuera de la diagonal de la submatriz formada por las filas 7 a 10 y las columnas 7 a 10 de la matriz de masa serán nulos. Con esto y la simetría utilizada para calcular las primeras seis filas, se concluye el armado de las columnas siete a diez, quedando completa la matriz de masa.

## 2.2 Armado del vector de fuerzas generalizadas

Para el armado del vector de fuerzas generalizadas se tienen en cuenta siete entradas:

1. Momentos aplicados por los semiejes a las ruedas.
2. Momentos aplicados a las ruedas por los sistemas de freno.
3. Fuerzas laterales aplicadas por el piso sobre las ruedas.
4. Fuerzas verticales aplicadas por el piso sobre las ruedas.
5. Fuerzas debidas al peso del chasis y los componentes de los sistemas de suspensión.
6. Fuerzas aerodinámicas.
7. Fuerzas ejercidas por los conjuntos resorte-amortiguador.

Estas cargas se calculan con subrutinas externas al programa principal por lo que pueden modificarse fácilmente. Lo interesante de esto es que el programa resulta muy flexible y una herramienta poderosa para el análisis de diseños poco convencionales, posibilitándose el tratamiento de distintas leyes constitutivas de neumáticos, leyes de conjuntos resorte amortiguador no lineales, sistemas de suspensión activos, etc..

Durante la integración temporal, el programa va llamando a cada una de estas subrutinas, y dada la posición y velocidad del sistema (vehículo y suspensiones), las acciones del piloto y, de hacer falta, la historia de movimiento, se evalúan las cargas para ese paso de tiempo. Finalmente, una vez definidas las subrutinas que calculan las cargas, las únicas entradas necesarias son las acciones del piloto, por lo que el programa funciona prácticamente como un simulador.

El tratamiento dado a cada uno de los siete tipos de cargas definidas recientemente se explica en los puntos 2.2.1 a 2.2.7

### 2.2.1 Momentos aplicados por los semiejes a las ruedas

Es importante destacar el por qué se ha dado un tratamiento diferente a los momentos aplicados en las ruedas por los frenos o por los semiejes. La diferencia radica en el hecho que los sistemas de frenos vinculan generalmente a la llanta con el portamasa, mientras que los palieres vinculan a la llanta con la salida del diferencial. Esto hace que si el portamasa en su movimiento hacia arriba y abajo gira según el eje de rueda, al aplicarse los frenos se tenga una tendencia a subir o bajar la suspensión, que puede no registrarse cuando el momento se aplica en los palieres.

Un momento aplicado en el palier genera una fuerza en el parche de contacto cuya recta de acción surge de la intersección del plano de rueda con el plano horizontal. La contribución de esta fuerza a los primeros seis grados de libertad ( $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ ) se calcula inmediatamente, ya que resulta ser la proyección de esta y su momento respecto al CG del chasis sobre los tres ejes coordenados.

La contribución sobre la coordenada generalizada que mide la deformación de las restantes suspensiones es cero, pero la contribución sobre la suspensión en que se aplica el momento puede no serlo. Para cuantificarla se calculan las fuerzas y momentos que aparecen sobre el rulemán de rueda, debidos a la fuerza en el piso y a los esfuerzos secundarios que aparecen en las juntas homocinéticas por estar estas desalineadas. Obviamente, cuando se traslada la fuerza desde el piso al rulemán de rueda, no se tiene en cuenta el momento según el eje ya que éste es soportado por el semieje y no por el portamasa. Luego, por trabajos virtuales se calcula que contribución tienen esta fuerza y el momento resultantes a subir o bajar la suspensión. Para ello, en la solución del problema geométrico, deben calcularse las derivadas que miden el giro y el desplazamiento según los tres ejes del rulemán de rueda, respecto de la coordenada generalizada  $\beta$  para el estado de deformación en que se encuentra en ese momento el sistema. Con esto, la ecuación de trabajos virtuales que cuantifica la fuerza generalizada resulta:

$$\mathbf{fg} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \beta} + \bar{\mathbf{M}} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \beta} \quad (14)$$

donde  $\mathbf{fg}$  es la fuerza generalizada que se quiere averiguar,  $\bar{\mathbf{F}}$  es el vector resultante de fuerzas que actúa sobre el rulemán de rueda,  $\frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \beta}$  es el vector que mide la derivada del desplazamiento del rulemán de rueda respecto de  $\beta$ ,  $\bar{\mathbf{M}}$  es el vector momento resultante aplicado en el rulemán de rueda, y  $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \beta}$  es el vector que mide la derivada de la rotación del rulemán de rueda respecto de  $\beta$ .

### 2.2.2 Momentos aplicados por los frenos a las ruedas

La fuerza que se produce en el parche de contacto de una rueda cuando a esta se le aplica un momento de frenado es, al igual que las recién analizadas, horizontal y está orientada según el plano de la llanta respectiva. Su contribución a los seis primeros grados de libertad ( $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ ) se calcula como se mencionó en el inciso anterior.

Al igual que para las fuerzas surgidas de los momentos aplicados en los palieres, el momento de frenado aplicado sobre una suspensión no tiene contribución sobre la deformación de las restantes; sin embargo, puede si tener contribución sobre la suspensión en que se aplica. Para calcularla, nuevamente se trasladan los esfuerzos desde el parche de contacto al rulemán de rueda, y la contribución se calcula utilizando la ecuación 14.

### 2.2.3 Fuerzas laterales aplicadas por el piso sobre las ruedas

Inicialmente se debe definir qué se entiende por fuerzas laterales. Para éste trabajo, se descompuso la fuerza que hace el neumático en una componente horizontales y otra vertical. Luego, a la componente horizontal se la descompuso nuevamente en una componente contenida en el plano de la llanta y otra normal a la anterior. Esta última componente es lo que se designa en éste trabajo como fuerza lateral.

Nuevamente, el tratamiento de estas fuerzas es muy simple para los primeros seis grados de libertad y resulta exactamente igual a los dos casos anteriores.

También en éste caso, la fuerza lateral aplicada sobre una suspensión no tiene contribución sobre la deformación de las restantes; sin embargo, puede si tener contribución sobre la suspensión en que se aplica. Para calcularla se utilizan trabajos virtuales, pero en lugar de trasladar los esfuerzos al rulemán de rueda como en los casos anteriores, la ecuación de trabajos virtuales se plantea con las derivadas del movimiento del parche de contacto, ya que aquí el momento es nulo.

Se obtiene entonces

$$\mathbf{fg} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \beta} \quad (15)$$

donde  $\mathbf{fg}$  es la fuerza generalizada que se quiere averiguar,  $\bar{\mathbf{F}}$  es el vector fuerza lateral que actúa sobre el parche de contacto, y  $\frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \beta}$  es el vector que mide la derivada del desplazamiento del parche de contacto respecto de  $\beta$ .

### 2.2.4 Fuerzas verticales aplicadas por el piso sobre las ruedas

El tratamiento de estas fuerzas para los primeros seis grados de libertad es exactamente igual a los tres casos anteriores.

Nuevamente, la fuerza vertical aplicada sobre una suspensión no tiene contribución sobre la deformación de las restantes; sin embargo, tiene que tener una contribución muy importante

sobre la suspensión en que se aplica. Para calcularla se utilizan trabajos virtuales, pero en lugar de trasladar los esfuerzos al rulemán de rueda, estos se trasladan al extremo de la llanta (punto en que se une con la cubierta). Este punto se supone exactamente encima del parche de contacto, por lo que la fuerza vertical aplicada en el parche de contacto no produce ningún momento. De este modo, solo se calcula en la ecuación de trabajos virtuales la contribución de la fuerza y el desplazamiento al igual que en la ecuación 15.

### 2.2.5 Fuerzas debidas al peso del chasis y los componentes de los sistemas de suspensión

La tercera columna de la matriz de masa se obtuvo poniendo una aceleración unitaria según el versor  $\hat{k}_{x,y,z}$ , y calculando qué esfuerzos había que hacer sobre cada grado de libertad para que estas fuerzas resulten equilibradas. Las fuerzas que los pesos propios producen sobre cada CG reproducen exactamente 9.81 veces el sistema de fuerzas de inercia analizado; por ende, si uno busca encontrar la fuerza generalizada que este sistema produce, puede inferir que será -9.81 veces el vector de fuerzas generalizadas necesario para equilibrar fuerzas unitarias (tercera columna de la matriz de masa). De este modo, no se hace necesario ningún cálculo adicional más que esta simple multiplicación escalar para tener en cuenta la contribución de los pesos propios.

### 2.2.6 Fuerzas aerodinámicas

Con el nombre "fuerzas aerodinámicas" se engloba no sólo las fuerzas sino también los momentos aerodinámicos que pueden producirse. El tratamiento dado a estos esfuerzos consiste simplemente en sumar las fuerzas según los tres ejes a las tres primeras filas del vector de fuerzas generalizadas, y los tres momentos a las filas 4 a 6 del mismo.

### 2.2.7 Fuerzas ejercidas por los conjuntos resorte-amortiguador

Las fuerzas producidas por los conjuntos resorte-amortiguador solo tienen participación en el sistema de suspensión en el que están instalados. Luego, las seis primeras filas del vector de fuerzas generalizadas producido por estas serán nulas.

De aquí en adelante, llamaremos actuador a cada conjunto resorte-amortiguador.

La contribución de la fuerza de cada actuador a la fuerza generalizada del grado de libertad en que éste está instalado, se calcula nuevamente por el método de trabajos virtuales. En éste caso, tanto las fuerzas como los desplazamientos son escalares. La ecuación de trabajos virtuales utilizada para calcular la contribución es:

$$\mathbf{fg} = \pm \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \beta} \quad (16)$$

siendo  $\mathbf{fg}$  la fuerza generalizada buscada,  $\mathbf{F}$  la fuerza hecha por el actuador en su vástago, y  $\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \beta}$  la derivada de la longitud del actuador respecto de  $\beta$ . La determinación del signo depende de la convención utilizada para el sentido de la fuerza (positivo en caso de tracción o

de compresión). Nuevamente, la derivada  $\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \beta}$  debe calcularse al resolver el problema geométrico al comenzar el paso de tiempo.

La incorporación de sistemas antirrolido debe incluirse en el modelo a través de la subrutina que calcula las cargas en los actuadores. Esto permite no solo la inclusión de una rigidez aplicada a la diferencia de la deformación de ambas suspensiones, sino también la inclusión de constitutivas no lineales del sistema antirrolido, amortiguamiento, control, etc..

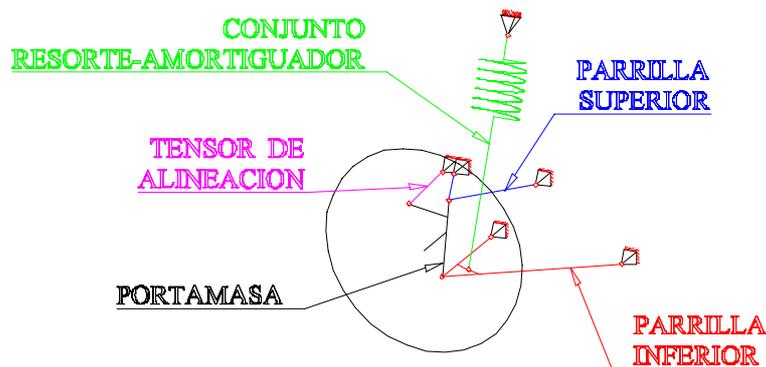


Figura 1. Diagrama esquemático de suspensión tipo Paralelogramos Deformables.

### 3 RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos para dos vehículos equipados, uno con un sistemas de suspensión tipo paralelogramos deformables y el otro con un sistema tipo Mac Person que deberían, teóricamente tener comportamientos idénticos en pequeñas deformaciones alrededor de su posición de equilibrio. Las suspensiones se diseñaron de modo que las deformaciones fueran prácticamente nulas en condición de curva estacionaria. Ambos vehículos tenían tracción trasera, un motor de 150 HP y un peso de 1050 Kg.

La maniobra analizada consistía en el ingreso, tránsito y salida de una curva de radio constante, partiendo de una velocidad estable dada por la intersección de las curvas de potencia necesaria y disponible para la relación de transmisión utilizada.

Al piloto se lo simuló simplemente como un control proporcional cuya única entrada era el error entre la posición de la trompa del auto y la trayectoria teórica. El acelerador debía permanecer durante toda la maniobra al 90%, la relación de transmisión no debía modificarse y el embrague debía permanecer inactivo.

En la Figura 2 se observa la deflexión de volante como función del tiempo para los dos vehículos analizados. Recordar que la deflexión de volante es proporcional al error entre la trayectoria teórica y real.

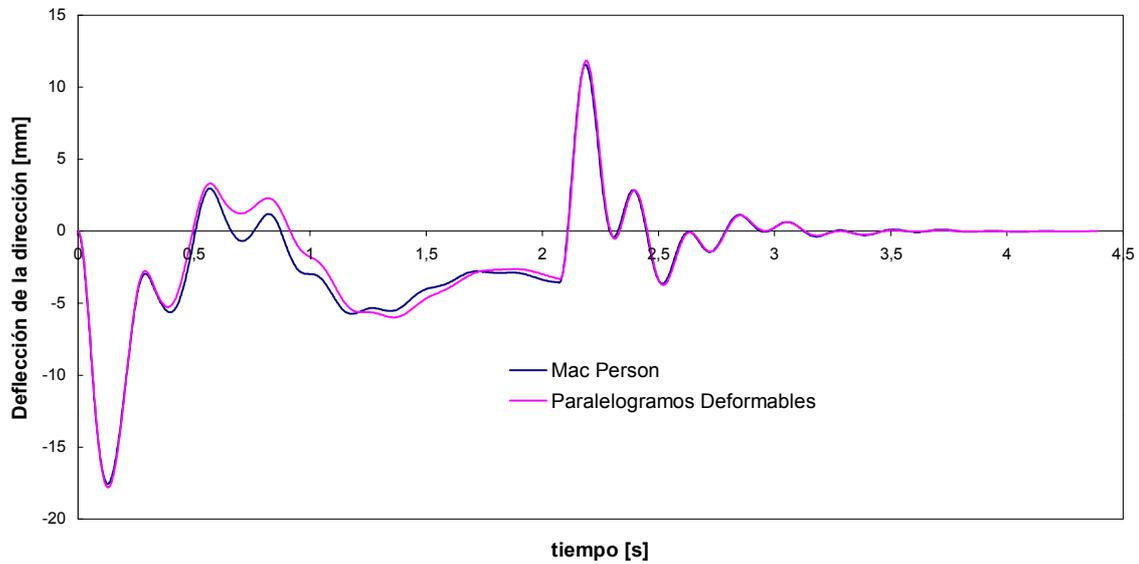


Figura 2. Evolución de la deflección de la dirección como función del tiempo.

La subrutina utilizada en este caso para el cálculo de las cargas laterales y de la tracción utiliza constitutivas diferentes si el neumático se encuentra adherido o patinando. Se grafica en la Figura 3 la cantidad de ruedas que patinaban como función del tiempo, y se agrega la curva del porcentaje de exigencia al que se encontraba sometida la rueda delantera externa. La escala utilizada indica 3 para una exigencia de 100%.

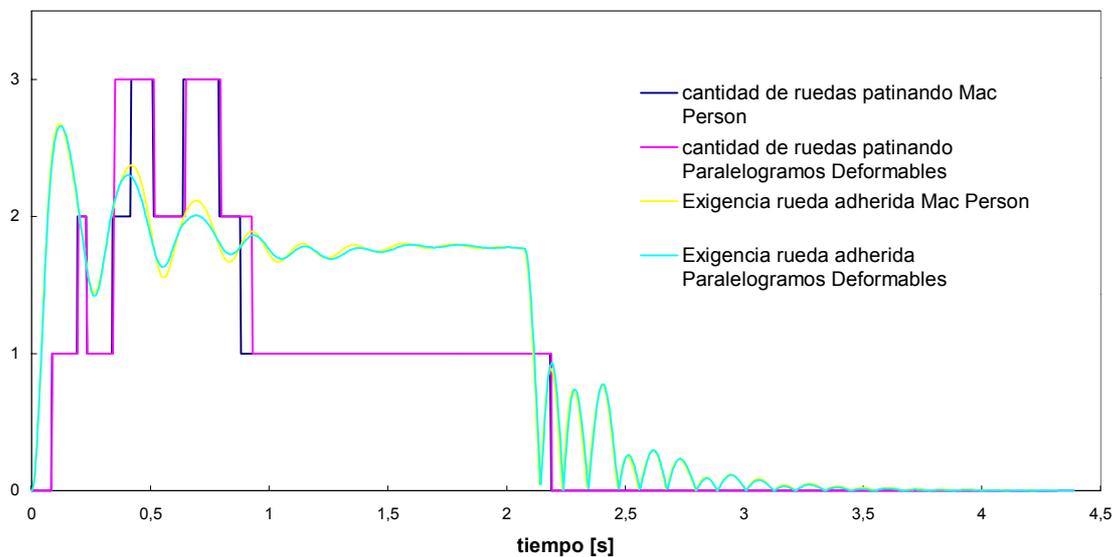


Figura 3. Evolución de la cantidad de ruedas patinando y del porcentaje de exigencia.

En la Figura 4 puede observarse el factor de carga lateral calculado para ambos vehículos.

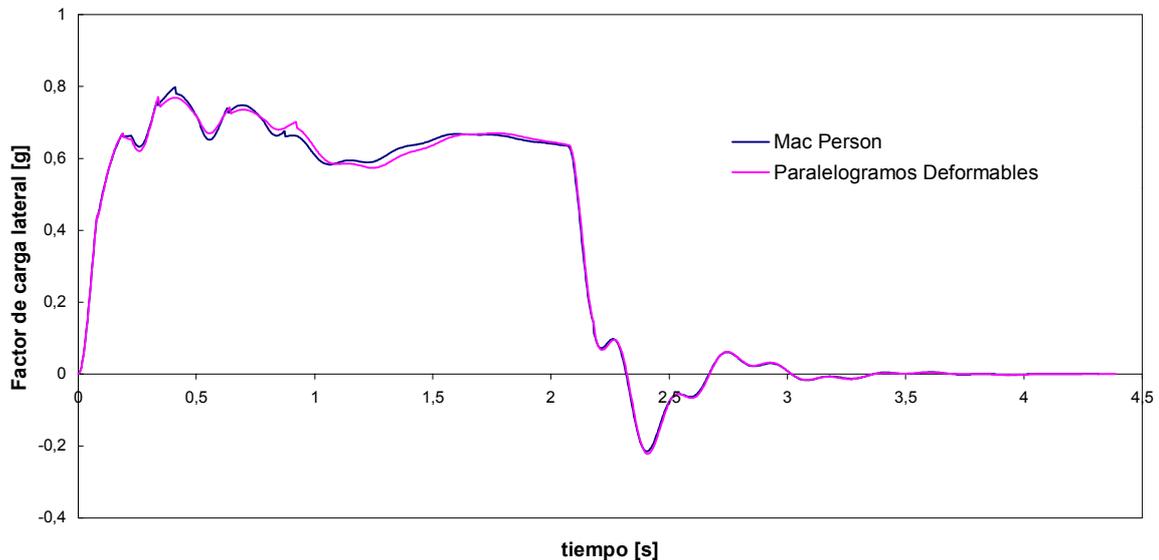


Figura 4. Evolución de la aceleración lateral como función del tiempo.

Como puede observarse, las respuestas predichas por el programa para ambos vehículos son muy similares. Esto muestra la capacidad del programa para analizar vehículos con uno u otro sistema de suspensión.

#### 4 CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJOS

El correcto modelado del problema requiere gran cantidad de información que muchas veces resulta difícil de obtener, como pueden ser las leyes de comportamiento de los neumáticos, criterios de desprendimiento y readherencia de los mismos, esfuerzos aerodinámicos, etc.. Lo que acota entonces la precisión de los resultados no es ya el modelo matemático utilizado, sino que pasa a ser ahora el conocimiento del comportamiento de los componentes utilizados en el vehículo (neumáticos, amortiguadores, etc..). Luego, con un exhaustivo conocimiento del desempeño de los mismos, se puede llegar a un excelente nivel de modelado que permitiría el uso de esta herramienta para la optimización de las performances buscadas.

La línea de trabajo actual apunta a la inclusión en el modelo de deformaciones elásticas tanto del chasis como de los órganos que componen las suspensiones. Se está estudiando además la inclusión de rutinas que permitan el modelado de transmisiones con diferenciales autoblocantes, así como la inclusión de otros sistemas de suspensión que le den mayor versatilidad a la herramienta desarrollada.