

ESTIMACIÓN DE LOS EXPONENTES DE LYAPUNOV

Luis Lara^{**}, Cesar Stoico^{***}, Rodrigo Machado^{**}, Mario Castagnino^{*}

Instituto de Astronomía y Física del Espacio. Ciudad Universitaria.^{*}
Buenos Aires, Argentina.

Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura.^{**}
Universidad Nacional de Rosario.
Avda. Pellegrini 250, Rosario, Argentina.
e-mail: lplara@fceia.unr.edu.ar

Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas.^{***}
Universidad Nacional de Rosario.
Suipacha 531, Rosario, Argentina.

Palabras clave: sistemas dinámicos, métodos numéricos, algoritmos.

Resumen. *Si bien existe una amplia bibliografía para la determinación de los exponentes de Lyapunov para sistemas dinámicos continuos, en este trabajo definimos un espectro de coeficientes como alternativa al espectro de Lyapunov. Se comparan los exponentes de Lyapunov obtenidos mediante el método de ortogonalización de Gram-Schmidt con los determinados en base al promedio de la parte real de los autovalores de la matriz Jacobiana. Ambas técnicas dan la misma descripción asintótica de la dinámica. El método propuesto requiere menor tiempo de cómputo y posee mayor simplicidad de cálculo.*

1 INTRODUCCIÓN

Para el desarrollo de modelos matemáticos deterministas, se pueden utilizar las ecuaciones diferenciales ordinarias. En general, cuanto más detallado es el modelo con respecto a la descripción del sistema, las ecuaciones aumentan su complejidad y dejan de ser lineales^(1, 3, 4). Debido a la pérdida de linealidad, pueden existir determinadas condiciones donde el comportamiento de la solución a tiempos grandes es estocástico. Estas soluciones asintóticas acotadas que no convergen a ningún conjunto límite se las conoce como caóticas^(1, 3). Para caracterizar cuantitativamente este comportamiento es factible determinar por métodos numéricos los exponentes de Lyapunov^(5, 6, 8). En este trabajo presentamos un método alternativo que consiste en el estudio de un espectro de coeficientes que caracterizan las propiedades de las soluciones asintóticas.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se desarrolla una breve introducción al espectro de Lyapunov. En la sección 3 presentamos el método de autovalores. En la sección 4, se comparan los tiempos de CPU con los obtenidos mediante el método de ortogonalización de Gram-Schmidt. En la sección 5, estudiamos el espectro de Lyapunov para la ecuación de Lorenz. En la sección 6 se presentan las conclusiones.

2 ESTABILIDAD LOCAL Y EXPONENTE DE LYAPUNOV

En esta sección resumimos dos conceptos básicos vinculados a la estabilidad de las soluciones. Consideremos el espacio de fases asociado a una cierta dinámica autónoma, cada punto de este espacio está en correspondencia con una única trayectoria la cual está parametrizada en el tiempo t . Sobre cualquier punto de esta curva nos preguntamos que ocurre si nos desplazamos infinitesimalmente en una dirección, no tangente. Al cabo de un incremento δt , la nueva trayectoria pudo haberse acercado o alejado a la inicial, lo cual da una medida del comportamiento de la estabilidad local. Por simplicidad consideremos el sistema

$$\frac{d}{dt}y = f(y) \quad (1)$$

la condición inicial $y_0 = y(t_0)$ define la curva \mathcal{Y}_0 o sea $y(t, p_0)$. En el tiempo t_0 producimos la variación δy_0 y la nueva curva solución \mathcal{Y} la expresamos como $y = y(t, p_0) + \delta y$, donde la variación δy esta definida por

$$\frac{d}{dt} \delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\mathcal{Y}_0} \delta y, \quad (2)$$

e integrando la Ec. (2) se obtiene

$$\frac{\delta y(t)}{\delta y(t_0)} = \exp \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial y} dt',$$

Cuando los valores de t son próximos a t_0 la variación se aproxima a

$$\frac{\delta y(t)}{\delta y(t_0)} \cong \exp \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{t_0} \delta t.$$

Cuando $(\frac{\partial f}{\partial y})_{t_0} > 0$, decimos que la solución $y(t, p_0)$ es localmente inestable en p_0 . Al contrario, si $(\frac{\partial f}{\partial y})_{t_0}$ es negativa es localmente estable. Por tanto, para cada punto de la trayectoria hemos definido su estabilidad local ^(1,3). Es importante remarcar que dada una trayectoria, la misma puede ser totalmente estable, totalmente inestable, o a lo largo de ella, puede tener puntos estables y puntos inestables. Este concepto es fácilmente generalizable a dinámicas de orden superior.

Una segunda cuestión de interés en la teoría de sistemas dinámicos, consiste en determinar una medida de cuanto se separan a tiempo infinito diferentes trayectorias generadas con condiciones iniciales muy próximas y fundamentalmente establecer un parámetro que de este modo cuantifique el movimiento caótico. Como es sabido, uno de estos parámetros es el exponente de Lyapunov ^(1,3,5). Para determinar en forma elemental el exponente de Lyapunov consideremos nuevamente la ecuación (1). Se define al exponente de Lyapunov por

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta y(t)}{\delta y(t_0)} \right| ,$$

Para sistemas de orden superior la definición del exponente es equivalente a la ya presentada y existen tantos exponentes como la dimensión del sistema ^(5, 6). Es importante remarcar que los exponentes están asociados a cada curva y, en definitiva, a cada punto del espacio de fases. Así por ejemplo, en sistema de dimensión tres, si la dinámica es caótica, en el sentido de que su comportamiento asintótico es acotado (no constante ni periódico) entonces uno de los exponentes es positivo, el otro es nulo y el tercero es negativo. Si bien, la definición del exponente de Lyapunov es sumamente simple, desde el punto de vista del cálculo numérico plantea serias dificultades. Estas son debidas a la acumulación de errores de truncamiento del método de integración y los errores en la representación numérica. En muchos casos se producen fuertes errores en las soluciones numéricas y desbordamiento en el cálculo. Todo sumado, hace que en muchas ocasiones, la solución numérica obtenida tenga poco que ver con la real ^(2, 6). En la sección siguiente presentamos una alternativa a esta definición con el fin de superar las dificultades numéricas.

3 METODO DE LOS AUTOVALORES

A partir del concepto de estabilidad local, presentamos un método alternativo de cálculo que proporciona la misma información que el espectro de Lyapunov pero con mayor eficiencia en los tiempos de CPU. El método consiste en realizar cambios locales de coordenadas de manera de diagonalizar localmente las ecuaciones de las variaciones. Los autovalores de estas últimas, están directamente vinculados a la estimación de los exponentes. En particular, cuando la transformación puntual se resuelve explícitamente, en muchos casos los signos del espectro de coeficientes quedan determinados, evitándose el cálculo numérico. Entonces, consideremos el sistema

$$\begin{aligned}
 & \bullet \\
 & x_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \bullet \\
 & x_m = f_m(x_1, \dots, x_m),
 \end{aligned} \tag{3}$$

donde las funciones f_k satisfacen las condiciones de existencia de solución del sistema^(1,6). Las correspondientes variaciones de x_k , δx_k $k:1, \dots, m$ son determinadas por

$$\bullet \delta x_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j, \quad k = 1, \dots, m,$$

que escritas en notación vectorial son

$$\delta \overset{p}{x} = J \delta \overset{v}{x}, \tag{4}$$

donde J es la matriz Jacobiana del sistema (3), la cual es evaluada sobre la curva solución. Desde el momento en que los problemas de mayor interés rara vez poseen solución explícita, es necesario recurrir a métodos de integración numérica^(2, 5, 9, 11) para la evaluación de los sistemas ecuaciones (3) y (4). En este trabajo adoptamos los métodos de integración de un paso. Por tanto, la variable t es discretizada mediante por $t_{i+1} = t_i + \varepsilon$, $i = 0, \dots, n$; siendo n el número de intervalos $I_i : (t_i, t_{i+1})$. Con el fin de poder determinar en forma explícita las fluctuaciones, en cada intervalo I_i linealizamos las Ecs. (4) mediante la aproximación de $J(t)$ por su valor en el extremo izquierdo del intervalo o sea $J_i = J(t_i)$. Esta aproximación local será tanto mejor cuanto más reducido sea el incremento en el paso de integración ε . Entonces en el i -ésimo intervalo, las Ec. (4) son aproximadas por

$$\delta \overset{p}{x} = J_i \delta \overset{v}{x}, \tag{5}$$

Para determinar las variaciones en el i -ésimo intervalo, diagonalizamos la matriz J_i , mediante las matrices P_i y su inversa P_i^{-1} , construidas a partir de los autovectores columna de la matriz Jacobiana J_i . Entonces la matriz J_i diagonalizada es

$$D_i = P_i^{-1} J_i P_i,$$

usando el cambio local de variables $\delta \overset{v}{y} = P_i^{-1} \delta \overset{v}{x}$, la Ec. (4) se escribe

$$\delta \overset{p}{y} = D_i \delta \overset{v}{y}.$$

Por ser D_i , diagonal, las componentes de la variación δy_k se determinan mediante

$$\bullet \delta y_k = \lambda_{ik} \delta y_k \quad k:1, \dots, m, \tag{6}$$

donde λ_{ki} , $k=1, \dots, m$ son los autovalores de J_i . Debido a la diagonalización de la matriz Jacobiana las variaciones δy_k $k=1, \dots, m$ corresponden a las m direcciones de los autovectores en el espacio y_1, \dots, y_m .

Integrando la de la Ec. (6) con los valores iniciales en t_i , determinados la solución en t_{i+1} , por tanto

$$\frac{\delta y_{ki+1}}{\delta y_{ki}} = \exp \lambda_{ik} \varepsilon, \quad k: 1, \dots, m$$

donde los autovalores λ_{ik} dan una medida de la estabilidad local en el i -ésimo intervalo y la k -ésima dirección, como se desarrollo en la sección II. Cuando la dinámica es lineal, el cálculo se simplifica ya que la matriz Jacobiana es la matriz del sistema.

Entonces, conociendo el espectro de autovalores de la matriz J_i , se puede estudiar cualitativamente las propiedades de estabilidad a lo largo de la curva solución. Definimos las siguientes medias aritméticas

$$\Lambda_k^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Re}(\lambda_{ik}) \quad k: 1, \dots, m. \quad (7)$$

Desde que estamos interesados en la estabilidad de la solución asintótica definimos el espectro Λ_k mediante

$$\Lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_k^n \quad k: 1, \dots, m \quad (7 b)$$

los cuales, en general son función del punto en el espacio x_1, \dots, x_m . dado que las transformaciones locales se hacen sobre una determinada trayectoria de la Ec.(3)

Las Ecs. (7) determinan los nuevos coeficientes Λ_k . Desde el punto de vista del cálculo numérico, el limite se obtiene cuando el número de iteraciones n es lo suficientemente grande para lograr un comportamiento cuasi estacionario de los coeficientes. De una forma simple, los índices Λ_k $k=1, \dots, m$, dan un promedio del comportamiento de la inestabilidad local a lo largo de la curva solución elegida, mas específicamente sobre la solución asintótica.

Cuando el número de particiones n tiende a infinito y su tamaño ε tiende a cero, la Ec. (7) se reescribe por

$$\Lambda_k(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \text{Re}(\lambda_k(t')) dt' \quad (8 a)$$

y su limite

$$\Lambda_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_k(t) \quad k: 1, \dots, m \quad (8 b)$$

Las definiciones dadas por las Ecs. (7) u (8) son una alternativa a los exponentes de Lyapunov y esencialmente dan una medida de la estabilidad a lo largo de una trayectoria. Las propiedades de los coeficientes Λ_k son: por ser los mismos promedios de los autovalores de la matriz Jacobiana, la suma es la divergencia del flujo vectorial de la dinámica. Si todos los coeficientes Λ_k son negativos, entonces la órbita es asintóticamente estable, y por tanto la misma converge a un conjunto estable. A la inversa, si todos los coeficientes son positivos la

órbita es inestable. Naturalmente puede ocurrir que uno de los coeficientes sea positivo y los restantes negativos, estamos en un caso de inestabilidad, si la divergencia del campo vectorial asociado a la Ec.(3) es negativa, y si bien no tenemos una demostración explícita, creemos que la dinámica es caótica ya que al menos existe una dirección donde hay inestabilidad y cualquier elemento de volumen en el espacio de las fases que contine a las condiciones iniciales tiende a cero. Cuando la divergencia es positiva, estamos en un caso de fuerte inestabilidad. Como vemos, estas propiedades son similares a las que se predice mediante el espectro de Lyapunov⁽¹⁾. Si se conoce la solución del sistema (3), en general, para dinámicas hasta de orden cuarto, la diagonalización es analítica y los autovalores se pueden determinar en forma explícita. Esto permite en muchos problemas realizar el análisis de la estabilidad del comportamiento asintótico sin la necesidad de recurrir a los métodos de integración numérica. Una aplicación simple de este caso, es el problema de autovalores de la ecuación de Schroedinger⁽¹²⁾ para la cual determinar numéricamente las autofunciones en las regiones clásicamente prohibidas, es una tarea para nada simple. La razón está, en que al menos uno de los autovalores es positivo y por tanto un Λ_k es positivo, por consiguiente, por más pequeño que sean los errores de truncamiento, la solución es inestable y fácilmente se separa de la autofunción generando una rápida divergencia. Un segundo ejemplo es la ecuación

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx + \beta x^3 = f_0 \cos(\omega t),$$

para la cual, como es sabido, en determinadas regiones en el espacio de los parámetros, existen soluciones caóticas. Mediante el análisis de los autovalores es fácil demostrar que si los parámetros k y β son ambos negativos entonces no pueden existir soluciones caóticas. Naturalmente en ambos ejemplos no fue necesario conocer en forma explícita la solución.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se comparan los tiempos de procesamiento entre el método de Gram-Schmidt^(6, 8) y el propuesto. El análisis comparativo esta basado en usar las mismas ecuaciones, parámetros y condiciones de finalización para ambos métodos. Si bien en los sistemas hasta de orden cuatro es posible determinar en forma explícita los autovalores se optó por estandarizar los códigos numéricos y restringir todas las operaciones a cálculos numéricos. La dinámica elegida corresponde a osciladores lineales. En la Tabla 1 se muestran los tiempos de CPU para el cálculo de los exponentes de Lyapunov para los dos métodos. En este experimento numérico se determinó que en todos los casos el método de los autovalores es el más eficiente y tanto más, cuanto mayor es la dimensión del sistema. Solamente para la dimensión dos, ambos métodos son equivalentes. Ambos casos presentan la misma convergencia medida en el número de iteraciones. El equipo utilizado fue una Personal Computer GenuineIntel Pentium(r) Processor Intel MMX(TM) Technology con 32 MB de memoria RAM.

Número de ecuaciones	Método estándar Tiempo(seg.)	Método de autovalores Tiempo(seg.)
2	158.52	162.09
4	458.69	291.11
6	960.20	316.48
8	1967.31	403.32
10	2725.67	627.08
12	4006.48	853.70
14	5728.01	915.39
16	7862.75	1222.64
18	10528.94	1391.98
20	13482.61	2424.90

Tabla 1: Comparación de los tiempos de CPU

5 ECUACIÓN DE LORENZ

Si bien hemos contrastado los métodos utilizando diferentes problemas de la teoría de sistemas dinámicos continuos^(7, 8), resulta interesante presentar la comparación mediante el problema de Lorenz^(1, 4, 8), ya que la ecuación de Lorenz, posee un espacio de fases de gran riqueza y para determinadas regiones del espacio de los parámetros las soluciones poseen comportamiento caótico. El mismo es

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma(y - x) \\
 \dot{y} &= rx - y - xz \\
 \dot{z} &= xy - bz
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde σ , r y $b > 0$ son parámetros. El sistema es no lineal debido a la presencia de los productos cruzados xz y xy . Estudiaremos la solución con los valores iniciales: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $z_0 = 0$ y los parámetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y r varía desde 20 hasta 30 con incremento unitario⁽⁶⁾. Como variable de control numérico, usamos la divergencia del sistema que es $-(1 + \sigma + b) = -13.666$. La integración numérica se realizó hasta un tiempo final $t_f = 10000$. Para cada valor de r , mediante ambos métodos, se determinaron los tres exponentes. Si bien, los espectros calculados por los dos métodos no tienen que ser numéricamente iguales, coinciden en sus signos y por tanto dan la misma descripción de estabilidad. En particular la divergencia calculada mediante ambos métodos coinciden debido a la forma constructiva de los mismos. En la Tabla 2 se presentan los resultados numéricos, para cada valor del parámetro r , la primera fila corresponde al método de Gram Schmidt y la segunda al método de autovalores. Las pequeñas oscilaciones en los tiempos de CPU, conforme r aumenta, se debió a que el método de integración de las EDO' s es de paso variable^(2, 5, 13). Sobre la

muestra realizada los tiempos de CPU⁽¹³⁾ para Gram - Schmidt son (308 ± 22) seg. y para los autovalores (210 ± 24) seg.

R	λ_1	λ_2	λ_3	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$	Clase de Atractor	Tiempo (seg.)
20	-0,15458	-0.15509	-13.35696	-13.666	Pto. Fijo	321.1
	-7,6792E-4	-2.66583	-11.0007	-13.666	Pto. Fijo	218.21
21	-0.11981	-0.12031	-13.4265	-13.666	Pto. Fijo	296.82
	-7.8351E-4	-2.6659	-10.99998	-13.666	Pto. Fijo	190.05
22	-0.08624	-0.08672	-13.49367	-13.666	Pto. Fijo	278.25
	-8.5906E-4	-2.66596	-10.99985	-13.666	Pto. Fijo	187.79
23	-0.05375	-0.05424	-13.55863	-13.666	Pto. Fijo	275.83
	-9.4153E-4	-2.66613	-10.9996	-13.666	Pto. Fijo	255.84
24	-0.02224	-0.02254	-13.62185	-13.666	Pto. Fijo	330.49
	-0.01174	-2.66615	-10.98878	-13.666	Pto. Fijo	189.44
25	0.8177	2.69601E-4	-14.48454	-13.666	Extraño	310.99
	1.056461	-2.07562	-12.64746	-13.666	Extraño	236.34
26	0.84974	2.99457E-4	-14.51661	-13.666	Extraño	328.01
	1.108	-2.08948	-12.68519	-13.666	Extraño	221.29
27	0.87917	3.39306E-4	-14.54607	-13.666	Extraño	322.8
	1.10442	-2.09055	-12.68054	-13.666	Extraño	221.08
28	0.90402	3.62335E-4	-14.57095	-13.666	Extraño	304.56
	1.12939	-2.09583	-12.70024	-13.666	Extraño	219.97
29	0.92853	3.64754E-4	-14.59546	-13.666	Extraño	282.65
	1.13214	-2.09876	-12.70004	-13.666	Extraño	198.34
30	0.95038	3.92954E-4	-14.61734	-13.666	Extraño	333.78
	1.13214	-2.00876	-12.70004	-13.666	Extraño	174.44

Tabla 2. Métodos Gram - Schmidt y de autovalores

Cuando los tres exponentes son negativos el conjunto limite es un punto fijo estable, esto ocurre para volres de r entre 20 y 24. Cuando un exponente es positivo, los restantes negativos y la divergencia negativa se tiene un atractor caótico como sucede en el rango de r entre 25 y 30.

En las Figuras 1a y 1b se representan los tres exponentes determinados mediante Gram-Schmidt y por el método de autovalores respectivamente. En particular es interesante remarcar

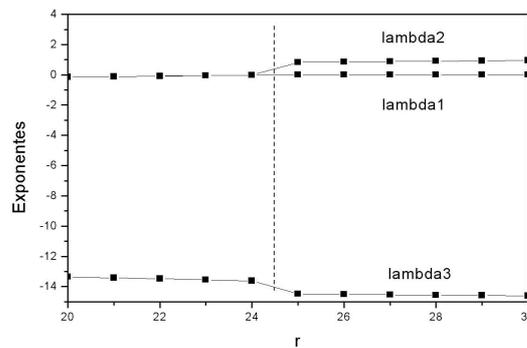


Figura 1a

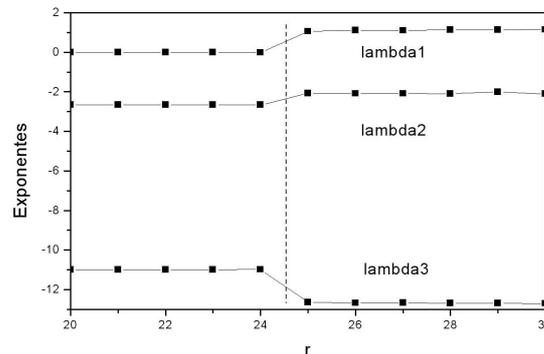


Figura 1b

la región de transición entre el régimen regular y el caótico cuando r cambia de 24 a 25. En la Figura 2 se muestra la evolución del máximo exponente en función del tiempo y la convergencia. En los diferentes experimentos numéricos realizados con distintos sistemas que poseen soluciones caóticas hemos observado que cuando los parámetros o condiciones iniciales se aproximan a los valores que generan comportamiento caótico, al menos uno de los autovalores de la matriz J_i posee comportamiento oscilatorio, aperiódico y de signo variable. En particular para la Ec. de Lorenz se representó la parte real del autovalor en dos situaciones típicas: una para $r = 28$ donde el régimen es caótico (representada en la Figura 3a) y la segunda para $r = 23$ donde las soluciones son regulares.

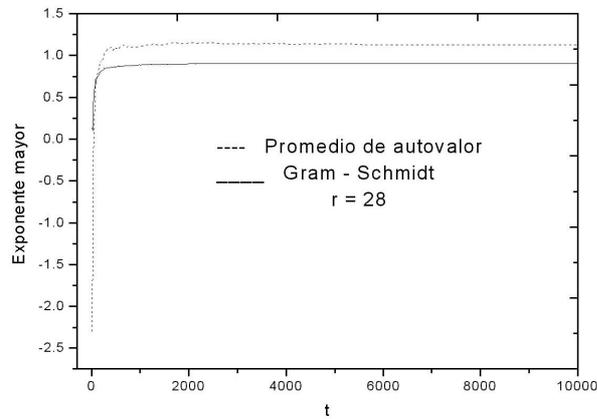


Figura 2

En este caso la parte real del autovalor es también regular y periódico como se ve en la Figura 3b. Esto constituye una interesante observación para comprender la existencia de caos: es necesario que a lo largo de la trayectoria, la misma alterna irregularmente su comportamiento de estabilidad e inestabilidad local.

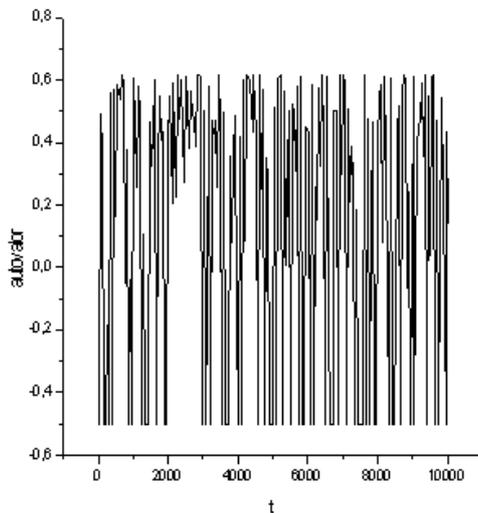


Figura 3a

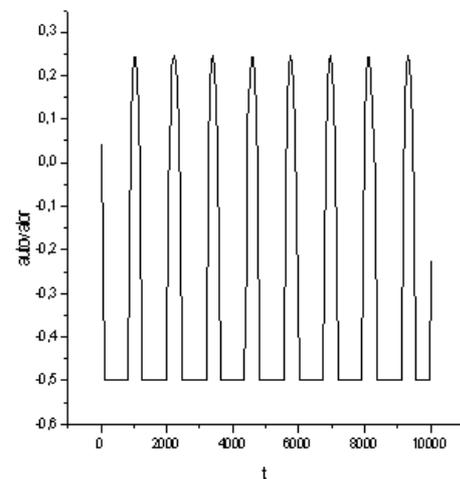


Figura 3b

6 CONCLUSIONES

Dado que el espectro de Lyapunov es de gran utilidad para caracterizar las propiedades de estabilidad de las soluciones y en particular determinar la caoticidad de un sistema, en este trabajo, se desarrollo un método alternativo para estimar dicha cantidad en forma simple. Su implementación numérica muestra que los tiempos de CPU son significativamente menores a los empleado con el método de Gram - Schmidt, cuando se trata de sistemas de dimensión

alta tal como se mostró en Tabla 1. Si las ecuaciones permiten la determinación explícita de los autovalores de la matriz Jacobiana, los tiempos de cálculo se reducen notablemente debido a que se evita el cálculo numérico matricial. En cuanto a las propiedades determinadas mediante el método de autovalores, son similares a las obtenidas mediante los exponentes de Lyapunov. En particular en el problema de Lorenz se compararon ambos métodos, en un rango de parámetros que contiene la transición del régimen regular a caótico, resultando dichos métodos equivalentes. En todos los sistemas estudiados, cuando los parámetros o condiciones iniciales se aproximan a los valores que generan comportamiento caótico, al menos la parte real de uno de los autovalores de la matriz Jacobiana, presenta un comportamiento fuertemente oscilatorio, aperiódico y de signo variable. Esto nos permite hacer una interesante observación didáctica para comprender la existencia de caos: a lo largo de la trayectoria, la misma debe alternar irregularmente su comportamiento de estabilidad e inestabilidad local. En un futuro, pensamos que es conveniente estudiar analíticamente con mayor detalle las propiedades del método de autovalores. Una vez lograda dicha etapa, será de utilidad mejorar el código numérico para implementarlo como librería científica.

7 REFERENCIAS

- [1] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, N. Y. (1994)
- [2] C. Chapra, R.P. Canale, *Métodos Numéricos para Ingenieros* (McGraw-Hill, 1999)
- [3] R. Z. Sagdeev, D.A. Usikov, G. M. Zaslavsky, *Nonlinear Physics: From the pendulum to turbulence and chaos*, Harwood Academic Publishers (1992).
- [4] C. H. Edwards, Jr., David E. Pennney, *Ecuaciones diferenciales elementales y problemas con condiciones en la frontera*, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. , Third edition (1993).
- [5] Thomas S. Parker, Leon O. Chua, *Practical numerical algorithms for chaotic systems*, Springer-Verlag New York Inc. (1989).
- [6] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli y J.M. Strelcyn, *Lyapunov Characteristics Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems: A method for computing all of them*, *Meccanica* 15(1980) 9.
- [7] J.C. Sprott, *Simple Chaotic Systems and Circuits*, *Am. J. Phys.* 68 (8)(2000)
- [8] K. Ramasubramain and M.S. Sriram, *A comparative study of computation of Lyapunov spectra with different algorithms* (2001) .xxx.lanl.gov .
- [9] S. Wolfram, *Mathematica: A system for doing mathematics by computer*, Addison-Wesley Publishing Co, Second edition (1991).
- [10] I. Borzsák, H. A. Posch, A. Baranyai, *Lyapunov instability of fluids composed of rigid diatomic molecules*, xxx.lanl.gov (2003).
- [11] M. Cross, *Introduction to Chaos*, Caltech University, www.cmp.caltech.edu
- [12] M.Z. Bazant, *Lyapunov Stability of Classical Atomic Systems*, www-math.mit.edu/
- [13] MSL. *Math/Library. Vol. 1 y 2. Fortran Subroutines for Mathematica Applications* (1997).