

## MODELACION CONSTITUTIVA BASADA EN LA TEORIA DE GRADIENTES

Sonia M. Vrech\*, Guillermo Etse\*

\*Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería  
Universidad Nacional de Tucumán  
Av. Independencia 1800, 4000 Tucumán, Argentina  
e-mail: cemnci@herrera.unt.edu.ar, web page: <http://www.unt.edu.ar>

**Palabras clave:** Gradientes, no localidad, localización, ablandamiento, longitud característica.

**Resumen.** *El fenómeno de localización de campos de desplazamientos o deformaciones está íntimamente relacionado con el comportamiento de ablandamiento de estructuras. La localización de la deformación en el caso de materiales locales y mediante el concepto de smeared crack, ocurre en un set de medida cero y se observa una dependencia patológica de la solución numérica respecto de la discretización de elementos finitos. Para remediar esta dificultad, la formulación constitutiva debe mejorarse incluyendo deformaciones no locales o gradientes de deformaciones de orden superior. Dichos continuos incorporan una longitud característica que define el tamaño de la zona de localización. En este trabajo se desarrolla un algoritmo computacional dual y mixto a partir de la formulación constitutiva basada en la Teoría de Plasticidad con Gradientes. Se implementa un programa computacional de EF aplicable a mallas de elementos triangulares bidimensionales. Se verifica numéricamente la capacidad de la formulación desarrollada para limitar el ancho de la zona de localización de acuerdo a la longitud característica definida en el modelo y la capacidad de predecir direcciones críticas de localización.*

## 1 INTRODUCCIÓN

Una de las teorías constitutivas que ha logrado el mayor eco e interés por parte de la comunidad científica internacional en virtud de su gran potencial para describir comportamientos no lineales disipativos de materiales ingenieriles es la llamada Teoría de Gradientes Superiores de Deformaciones. Ésta, si bien equivale a un retorno al concepto fundamental de Material No Local planteado por Noll hacia 1900, posee desde el punto de vista teórico, la notable ventaja de incorporar la no localidad en la relación tensiones–deformaciones a través de derivadas o gradientes superiores de los campos de deformación. De esta forma la respuesta tensional en un punto arbitrario del continuo depende del campo de deformaciones en una región que trasciende la del punto mismo y que viene caracterizada por la llamada longitud característica.

## 2 CONCEPTO DE NO LOCALIDAD

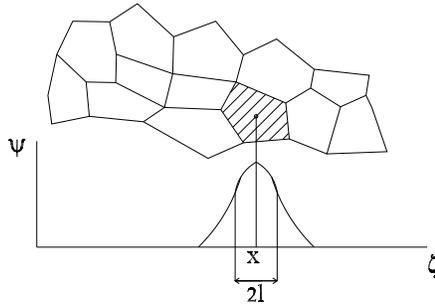


Figure 1: Función de peso para una micro-estructura irregular

En los modelos locales, la variable interna asociada a la historia de deformación del material  $\kappa$ , llamada deformación equivalente, deriva matemáticamente de la componente anelástica  $\epsilon^p$  del tensor local de deformaciones  $\epsilon$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2}{3}\epsilon^p \epsilon^p} \quad (1)$$

La incorporación de efectos no locales requiere el cómputo de la deformación equivalente no local  $\bar{\kappa}$ . Ésta caracteriza la deformación en el volumen  $\Omega$  que rodea a un punto.<sup>1,2</sup> Los efectos no locales reflejan la interacción espacial de elementos a nivel micro-estructural. Si el vector  $\mathbf{x}$  caracteriza la posición del punto y  $\boldsymbol{\zeta}$  las posiciones relativas de los puntos materiales de la vecindad en  $\Omega$ , Figura 1, la deformación equivalente no lineal se define como<sup>3</sup>

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{\Psi(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{x}) \kappa(\boldsymbol{\zeta}) d\Omega, \quad (2)$$

donde  $\psi(\boldsymbol{\varsigma}, \mathbf{x})$  es la función de peso. El factor de peso  $\frac{1}{\Psi}$ , con  $\Psi(\mathbf{x})$  definido como

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_{\bar{\Omega}} \psi(\boldsymbol{\varsigma}, \mathbf{x}) d\Omega, \quad (3)$$

escala a  $\bar{\kappa}$ , tal que para estados homogéneos de deformación  $\bar{\kappa} = \kappa$ .

La función de peso  $\psi(\boldsymbol{\varsigma}, \mathbf{x})$  debe ser continua e isotrópica y depende de la distancia entre puntos  $\rho = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\varsigma}|$ . Muchas funciones fueron consideradas en la literatura, siendo la función de Gauss, Figura 1, la más popular.

$$\psi(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} l^3} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2l^2}\right] \quad (4)$$

El factor  $(2\pi)^{-\frac{3}{2}} l^{-3}$  normaliza la función de peso, de modo que  $\int \psi(\rho) d\Omega = 1$ . El parámetro de longitud  $l$  determina el volumen que contribuye significativamente en la deformación equivalente no local. Cuando  $l \rightarrow 0$  se recupera la localidad y  $\bar{\kappa}$  es igual  $\kappa$ . Para campos de deformaciones suficientemente homogéneos, la relación integral 2 puede escribirse en términos de gradientes de  $\kappa$  expandiendo  $\kappa(\boldsymbol{\varsigma})$  en Serie de Taylor<sup>3</sup>

$$\kappa(\boldsymbol{\varsigma}) = \kappa(\mathbf{x}) + \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} (\varsigma_i - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \kappa}{\partial x_i \partial x_j} (\varsigma_i - x_i)(\varsigma_j - x_j) + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \kappa}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (\varsigma_i - x_i)(\varsigma_j - x_j)(\varsigma_k - x_k) + \dots \quad (5)$$

Sustituyendo esta relación en 2 y operando resulta

$$\bar{\kappa}(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x}) + c_i \frac{\partial^2 \kappa}{\partial x_i^2} + c_{ij} \frac{\partial^4 \kappa}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} + \dots \quad (6)$$

donde los coeficientes  $c_i$  y  $c_{ij}$  están dados por

$$c_i = \frac{1}{2! \Psi} \int_{\bar{\Omega}} \psi(\rho) (\varsigma_i - x_i)^2 d\Omega \quad \text{y} \quad c_{ij} = \frac{1}{4! \Psi} \int_{\bar{\Omega}} \psi(\rho) (\varsigma_i - x_i)^2 (\varsigma_j - x_j)^2 d\Omega \quad (7)$$

Con lo anterior y despreciando los términos de orden superior a dos, la relación integral 2 puede aproximarse con la relación diferencial

$$\bar{\kappa} = \kappa + c \nabla^2 \kappa \quad (8)$$

donde el operador Laplaciano se define como  $\nabla^2 = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ .

La longitud interna del modelo no local se encuentra en el coeficiente de gradiente  $c$ , que para la función de peso de Gauss resulta  $c = \frac{1}{2} l^2$ .

### 3 ALGORITMO DE PLASTICIDAD REGULARIZADA CON GRADIENTES

Mientras que la mayoría de los algoritmos de EF para formulaciones de Plasticidad regularizada con gradientes se basan en el acoplamiento de las variables desplazamiento y parámetro plástico, el incremento del multiplicador plástico se calcula aquí mediante un método mixto dual, desarrollado por Thomas Svedberg.<sup>4</sup>

Para ello, utiliza en la integración implícita de las variables internas  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  y  $\kappa$  el método *backward Euler*. Se emplean las ecuaciones convencionales de equilibrio y condiciones de borde no convencionales para el multiplicador plástico.

El algoritmo se implementa en el programa *Matlab*, que permite a través de su interface gráfica, la interpretación directa de los resultados.

#### 3.1 Relaciones constitutivas

A partir de la descomposición aditiva de la densidad de energía libre

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \kappa, \nabla\kappa) = \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \Psi^{p,loc}(\kappa) + \Psi^{p,grad}(\nabla\kappa) \quad (9)$$

donde  $\Psi^e$  es la energía elástica,  $\Psi^{p,loc}$  la correspondiente al ablandamiento local y  $\Psi^{p,grad}$  al ablandamiento de gradientes, se derivan las expresiones de las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad , \quad (10)$$

las tensiones disipativas correspondientes a las deformaciones plásticas  $K^{loc}$ , a sus gradientes  $K^{grad}$

$$\begin{aligned} K^{loc} &= -\rho \frac{\partial \Psi^{p,loc}}{\partial \kappa} \\ K^{grad} &= \nabla \cdot \left( \rho \frac{\partial \Psi^{p,grad}}{\partial (\nabla \kappa)} \right) \quad , \quad x \in \Omega \quad , \end{aligned} \quad (11)$$

y a los bordes  $K^b$

$$K^{(b)} = -\mathbf{m} \cdot \rho \frac{\partial \Psi^{p,grad}}{\partial (\nabla \kappa)} \quad , \quad x \in \partial\Omega \quad . \quad (12)$$

Siendo  $H$  el módulo de endurecimiento o ablandamiento local que representa la pendiente del endurecimiento o ablandamiento, y  $\mathbf{H}^{grad}$  el tensor de gradiente no local, definidos como

$$\begin{aligned} H &= \rho \frac{\partial^2 \Psi^{p,loc}}{(\partial \kappa)^2} \\ \mathbf{H}^{grad} &= \rho \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 \Psi^{p,grad}}{\partial (\nabla \kappa) \otimes \partial (\nabla \kappa)} \end{aligned} \quad (13)$$

$\mathbf{H}^{grad}$  es un tensor de segundo orden definido positivo, que posee un rol muy significativo en la regularización numérica. Cuando se alcanza la localización, sus propiedades

espectrales están relacionadas con la orientación de la zona de localización (definida por su normal  $\mathbf{n}_l$ ).

La longitud interna característica  $l$  puede interpretarse como

- 1) Un parámetro dimensional, conveniente para que  $H$  y  $\mathbf{H}^{grad}$  posean la misma dimensión,
- 2) una entidad física que caracteriza la medida de la microestructura, o
- 3) un parámetro que estabiliza numéricamente la teoría local.

Para formular las leyes de evolución de las variables internas se adopta un potencial disipativo  $\Phi^*$ , que para el caso leyes de endurecimiento o ablandamiento asociados, es coincidente con la función de fluencia  $\Phi$ . La evolución de las variables internas queda determinada por:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (14)$$

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial K} \quad (15)$$

### 3.2 Linealización de la ecuación diferencial para el multiplicador plástico

A partir de las condiciones de consistencia (Kuhn–Tucker)

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, K) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} \Phi(\boldsymbol{\sigma}, K) = 0 \quad (16)$$

y combinando

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial K} : \dot{K} \quad (17)$$

con 10 y 11, se obtiene la ecuación diferencial lineal en  $\dot{\lambda}$

$$-\dot{\Phi}^{grad} + (h + h^{grad})\dot{\lambda} = \dot{\Phi}^e - \dot{\Phi} \quad , \quad (18)$$

para una función de carga local  $\Phi^e$  y un módulo plástico generalizado  $h$  dados

$$\dot{\Phi}^e = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad , \quad (19)$$

$$h = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e : \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \bar{H} \quad \text{con} \quad \bar{H} = H \frac{\partial \Phi}{\partial K} \frac{\partial \Phi^*}{\partial K} \quad . \quad (20)$$

Para ablandamiento isotrópico, el módulo plástico y la función de carga de gradientes  $\dot{\Phi}^{grad}$  resultan

$$h^{grad} = -l^2 \frac{\partial \Phi}{\partial K} \left( \frac{\partial^2 \Phi^*}{(\partial K)^2} \mathbf{H}^{grad} : \nabla^2 K + \frac{\partial^3 \Phi^*}{(\partial K)^3} \nabla K \cdot \mathbf{H}^{grad} \cdot \nabla K \right) \quad (21)$$

$$\dot{\Phi}^{grad} = l^2 \frac{\partial \Phi}{\partial K} \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial K} \mathbf{H}^{grad} : \nabla^2 \dot{\lambda} + 2 \frac{\partial^2 \Phi^*}{(\partial K)^2} \nabla K \cdot \mathbf{H}^{grad} \cdot \nabla \dot{\lambda} \right) \quad (22)$$

Retomando 18, se deduce que el criterio local  $\Phi^e > 0$  no puede utilizarse como única señal de carga plástica (definida como  $\dot{\lambda} > 0$ ). Ahora se debe considerar  $\Phi^{e,grad} > 0$ , donde

$$\Phi^{e,grad} = \Phi^e + \Phi^{grad} \quad (23)$$

Como  $\Phi^{grad}$  depende de derivadas espaciales de segundo orden de  $\dot{\lambda}$  y éstas se desconocen hasta el final de la solución, el problema se resuelve en forma iterativa.

### 3.3 Formulación dual del subproblema

La discretización de EF se establece de forma tal que no sólo para  $\Delta\lambda$ , sino también para  $\nabla^2(\Delta\lambda)$  puedan obtenerse buenas aproximaciones. Para ello se adopta la notación  $\mathbf{g}$  para el campo de gradientes  $\mathbf{g} = \mathbf{H}^{grad} \cdot \nabla(\Delta\lambda)$ . El problema queda replanteado como:

$$-l^2 \nabla \cdot \mathbf{g} + h \Delta\lambda = \Phi^{e,tr} - \Phi \quad (24)$$

$$(\mathbf{H}^{grad})^{-1} \cdot \mathbf{g} - \nabla(\Delta\lambda) = \mathbf{0} \quad (25)$$

$$\Delta\lambda \geq 0 \quad , \quad \Phi \leq 0 \quad , \quad \Delta\lambda\Phi = 0 \quad , \quad (26)$$

sujeto a la condición de borde

$$\Delta\lambda = -\frac{l}{cH_1^{grad}} \mathbf{m} \cdot \mathbf{g} \quad (27)$$

Con la introducción de los espacios de funciones  $\Lambda = L_2(\Omega)$  y  $G = [H(\Omega)]^M$ , donde  $M$  es la dimensión espacial, se establece la forma variacional apropiada para encontrar  $\Delta\lambda \in \Lambda$  y  $\mathbf{g} \in G$

$$-l^2 \int_{\Omega} \Delta\lambda' \nabla \cdot \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Omega} h \Delta\lambda' \Delta\lambda d\Omega = \int_{\Omega} \Delta\lambda' (\Phi^{e,tr} - \Phi) d\Omega \quad (28)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{g}' \cdot (\mathbf{H}^{grad})^{-1} \cdot \mathbf{g} d\Omega + \frac{l}{cH_1^{grad}} \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}' \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \cdot \mathbf{g} d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{g}' \Delta\lambda d\Omega = 0 \quad (29)$$

$$\Delta\lambda \geq 0 \quad , \quad \Phi \leq 0 \quad , \quad \Delta\lambda\Phi = 0 \quad (30)$$

para todo  $\Delta\lambda' \in \Lambda$  y  $\mathbf{g}' \in G$ .

## 4 EJEMPLOS NUMERICOS

### 4.1 Análisis numérico de una placa rectangular en estado plano de deformaciones

Se analiza en primer lugar el esquema estático de la Figura 2. A los efectos de comparar y analizar resultados se emplean tres mallas:  $a$ ,  $b$  y  $c$  de 24, 96 y 216 elementos respectivamente. La inhomogeneidad inducida al modelo consiste en una pequeña reducción de la resistencia en un elemento del extremo inferior derecho.

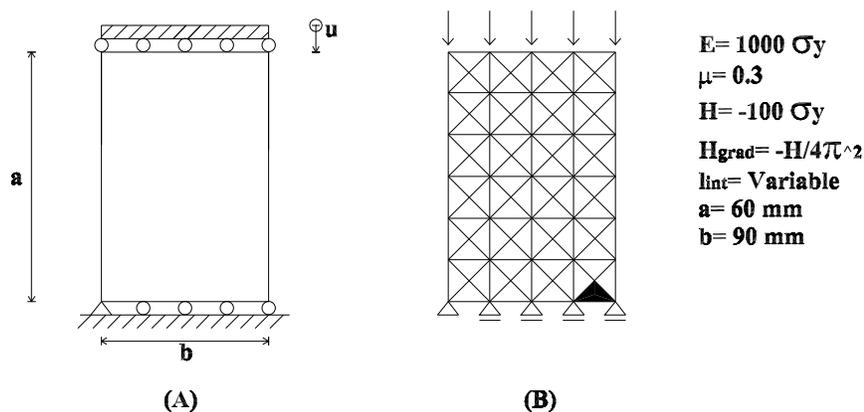


Figure 2: Esquema de placa rectangular.

Para  $a$ ,  $b$  y  $c$  se grafican en la Figura 3 las curvas Carga–Desplazamiento del nodo superior derecho. Se evidencia la dependencia patológica de la solución respecto de la discretización en la respuesta elasto–plástica local ( $l_{int} = 0$ ). La energía disipada, igual al área determinada por cada curva, depende del tamaño de los elementos plastificados. Disminuye a medida que éstos lo hacen llegando incluso a anularse y haciendo carecer de sentido físico a la solución.

#### 4.2 Regularización de gradientes

Fijando los valores de longitud interna  $l_{int} = 20 \text{ mm}$  y  $25 \text{ mm}$  se analizan las mallas  $b$  y  $c$ . Se verifica en la Figura 4 el efecto de la regularización de la curva Carga–Desplazamiento.

Para  $l_{int} = 20 \text{ mm}$ , la geometría de las mallas  $b$  y  $c$  deformada correspondiente al incremento de carga 20 se grafica en las Figuras 5 y 6. Se observa la convergencia del ancho de la banda de localización a la longitud interna característica.

#### 4.3 Energía interna de deformación

La energía interna de deformación se calcula de acuerdo a 9. En las Figuras 7 y 8 se comparan los valores de energía interna para el material elasto–plástico local  $l_{int} = 0$ , y el dependiente de gradientes  $l_{int} = 20 \text{ mm}$ , evaluados en la malla  $b$  durante el desarrollo de las curvas de la Figura 4. Considerando los incrementos de las energías internas de deformación citadas anteriormente, se observa la regularización de la energía interna plástica.

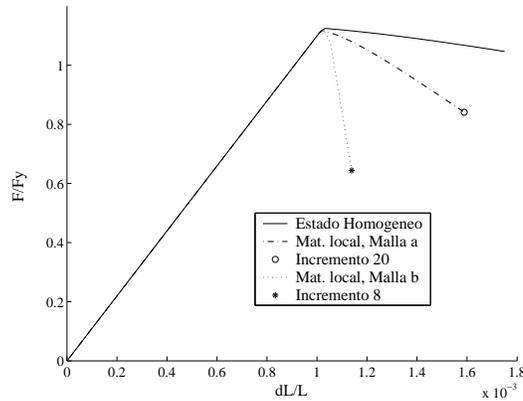


Figure 3: Curvas Carga-Desplazamiento. Material elasto-plástico local.

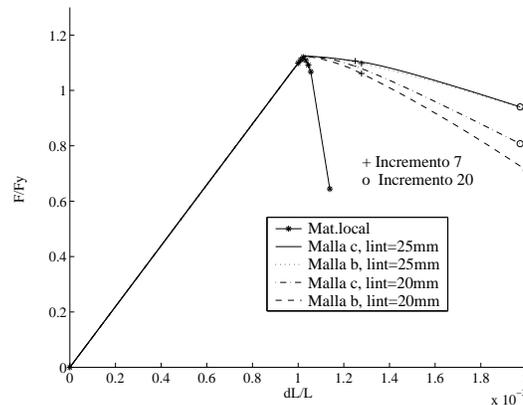


Figure 4: Curvas Carga-Desplazamiento. Material elasto-plástico de gradientes.

#### 4.4 Determinación del ancho de la zona de localización

Adoptando  $l_{int} = 25 \text{ mm}$ , el ancho de la banda de localización en la malla  $c$  resulta igual a dicha magnitud, Figura 9.

#### 4.5 Independencia respecto de la imperfección

Se analiza el mismo esquema estático de la Figura 2 (A), modelado con una malla de 252 elementos y con un elemento debilitado en la zona central.

Fijando  $l_{int} = 20$  se analiza la evolución de la zona de localización. Se presentan en las Figuras 10 y 11 esquemas de mallas deformadas correspondientes al inicio de la plastificación y a un estado posterior.

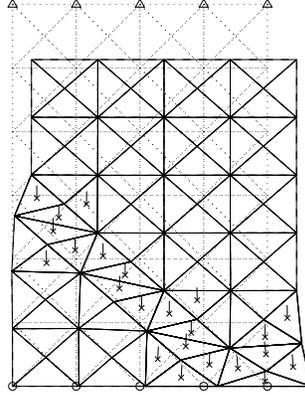


Figure 5: Malla (b) deformada.  $l_{int} = 20 \text{ mm}$ . Incremento 20.

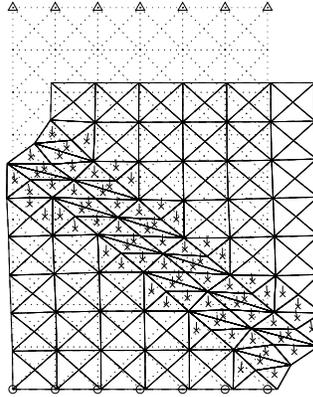


Figure 6: Malla (c) deformada.  $l_{int} = 20 \text{ mm}$ . Incremento 20.

## 5 LOCALIZACIÓN DE LA DEFORMACIÓN

Desde el punto de vista de la Mecánica del Continuo, la aparición de bandas de localización se explica como una bifurcación del equilibrio que conlleva a la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones de equilibrio.

A partir del tensor acústico de gradientes  $\mathbf{Q}^{epg}$

$$\mathbf{Q}^{epg} = \mathbf{Q}^e - \frac{1}{h + h^{grad}} \mathbf{a}^* \otimes \mathbf{a} \quad , \quad (31)$$

con

$$\mathbf{a}^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{n}_l \quad \text{y} \quad , \mathbf{a} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{n}_l \quad (32)$$

$$h^{grad} = \mathbf{n}_l \cdot \overline{\mathbf{H}}^{grad} \cdot \mathbf{n}_l \left( \frac{2\pi l}{\delta} \right)^2 \quad , \quad (33)$$

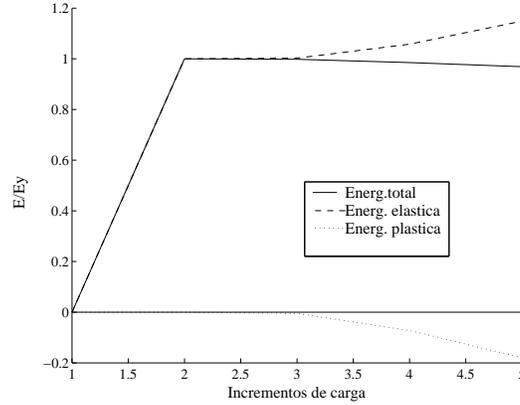


Figure 7: Energía interna de deformación. Material elasto-plástico local.

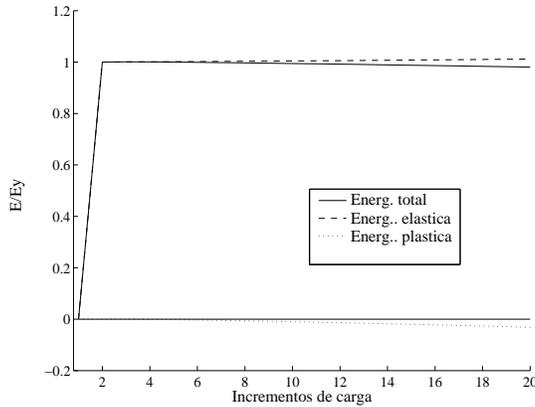


Figure 8: Energía interna de deformación. Material elasto-plástico de gradientes.

y el tensor acústico elástico

$$\mathbf{Q}^e = \mathbf{n}_l \cdot \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{n}_l \quad , \quad (34)$$

siendo  $\mathbf{n}_l$  la dirección del frente de la onda de localización, se analiza la condición de localización

$$\det(\mathbf{Q}^{epg}) = 0 \quad . \quad (35)$$

Hallar el valor mínimo del  $\det(\mathbf{Q}^{epg})$  equivale a hallar su menor autovalor. El autovector correspondiente indica la dirección de la normal al plano de fractura  $\mathbf{n}_l$ .

La Figura 12 muestra las predicciones de localización correspondientes al tensor acústico elasto-plástico de la Teoría Elasto-plástica clásica y de gradientes en el punto de transición entre el régimen elástico y el elasto-plástico y en el último incremento del ensayo. Se considera estado plano de deformaciones y un valor del coeficiente de Poisson  $\mu=0$ .

Se observa que se mantienen las direcciones críticas de localización elasto-plástica,  $\theta_{cr} = 54.7^\circ$ . (Ángulo formado por la superficie de falla y el eje vertical.)

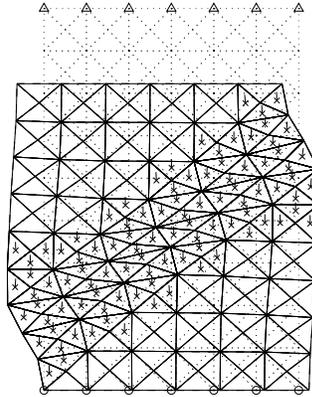


Figure 9: Malla (c) deformada.  $l_{int} = 25 \text{ mm}$ . Incremento 20.

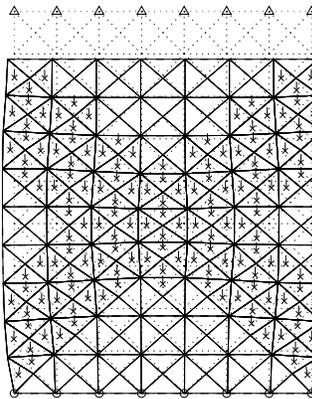


Figure 10: Malla deformada. Incremento: plastificación.  $l_{int} = 20 \text{ mm}$

En estado plano de deformaciones, la dirección de localización varía de acuerdo al valor de coeficiente de Poisson. En la Figura 13 se observa que los resultados numéricos coinciden con los analíticos:  $\theta_{(\nu=0)} = 54.7^\circ$ ,  $\theta_{(\nu=0.2)} = 50.77^\circ$  y  $\theta_{(\nu=0.4)} = 46.9^\circ$ . En la Figura 14 se presenta la variación del valor del determinante normalizado del tensor acústico (equivalente a la variación del mínimo valor propio), considerando todas las direcciones potenciales de discontinuidad ( $\mathbf{n}_l$ ), para el primer incremento de carga plástica. La forma circular representa el estado elástico isótropo obtenido antes de alcanzar la plastificación, las curvas restantes corresponden al comportamiento de ablandamiento y las direcciones de localización se manifiestan en la disminución del valor de mínimo autovalor.

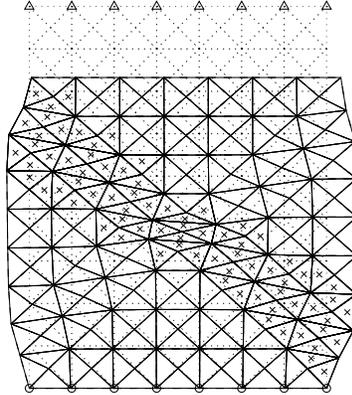


Figure 11: Malla deformada.  $l_{int}=20mm$

## 6 CONCLUSIONES

Mediante el método de lo EF puede aproximarse la discontinuidad de desplazamientos con desplazamientos continuos, conduciendo a la dependencia patológica de los resultados respecto de la discretización de la malla de EF y provocando que la energía de disipación calculada tienda a cero con el refinamiento de la misma, conduciendo a resultados iniciales desde el punto de vista físico. Para regularizar dicho comportamiento se introducen efectos no locales mediante los gradientes de ciertas variables termodinámicas.

El resultado de dicha regularización conduce en primer lugar a la objetivización de la solución respecto de la discretización de la malla de EF.

La región donde se localizan las deformaciones plásticas pasa a depender de una característica interna del material con la que, a su vez, se incorporan propiedades de la micro-estructura en la formulación constitutiva.

A través del análisis de los indicadores de falla, tanto difusa como localizada, se concluye que se suprimen ambas al incluir los gradientes de segundo orden de las deformaciones plásticas. Éstos representan interacciones espaciales que adquieren mayor importancia en estados no lineales de deformación.

El algoritmo de EF utilizado para el análisis numérico es el standard, mientras que el problema constitutivo se resuelve mediante un método dual mixto. El incremento del multiplicador plástico  $\Delta\lambda$  es constante en cada elemento, y puede asociarse al único punto de Gauss adoptado para el problema del equilibrio.

Se resumen las ventajas del método según los siguiente aspectos:

A nivel material:

Se incorporan características internas del material a través de una longitud interna característica.

Se suprime la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones que gobiernan el problema y la bifurcación del equilibrio.

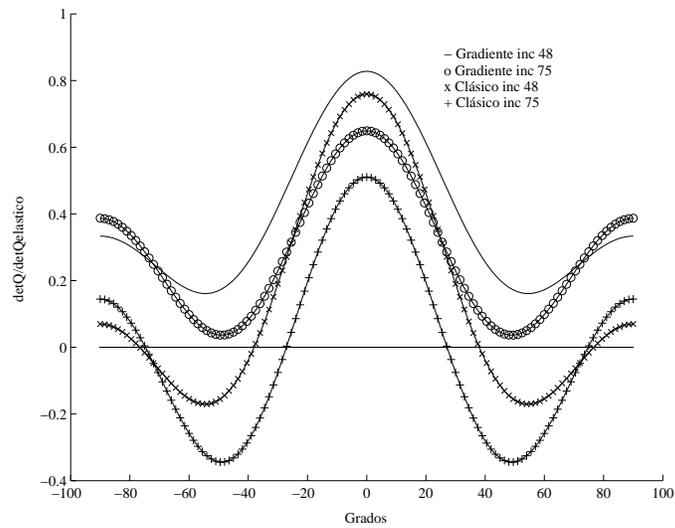


Figure 12: Determinante normalizado del tensor de localización. Ensayo de tracción. Material von Mises. Estado plano de deformaciones.

A nivel estructural:

Matemáticamente, se suprime la dependencia de los resultados respecto de la discretización de la malla de EF.

Puede determinarse a priori la región de localización de deformaciones, independientemente de la presencia de secciones debilitadas.

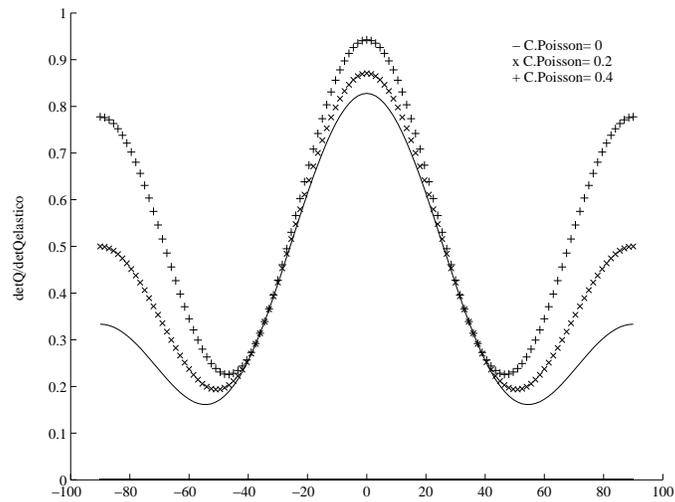


Figure 13: Variación de la dirección de localización de acuerdo a  $\mu$ . Material von Mises. Estado plano de deformaciones. Incremento final.

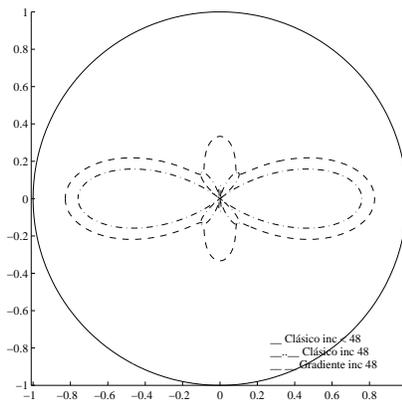


Figure 14: Variación de autovalores mínimos del tensor de localización. Ensayo de tracción. Material von Mises.

## REFERENCES

- [1] M.G.D. Geers. *Experimental Analysis and Computational Modelling of Damage and Fracture*. Ph.D.Thesis, CIP-Data Library Technische Universiteit Eindhoven, (1997).
- [2] R.H.J. Peerlings. *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*. Ph.D.Thesis, CIP-Data Library Technische Universiteit Eindhoven, (1999).
- [3] Pijaudier-Cabot G. and Bazant Z.P. Non local damage theory. *ASCE J. Eng. Mech.*, **113**, 1512–1533 (1987).
- [4] T. Svedberg. *On the Modelling and Numerics of Gradient-Regularized Plasticity Coupled to Damage*. Chalmers University of Technology, Sweden, (1999).
- [5] E.C. Aifantis. On the microstructural origin of certain inelastic models. *J. Eng. Mater. Technol.*, **106**, 326–330 (1984).
- [6] E.C. Aifantis. The physics of plastic deformation. *Int. J. Plasticity*, **3**, 211–247 (1987).
- [7] B.D. Coleman and M.L. Hodgdon. On shear bands in ductile materials. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **90**, 219–247 (1985).
- [8] T. Belytschko and D. Lasry. A study of localization limiters for strain-softening in statics and dynamics. *Comp.y Struct.*, **33**, 707–715 (1989).
- [9] Zbib H.M. and Aifantis E.C. On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation. *I, II, III, Res Mechanica*, **23**, 261–305 (1988).
- [10] Vardoulakis I. and Aifantis E.C. A gradient flow theory of plasticity for granular materials. *Acta Mechanica*, **87**, 197–217 (1991).