

## UNA GENERALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE REYNOLDS PARA EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE LUBRICACIÓN EN COJINETES

Pablo G. Girón<sup>†</sup> y Víctor H. Cortínez<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos  
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional  
11 de abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-0291-4555220 FAX: 0291 4555311  
e-mail: vcortine@frbb.utn.edu.ar, web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar/gasm>

**Palabras clave:** Lubricación. Cojinetes. Elementos Finitos

**Resumen.** *En el presente artículo se presenta una expresión generalizada de la ecuación de Reynolds que gobierna el problema de lubricación en cojinetes, tanto para el caso hidrodinámico (cojinetes absolutamente rígidos) como elasto-hidrodinámico (considerando la flexibilidad del cojinete). La generalización consiste en incluir términos de "penalización" para corregir la ecuación de Reynolds en las zonas donde se produce cavitación. Dicha formulación se implementa en forma computacional mediante el método de elementos finitos, a través del software Flex PDE.*

## 1 INTRODUCCIÓN

La Teoría de Lubricación ha permitido el tratamiento de numerosos problemas tecnológicos relacionados con la Mecánica de los Fluidos (lubricación de cojinetes, procesamiento de polímeros, etc.). Dicha teoría se expresa mediante la ecuación bidimensional de Reynolds, que modeliza el comportamiento de una delgada película de fluido, teniendo en cuenta una dirección preferencial de desplazamiento. De esta manera, el problema se reduce a la determinación del campo de presiones en el fluido<sup>[1]</sup>. Este modelo ha sido aplicado profusamente en la solución de diversos problemas de lubricación en cojinetes, tanto para modelos ideales absolutamente rígidos, como asimismo teniendo en cuenta la elasticidad del material, lo que conduce a considerar las deformaciones producidas sobre el metal por efecto de la sobrepresión que se genera dentro del cojinete. Este tipo de fenómeno es importante en el caso de rodamientos o cojinetes de bolas, donde las cargas imperantes sobre las bolillas en la zona de contacto generan altas sobrepresiones que tienden a deformarlas. También puede darse el fenómeno en cojinetes altamente cargados<sup>[2]</sup>.

Las soluciones matemáticas a la ecuación de Reynolds predicen en muchos casos la existencia de una zona en la cual la presión es menor que la de saturación del fluido (aproximadamente igual a la presión atmosférica). No obstante es un hecho conocido que presiones más bajas que la de saturación originan la presencia de burbujas de aire. Este fenómeno se conoce como cavitación. La cavitación lleva a la ruptura de la película de fluido, razón por la cual la ecuación de Reynolds deja de ser válida en dicha zona (esto es porque dicha ecuación asume la continuidad de la película fluida).

La delimitación de la zona cavitada es desconocida “a priori”, debiendo obtenerse en el mismo proceso de solución. Matemáticamente esto lleva a la generación de un problema de borde libre<sup>[3]</sup>. Teniendo en cuenta la existencia de la zona de cavitación, Gumbel<sup>[4]</sup> propuso despreciar las presiones negativas en la solución de la ecuación de Reynolds. De todas maneras no es así posible localizar en forma precisa la frontera entre la zona activa (presiones positivas) y la zona cavitada. Básicamente, la inconsistencia radica en que se está utilizando la distribución de presiones que surge de la ecuación de Reynolds aplicada aún en la zona de cavitación.

Uno de los modelos más utilizados en la modelización del fenómeno de cavitación, se denomina modelo de cavitación de Reynolds y considera la continuidad del flujo a través de la frontera libre que separa la zona activa de la zona cavitada. Este modelo introduce para la frontera libre las condiciones de “localización”:  $p = \partial p / \partial n = 0$ .

Otros modelos de cavitación, como el de Elrod-Adams<sup>[5]</sup> introducen la hipótesis de que en la zona de cavitación existe una mezcla de fluido y aire definiendo una nueva variable  $\Phi(x,y)$  que representa la concentración de lubricante en el entorno del punto  $(x,y)$ , es decir una función de saturación que vale 1 en la zona activa y toma valores entre 0 y 1 en la zona cavitada.

En este trabajo se presenta una solución computacional del problema de lubricación con cavitación mediante una modificación del modelo de Reynolds. El enfoque aludido ha sido implementado computacionalmente en el software Flex PDE<sup>[6,7]</sup>. Dicho software permite resolver, por medio de la aplicación del Método de Elementos Finitos (MEF), problemas de

contorno formulados mediante ecuaciones diferenciales de segundo orden a derivadas parciales.

El enfoque utilizado para modelizar el fenómeno de cavitación, consiste en incorporar a la ecuación de Reynolds un “término de penalización” que permite obtener en forma automática la zona de cavitación, consiguiéndose, de esta manera, resultados concordantes con los existentes en la literatura. La ecuación de Reynolds así generalizada se torna no lineal. Este enfoque se extiende luego a otros problemas más complejos que consideran la elasticidad del cojinete. El modelo computacional propuesto permite resolver con simplicidad problemas de alto interés tecnológico ya que hace posible modelizar problemas reales en cojinetes para determinar su comportamiento fluidomecánico. Además, debido a la facilidad de operación del programa y a su excelente salida gráfica, se constituye en una poderosa herramienta didáctica para aplicaciones en los cursos de Mecánica de los Fluidos.

## 2 MODELO DE CAVITACIÓN DE REYNOLDS

El modelo de cavitación de Reynolds para flujo isotérmico incompresible en cojinetes rígidos con alimentación axial (en  $x = 0$ ), se expresa matemáticamente, para el dominio que se muestra en la figura 1, mediante las siguientes ecuaciones (1):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6u \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) \quad (1 \text{ a})$$

$$p > 0 \text{ en } \Omega^+ \quad (1 \text{ b})$$

$$p = 0 \text{ en } \Omega_0 \quad (1 \text{ c})$$

$$p = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ en } \Sigma \quad (1 \text{ d})$$

$$p = 0 \text{ en } \Gamma \quad (1 \text{ e})$$

Donde:

$$h = C (1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (2)$$

Con la siguiente notación:

x: coordenada circunferencial medida desde el punto de máximo espesor de película

y: coordenada axial

p: presión

$\rho$ : densidad del lubricante

u: velocidad tangencial del eje

$\mu$ : viscosidad del lubricante

h: espesor de la película

C: huelgo radial

$\varepsilon$ : excentricidad radial

Debe observarse que la ecuación (1) es válida solamente en la zona activa ( $\Omega^+$ ) mientras que en la zona cavitada ( $\Omega_0$ ) se impone que la presión sea nula. Sobre el contorno de la zona activa, la ecuación está asociada a una condición de contorno excepto en la interfase con la zona cavitada donde aparecen dos condiciones de borde. La condición adicional es la que permite localizar dicha interfase. El problema así planteado está gobernado por una ecuación lineal sobre un dominio desconocido "a priori" cuya localización exacta depende de las condiciones de presión.

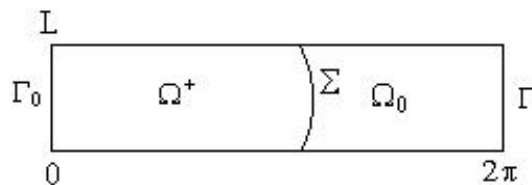


Figura 1: Representación gráfica del dominio desarrollado del problema.

### 3 MODIFICACIÓN DEL MODELO DE REYNOLDS

#### 3.1 Lubricación con cavitación en cojinetes rígidos

El modelo previamente descrito se formula a continuación en forma diferente. La modificación apunta a obtener una ecuación que sea válida tanto en la zona activa como en la zona cavitada. Para ello se incorpora en la ecuación (1) un término de presión multiplicado por una constante extremadamente alta, llegando a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \underline{K_N} \cdot p = 6u \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) \quad (3)$$

Siendo:

$$K_N = \begin{cases} \text{Valor muy grande, si } p < 0 \\ 0, \text{ si } p \geq 0 \end{cases}$$

La ecuación (3) está asociada a la siguiente condición de borde:

$$p = 0 \text{ en } \Gamma \quad (4)$$

Puede apreciarse que en la zona activa  $K_N = 0$ , por lo que la ecuación de Reynolds retoma su forma original. En cambio en la zona cavitada, el término agregado forzará a que la presión se anule. Es fácil entender esto si se divide la ecuación (3) por la constante  $K_N$  y se considera que esta tiende a infinito. Teniendo en cuenta que la presión y sus derivadas deben tomar valores finitos, los términos originales de la ecuación tenderán a cero, quedando solo el término adicional que indicará  $p = 0$ . Desde el punto de vista numérico solo es necesario asumir un valor muy grande para  $K_N$  lo que asegurará que la presión toma un valor despreciable en la zona cavitada. El signo “-“ del término agregado responde a una cuestión de estabilidad numérica.

Es interesante notar que las condiciones de borde se plantean en el dominio completo del problema haciendo caso omiso de la zona cavitada. De todas maneras teniendo en cuenta el hecho de que la presión debe anularse por la forma de la ecuación en la dicha zona, y considerando que no se ha impuesto ninguna discontinuidad para la presión, la condición de borde de cavitación (1 d) se cumplirá de manera automática. Una forma interesante de razonar este enfoque es mediante una analogía con el caso de una membrana sobre una fundación elástica unidireccional. Finalmente desde el punto de vista de la formulación variacional del problema, el término agregado se denomina de “penalización”.

En consecuencia, en esta formulación, debe resolverse un problema diferencial sobre un dominio fijo. La localización de la zona cavitada se ha trasladado a la ecuación diferencial. El precio que debe pagarse por considerar un dominio fijo es tratar con una ecuación de Reynolds no lineal.

De todas maneras, la ecuación así generalizada es conveniente para la aplicación de eficientes métodos numéricos que se basan en la formulación diferencial, tales como el método de cuadratura diferencial<sup>[8]</sup>.

En el presente trabajo esta ecuación se ha desarrollado para ser resuelta mediante el programa Flex-PDE, que es un poderoso “solver” de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales. Internamente este “solver” transforma de manera simbólica, el problema diferencial en uno variacional mediante el método de Galerkin, y finalmente procede a la solución numérica del problema utilizando el método de los elementos finitos.

### **3.2 Lubricación elastohidrodinámica con cavitación**

En algunos casos industriales, la presión del lubricante puede producir deformaciones elásticas apreciables en el cojinete. Dicha deformación modifica el espesor de la película lubricante y, en consecuencia, la distribución de presiones.

Luego, para determinar en forma precisa la distribución de presiones debe abordarse el problema acoplado de la hidrodinámica del cojinete y la deformación elástica del mismo, conocido como lubricación elastohidrodinámica.

Una aproximación razonable para describir el comportamiento elástico de un cojinete muy delgado es modelizarlo como una placa elástica simplemente apoyada en los bordes laterales [9].

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, el huelgo entre cojinete y eje toma la forma:

$$h_i(x) = h(x) + w(x, y) \quad (5)$$

donde  $w(x, y)$  representa el desplazamiento transversal que se produce en el cojinete debido a la acción de la presión.

Haciendo uso de la ecuación generalizada de Reynolds, descripta en el apartado anterior el problema elastohidrodinámico se expresa matemáticamente en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - K_N \cdot p - K_C \cdot p - K_F \cdot p = 6u \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) \quad (6 a)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + p = 0 \quad (6 b)$$

$$\xi \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \Psi = 0 \quad (6 c)$$

Donde:

$$h = C (1 + \varepsilon \cdot \cos x) + w \quad (7 a)$$

$$K_C = \begin{cases} \text{Valor muy grande, si } 0 \leq x < 0.005 \\ 0, \text{ si } x \geq 0.005 \end{cases} \quad (7 b)$$

$$K_F = \begin{cases} \text{Valor muy grande, si } 6.23 \leq x < 2\pi \\ 0, \text{ si } x \leq 6.23 \end{cases} \quad (7 c)$$

siendo:

$w$ : deformación elástica de la placa (cojinete)

$\xi$ : rigidez flexional de la placa

$\Psi$ : variable auxiliar que permite formular el comportamiento elástico de la placa mediante dos

ecuaciones diferenciales (Modelo de Marcus)

Las ecuaciones (6) están asociadas a las siguientes condiciones de borde:

$$p(x,0) = p(x,1) = w(x,0) = w(x,1) = \psi(x,0) = \psi(x,1) = 0 \quad (8 a)$$

$$p(0,z) = p(2\pi, z) \quad (8 b)$$

$$w(0,z) = w(2\pi, z) \quad (8 c)$$

$$\psi(0,z) = \psi(2\pi, z) \quad (8 d)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0,z) = \frac{\partial p}{\partial x}(2\pi, z) \quad (8 e)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,z) = \frac{\partial w}{\partial x}(2\pi, z) \quad (8 f)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0,z) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(2\pi, z) \quad (8 g)$$

Las condiciones (8a) en los bordes laterales del cojinete expresan que la placa está simplemente apoyada y que los valores de  $p$  son iguales a cero (presión atmosférica). Las ecuaciones (8b) a (8g) expresan condiciones cíclicas que garantizan la continuidad en  $x = 0$ . La alimentación de lubricante a presión atmosférica se ha impuesto con el agregado de los términos de penalización  $K_C$  y  $K_F$  en la ecuación diferencial, en forma similar al apartado anterior para la zona cavitada.

#### 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para los ejemplos numéricos se ha considerado  $\varepsilon = 0.9$  y  $C = 1$  en la definición del espesor de película  $h(x)$ .

En primer lugar se resolvió el problema de lubricación en un cojinete rígido de longitud infinita (modelo unidimensional). En la figura 2.a se muestra la distribución de presiones obtenida mediante el modelo de Gumbel. Esto es, se resolvió la ecuación sin considerar cavitación, y luego se anuló la presión donde la solución arrojó valores negativos. En la figura 2.b se muestra la distribución de presiones determinada mediante el presente modelo de Reynolds modificado. De la comparación entre ambas soluciones se desprende que la presión en el modelo con cavitación alcanza valores mayores que en el modelo de Gumbel. Por otra parte, la extensión de la zona activa es mayor en el modelo con cavitación. Estas diferencias pueden acentuarse en otros casos lo que implicaría un mayor efecto de la cavitación en el cálculo de la carga que soporta el cojinete así como de su dirección. Cabe aclarar que los presentes resultados son coincidentes con soluciones analíticas disponibles en la literatura.

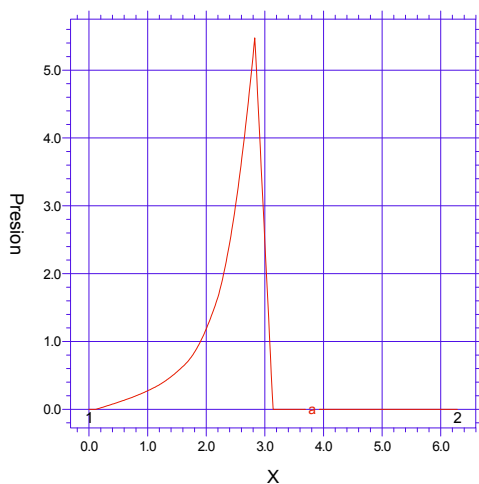
La figura 3 muestra resultados análogos determinados para un cojinete finito de longitud  $L =$

1. Los comentarios generales realizados para la solución unidimensional son válidos también en este caso. Por otra parte comparando la solución bidimensional con la unidimensional se aprecia que la primera arroja valores de presiones pico más bajos que los correspondientes al caso unidimensional. Además la distribución de presiones es notablemente diferente debido a la disminución de las presiones hasta valores nulos en los extremos. Esto puede apreciarse en la figura 4.

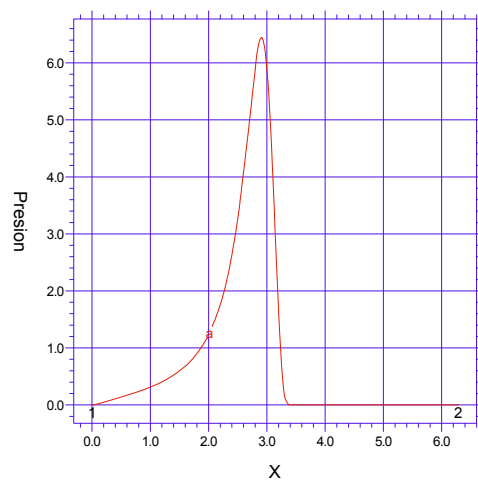
Se han calculado también resultados para el problema elastohidrodinámico con cavitación considerando cuatro diferentes grados de rigidez del cojinete ( $\xi = 0.05$ ,  $\xi = 0.1$ ,  $\xi = 0.5$  y  $\xi \gg 0$ ). La longitud axial de los cojinetes es de  $L = 2$ .

Los resultados se muestran en la figura 5. En el caso del cojinete con gran rigidez flexional ( $\xi = 10000$ ) se observa que la distribución de presiones reproduce los valores obtenidos para el cojinete infinitamente rígido. Se observa también que los valores máximos de presión disminuyen a medida que aumenta la flexibilidad del cojinete.

La figura 6 muestra la distribución de la deformación elástica del cojinete para una rigidez de  $\xi = 0.5$ . Finalmente la figura 7 muestra el espesor de película considerando la deformación del cojinete.

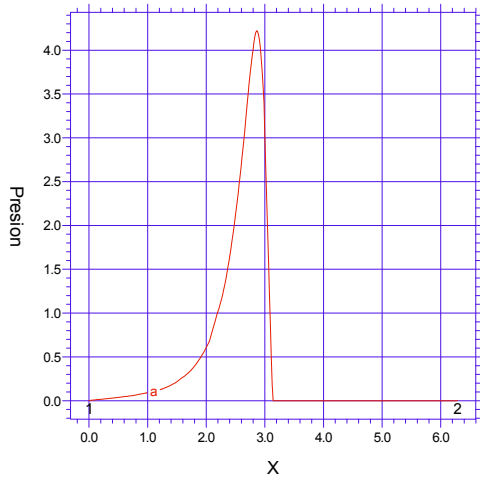


**Figura 2.a: Modelo Unidimensional eliminando la zona cavitada (cojinete rígido)**

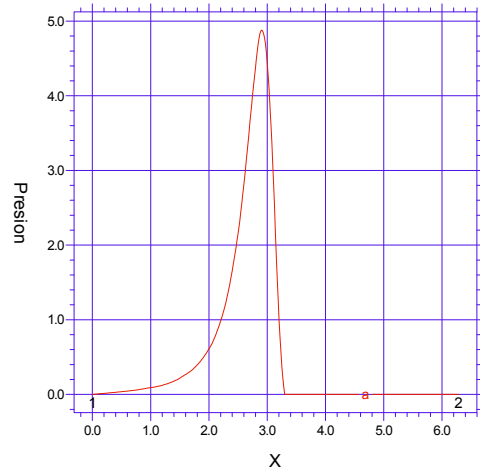


**Figura 2.b: Modelo Unidimensional con el presente enfoque (cojinete rígido)**

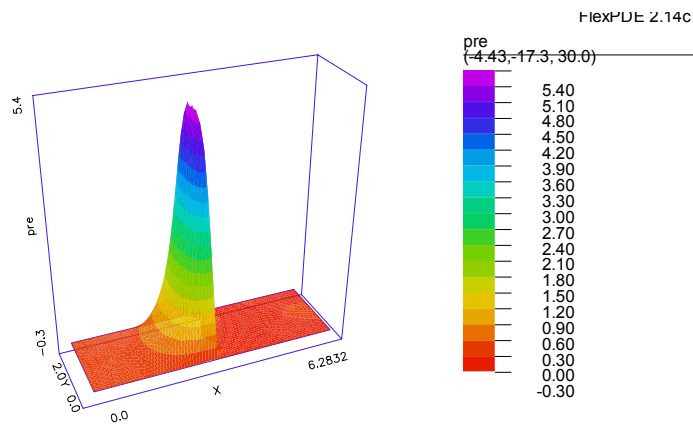




**Figura 3.a: Modelo Bidimensional eliminando la zona cavitada (cojinete rígido)**



**Figura 3.b: Modelo Bidimensional con el presente enfoque (cojinete rígido)**



**Figura 4: Diagrama Tridimensional de Presiones en un cojinete rígido utilizando el presente enfoque**

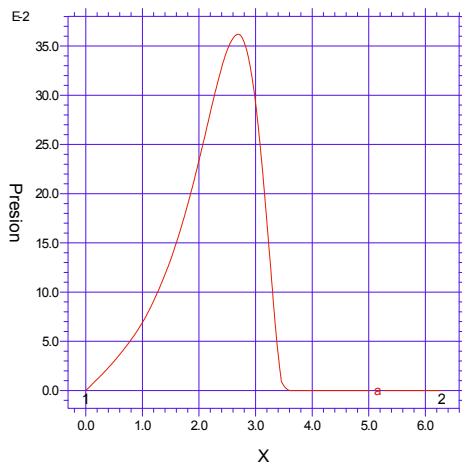


Figura 5.a: Presiones máximas en un cojinete Elástico con  $\zeta = 0.05$ , de acuerdo con el presente enfoque

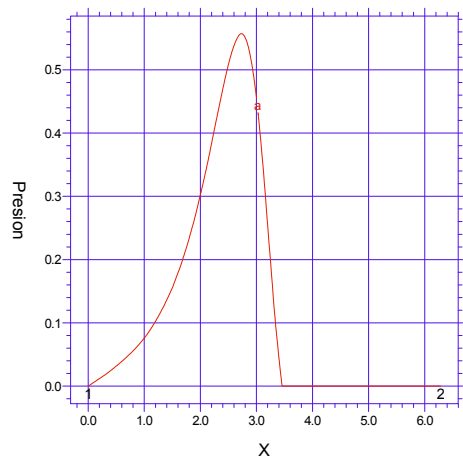


Figura 5.b: Presiones máximas en un cojinete Elástico con  $\zeta = 0.1$ , de acuerdo con el presente enfoque

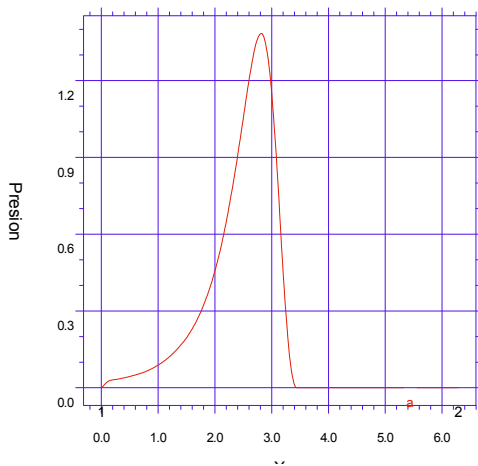


Figura 5.c: Presiones máximas en un cojinete Elástico con  $\zeta = 0.5$ , de acuerdo con el presente enfoque.

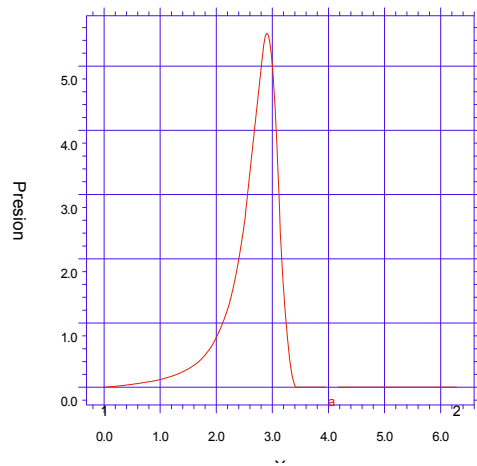


Figura 5.d: Presiones máximas en un cojinete Elástico con  $\zeta \gg 0$ , de acuerdo con el presente enfoque

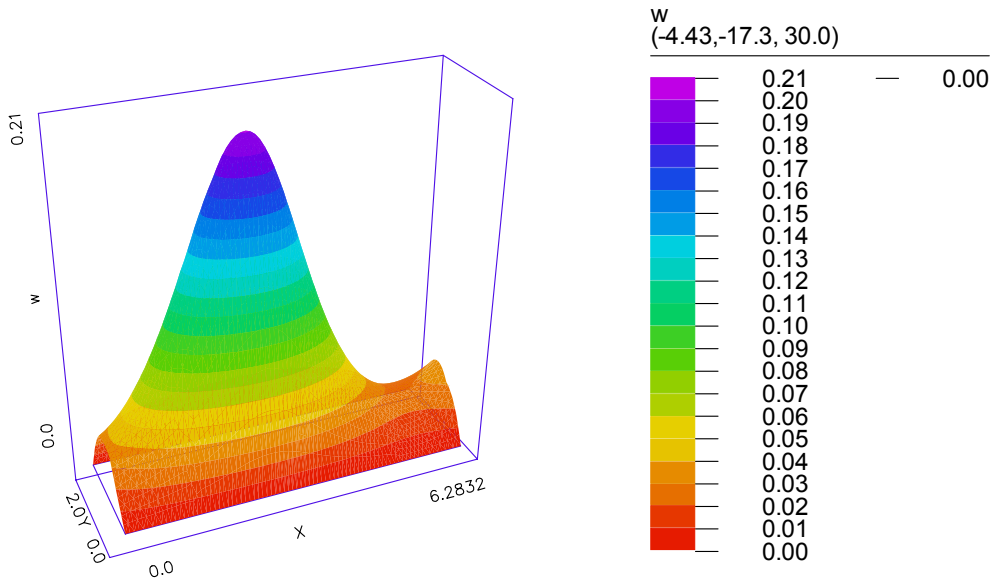


Figura 6: Deformación  $w$  en un cojinete elástico con  $\xi = 0.5$  según el presente enfoque

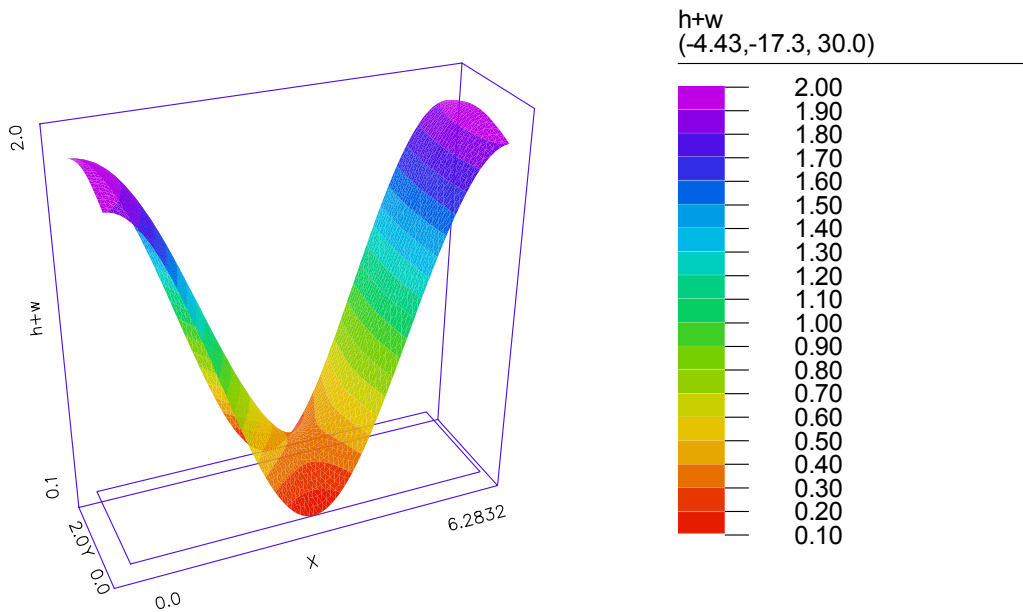


Figura 7:  $h + w$  en un cojinete elástico con  $\xi = 0.5$  según el presente enfoque

## 5 CONCLUSIONES

Se ha presentado una nueva formulación del modelo de cavitación de Reynolds. En el mismo se utiliza una ecuación de Reynolds generalizada no lineal que es válida en todo el dominio. La zona cavitada se obtiene automáticamente al resolver dicha ecuación. El modelo se implementó en el “solver” de elementos finitos FlexPDE . Se presentaron algunos ejemplos de lubricación con cavitación en cojinetes rígidos y flexibles.

Es importante hacer notar que esta técnica puede aplicarse a problemas de mayor generalidad (viscosidad variable con la presión, problemas no isotérmicos, geometrías de mayor complejidad, etc.) que tienen lugar en el ámbito industrial.

Por otra parte el modelo propuesto puede ser también de utilidad en combinación con otras técnicas numéricas basadas en la formulación diferencial.

## 6 REFERENCIAS

- [1] O. Pinkus and B. Sternlicht - 1961 - Theory of Hydrodynamic Lubrication. McGraw Hill Book Company.
- [2] D. Dowson and G.R. Higginson - 1977 - Elasto-Hydrodynamic Lubrication. Pergamon Press.
- [3] J. Durany, G. García and C. Vázquez - 1996 - Applied Mathematical Modelling. 20. “Numerical computational of free boundary problems in elasto-hydrodynamic lubrication”.
- [4] L. Gumbel and E. Everling. - 1925 - Reibung und Schmierung im Maschinenbau. M. Krayn, Berlín.
- [5] N. Calvo, J. Durany and C. Vázquez - 1996 - Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería 13,2, 185 - 209. “Comparación de Algoritmos Numéricos en Problemas de Lubricación Hidrodinámica con Cavitación en Dimensión Uno”.
- [6] Flex PDE User Guide - 2000 - PDE Solutions Inc. ([www.pdesolutions.com](http://www.pdesolutions.com))
- [7] V.H.Cortínez y S.P.Machado.”Fluid-Structure Interaction Analysis by means of Flex-PDE” APPLIED MECHANICS IN THE AMERICAS, Vol. 9, 301-304, 2002.
- [8] V.H. Cortínez, M.T. Piovan y S. Machado. “Differential Quadrature Method for Vibration Analysis of Composite Thin Walled Curved Beams” JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION , Vol. 246, 551-555, 2001.
- [9] J. Durany, G. García and C. Vázquez - 1997 - Mathematical Modelling and Numerical Analysis 31, 495 - 516. “An Elasto-hydrodynamic Coupled Problem between a Piezoviscous Reynolds Equation and a Hinged Plate Model”.