

ALGUMAS QUESTÕES DA GERAÇÃO DE GRADES ORTOGONAIS COMPUTACIONAIS

Andrei Bourchtein, Lioudmila Bourchtein, Bianca Herreira

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pelotas
Campus Universitário da UFPel, Capão do Leão 96010-900, Brasil
e-mail: burstein@ufpel.tche.br

Palavras-chave: grades computacionais, coordenadas ortogonais, transformações quase conformes.

Resumo. *O problema da geração de grades computacionais atrai o interesse dos pesquisadores em modelagem numérica desde o início da utilização dos métodos computacionais na resolução de problemas de aplicação. A modelagem numérica na área da dinâmica dos fluidos computacional, que inclui as aplicações em aerodinâmica, autodinâmica, meteorologia e oceanologia, se baseia na resolução de equações de Navier-Stokes. A forma dessas equações é relativamente simples em coordenadas ortogonais e, portanto, pode ser observado o esforço contínuo dos pesquisadores no desenvolvimento das técnicas de geração de grades ortogonais.*

Neste trabalho estudamos alguns problemas provocados pela utilização de equações generalizadas de Laplace como as primitivas na geração de grades ortogonais. Construímos alguns exemplos para regiões simples (tais como quadrado e círculo) que mostram a impossibilidade de manter a forma pré-definida da região sob a escolha prévia da função de distorção. Este comportamento de transformações ortogonais se refere às propriedades de mapeamentos quase conformes, que englobam as ortogonais, quando o problema é considerado numa região limitada e a função de distorção é contínua e positiva no fechamento dessa região. Além disso, mostramos que a ortogonalidade de transformação pode ser perdida devido a aplicação de condições inadequadas de contorno e representamos um tipo de condições que garante a ortogonalidade de coordenadas computacionais.

1 INTRODUÇÃO. CONDIÇÕES DE ORTOGONALIDADE

Consideremos dois vetores planares quaisquer não nulos $u = (a, b)$, $v = (c, d)$. A condição de ortogonalidade deles pode ser expressa via produto escalar:

$$u \cdot v = (a, b) \cdot (c, d) = ac + bd = 0. \quad (1)$$

Podemos também representar a condição de ortogonalidade na forma mais geométrica (o que de fato se utiliza na geometria diferencial e leva as condições usuais de ortogonalidade de coordenadas planares). Um vetor é ortogonal ao outro se pode ser obtido deste pela rotação de 90 graus no sentido horário ou anti-horário e posterior mudança de comprimento. Se o primeiro vetor tem a forma

$$u = (a, b) = |u|(\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (2)$$

em coordenadas polares (r, α) então o segundo, para ser ortogonal ao primeiro, deve ter a forma

$$v = (c, d) = \pm |v|(\sin \alpha, -\cos \alpha). \quad (3)$$

(Os vetores $(\sin \alpha, -\cos \alpha)$ e $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ são os resultados da rotação em 90 graus do vetor unitário $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ no sentido horário e anti-horário respectivamente.) Das expressões (2) e (3) segue a relação entre as coordenadas:

$$c = \pm \frac{|v|}{|u|} b, \quad d = \mp \frac{|v|}{|u|} a$$

ou, denotando o coeficiente de distorção (extensão/dilatação) de f , obtemos

$$c = fb, \quad d = -fa. \quad (4)$$

Esta é a segunda forma de representação da condição de ortogonalidade de dois vetores. Obviamente, as duas formas (1) e (4) são equivalentes.

Aplicaremos agora essas duas condições para o caso de coordenadas planares curvilíneas. Lembrando que os vetores covariantes tangentes às linhas coordenadas têm a forma $u = (x_\xi, y_\xi)$, $v = (x_\eta, y_\eta)$, concluímos que as duas formas de representar a condição de ortogonalidade entre estes vetores são

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0 \quad (5)$$

e

$$fx_\xi = y_\eta, \quad fy_\xi = -x_\eta. \quad (6)$$

De novo, as duas são equivalentes e as equações de (6) são as condições primitivas de ortogonalidade utilizadas usualmente em geometria diferencial.

Assim, uma transformação é chamada ortogonal se (5) ou (6) são satisfeitas. Entretanto, muitas vezes as condições de ortogonalidade são expressas em termos de equações generalizadas de Laplace:

$$\left(fx_{\xi} \right)_{\xi} + \left(\frac{1}{f} x_{\eta} \right)_{\eta} = 0, \quad \left(fy_{\xi} \right)_{\xi} + \left(\frac{1}{f} y_{\eta} \right)_{\eta} = 0 \quad (7)$$

As últimas são conseqüências diferenciais das condições (6), mas em vários trabalhos são consideradas como as condições primitivas de ortogonalidade^{1,2,3,4}. Demonstraremos a seguir que um cuidado deve ser tomado na utilização das equações (7), que perdem certa informação em comparação com as (6).

2 QUESTÕES DE EXISTÊNCIA DE MAPEAMENTO

Consideremos o mapeamento de um quadrado unitário $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ em outro $Q = [0,1] \times [0,1]$ sob o qual os lados do primeiro correspondem aos lados respectivos do segundo (veja Fig.1). Então, sendo as coordenadas computacionais ξ, η do primeiro quadrado, as coordenadas físicas x, y do segundo e os lados correspondentes $\xi = const, x = const$ e $\eta = const, y = const$, a transformação considerada satisfaz as condições de contorno

$$x(0,\eta) = 0, \quad x(1,\eta) = 1, \quad y(\xi,0) = 0, \quad y(\xi,1) = 1. \quad (8)$$

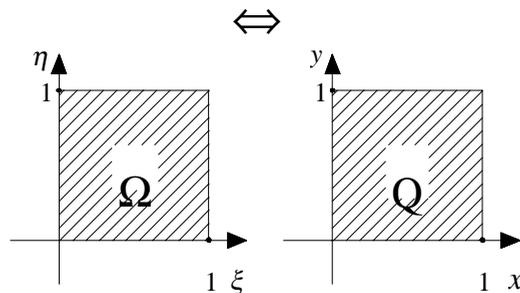


Figura 1: Mapeamento entre quadrados unitários

Comparemos agora as transformações ortogonais geradas pelas condições (6) e (7). Daremos primeiro um exemplo bem simples quando as funções são de fato univariáveis: $x = x(\xi)$, $y = y(\eta)$. Neste caso a segunda condição em (6) se transforma numa identidade e as equações de Laplace se simplificam a forma

$$(fx_\xi)_\xi = 0, \left(\frac{1}{f}y_\eta\right)_\eta = 0.$$

Considerando o caso $f = const \neq 0$ chegamos aos dois problemas de condições de contorno (em uma variável):

$$x_{\xi\xi} = 0, x(0) = 0, x(1) = 1 \quad \text{e} \quad y_{\eta\eta} = 0, y(0) = 0, y(1) = 1$$

cujas únicas soluções são

$$x = \xi \quad \text{e} \quad y = \eta, \tag{9}$$

respectivamente. Se as equações (7) fossem primitivas, então concluímos que as soluções (9) são válidas para qualquer f constante. Entretanto, a primeira condição primitiva em (6) indica que (9) são realizáveis somente quando

$$f = \frac{y_\eta}{x_\xi} = 1.$$

Essa é a condição de existência de mapeamento dentro das restrições impostas, que se perde quando as equações (7) são tomadas como as condições primitivas de ortogonalidade.

Faremos agora análise do mapeamento de Ω em Q sem fazer restrição na forma de funções x e y . Integrando a primeira equação em (6) e utilizando as condições (8), obtemos

$$\int_0^1 d\eta \int_0^1 fx_\xi d\xi = \int_0^1 \left[(fx)_\xi \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} - \int_0^1 f_\xi x d\xi \right] d\eta = \int_0^1 d\xi \int_0^1 y_\eta d\eta = 1.$$

Se f não depende de ξ , então a última relação se simplifica a

$$\int_0^1 fd\eta = 1,$$

e caso $f = const$, concluímos que

$$f = 1.$$

Considerando que a função de distorção f é positiva e contínua no Ω , podemos chegar as mesmas conclusões a partir da teoria geral de transformações quase conformes. Realmente, neste caso a transformação (6), (8) é quase conforme e do resultado de Grotzsch⁵, segue que o único mapeamento quase conforme de Ω a Q é o mapeamento 1-quase conforme, isto é, a transformação conforme, o que implica que $f = 1$.

Consideremos agora o mesmo problema, expressando a condição de ortogonalidade em termos das equações generalizadas de Laplace (7). Demonstramos que a descrição do mesmo mapeamento de Ω à Q pelas relações (8), (7) não revela nenhuma restrição a função de distorção f . Para isso, consideremos o problema para função x :

$$\left(fx_{\xi}\right)_{\xi} + \left(\frac{1}{f}x_{\eta}\right)_{\eta} = 0, \quad x(0,\eta) = 0, \quad x(1,\eta) = 1. \quad (10)$$

Para simplificar, suponhamos que $f = \text{const}$. Primeiro, introduzindo uma nova função

$$X = x - \xi, \quad (11)$$

transformamos a segunda condição de contorno numa condição homogênea sem modificar as demais relações:

$$\left(fX_{\xi}\right)_{\xi} + \left(\frac{1}{f}X_{\eta}\right)_{\eta} = 0, \quad X(0,\eta) = 0, \quad X(1,\eta) = 0. \quad (12)$$

Aplicando o método de Fourier, separamos as variáveis

$$X(\xi,\eta) = F(\xi)G(\eta)$$

e encontramos o problema de Sturm-Liouville para função F

$$F_{\xi\xi} = \lambda F, \quad F(0) = 0, \quad F(1) = 0 \quad (13)$$

e a seguinte equação para função G

$$G_{\eta\eta} = -\lambda f^2 G, \quad (14)$$

onde λ é a constante de separação.

As soluções do (13) são

$$F_k = \text{sen}(k\pi\xi), \quad \lambda_k = -(k\pi)^2, \quad k=1,2,\dots$$

e as soluções de (14) têm a forma

$$G_k = A_k \exp(\mu_k\eta) + B_k \exp(-\mu_k\eta), \quad \mu_k = fk\pi, \quad k=1,2,\dots$$

Assim, as soluções de (12) podem ser expressas via série

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} F_k G_k = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \exp(\mu_k\eta) + B_k \exp(-\mu_k\eta)) \text{sen}(k\pi\xi). \quad (15)$$

Finalmente, a solução do problema (10) se encontra pela formula (11). A especificação de mais duas condições de contorno nas demais fronteiras vai definir os coeficientes A_k e B_k . Do mesmo jeito se resolve o problema para função y .

Podemos observar que o processo de resolução não impõe nenhuma restrição quanto a função f . Isto se confirma pela teoria das equações elípticas. Realmente, para qualquer f suave a solução do problema de Dirichlet para equação em (10) existe e é única⁶. Omitindo as condições de contorno nas duas fronteiras, isto é, considerando o problema (10), podemos encontrar um conjunto de soluções, cuja superposição infinita representa uma série com coeficientes a serem determinados pela satisfação das condições de contorno omitidas. Por exemplo, se o problema de Dirichlet para função x tem a forma

$$\left(fx_\xi\right)_\xi + \left(\frac{1}{f}x_\eta\right)_\eta = 0, \quad x(0,\eta)=0, \quad x(1,\eta)=1, \quad x(\xi,0)=\xi, \quad x(\xi,1)=\xi, \quad (16)$$

então $X(\xi,0)=0$, $X(\xi,1)=0$ e, conseqüentemente, $X=0$, isto é, todos os coeficientes A_k, B_k são nulos. Então, $x=\xi$. Notamos mais uma vez que o problema de Dirichlet com quaisquer valores na fronteira sempre define uma única solução tanto para x como para y sem qualquer exigência a função f .

Consideremos ainda o mapeamento conforme do quadrado Q para o círculo unitário C sob o qual os vértices do quadrado são levados aos quatro pontos equidistantes da circunferência unitária. Para simplificar as construções posteriores dividimos este mapeamento em duas partes: a primeira é a transformação conforme do semiplano superior complexo num retângulo e a segunda é a transformação conforme do círculo unitário C para o semiplano superior.

A transformação do semiplano superior S em um retângulo R se realiza pela integral de Schwarz-Christoffel (integral elíptica da primeira espécie)⁷. Tendo em vista a simetria do problema podemos considerar os quatro pontos simétricos do eixo real

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{k}, \quad x_3 = -\frac{1}{k}, \quad x_4 = -1 \quad (17)$$

como pré-imagens dos vértices do retângulo (veja Fig.2). Neste caso a integral de Schwarz-Christoffel pode ser escrita na forma

$$w = f(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad 0 < k < 1, \quad \text{Im } z > 0 \quad (18)$$

Os comprimentos dos lados do retângulo são definidos pelas fórmulas

$$2K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} = K(k'),$$

onde $k^2 + k'^2 = 1$ e o parâmetro k deve ser escolhido de tal modo que o retângulo R seja um quadrado, isto é $2K(k) = K'(k)$. Após algumas transformações algébricas a solução dessa equação se encontra na forma $k = (\sqrt{2} - 1)^2$.

A forma geral de uma transformação conforme do círculo unitário C no semiplano S é

$$\zeta = e^{i\theta} \frac{z - \sigma}{z - \bar{\sigma}}, \quad \text{Im} \sigma > 0, \quad (19)$$

σ é um ponto fixo do semiplano superior. Levando em conta a simetria do problema, podemos considerar o caso quando as regiões S e C são simétricas em relação ao eixo imaginário e os pontos equidistantes na fronteira do círculo são escolhidos na forma

$$\zeta_1 = e^{-i\pi/4}, \quad \zeta_2 = e^{i\pi/4}, \quad \zeta_3 = e^{i3\pi/4}, \quad \zeta_4 = e^{i5\pi/4} \quad (20)$$

(o que sempre pode ser obtido devido a rotação adequada do círculo C). Neste caso $\sigma = ia$, $a > 0$ e a fórmula (19) se torna

$$\zeta = i \frac{z - ia}{z + ia} \quad (21)$$

invertendo a última fórmula, temos

$$z = a \frac{1 - i\zeta}{\zeta - i}. \quad (22)$$

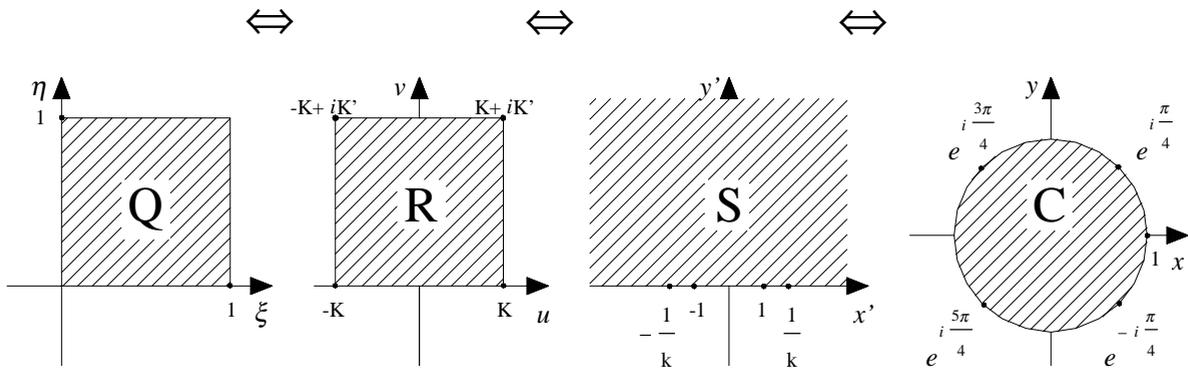


Figura 2: Mapeamento entre quadrado e círculo unitários

Encontramos os valores de z em pontos marcados da circunferência C :

$$z_1 = a(\sqrt{2} - 1), \quad z_2 = a(\sqrt{2} + 1), \quad z_3 = -a(\sqrt{2} + 1), \quad z_4 = -a(\sqrt{2} - 1),$$

onde $z_i = z(\zeta_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Os pontos do eixo real utilizados na primeira transformação são definidos em (17). Portanto escolhemos parâmetro a de tal modo que $z_1 = a(\sqrt{2} - 1) = x_1$.

Então, $a = \sqrt{2} + 1$ e $z_2 = (\sqrt{2} + 1)^2 = x_2 = 1/k$, isto é, o parâmetro k tem o mesmo valor que foi encontrado na primeira transformação.

Assim, a função (22) com parâmetro $a = \sqrt{2} + 1$ leva o círculo unitário C ao semiplano superior S de tal modo que os pontos (20) passam aos pontos (17). Depois, a transformação (18) com parâmetro $k = (\sqrt{2} - 1)^2$ leva este semiplano ao quadrado R (com comprimento do lado igual a $2K$) de tal modo que os pontos (17) passam aos vértices respectivos do quadrado (veja Fig.2). Finalmente, a transformação deste último quadrado no quadrado unitário Q mostrado na Fig.2 se realiza pela transformação

$$\tilde{w} = \frac{1}{2K}(w + K). \tag{23}$$

Assim, a composição de transformações conformes descrita representa o mapeamento conforme de quadrado Q para círculo unitário C sob o qual os vértices do quadrado são levados aos quatro pontos equidistantes da circunferência unitária.

Por outro lado, a transformação desejada pode ser considerada como resultado da resolução do sistema de equações de ortogonalidade expressas em coordenadas físicas polares r, α

$$fr_\xi = r\alpha_\eta, \quad fr\alpha_\xi = -r_\eta \tag{24}$$

e completadas pelas condições de contorno

$$r(0, \eta) = r(1, \eta) = r(\xi, 0) = r(\xi, 1) = 1$$

e pelas condições de correspondência entre os pontos

$$\alpha(0,0) = \frac{5\pi}{4}, \quad \alpha(1,0) = -\frac{\pi}{4}, \quad \alpha(1,1) = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha(0,1) = \frac{3\pi}{4}.$$

Utilizando o resultado da construção do mapeamento de Q para C e o teorema de unicidade de transformações quase conformes⁸, podemos concluir que para uma função constante f , o sistema (24) tem solução somente quando $f = 1$, isto é, entre todas as transformações ortogonais com função $f = const$ pode ser realizada somente aquela com $f = 1$. No entanto, se em vez das equações (24) usarmos suas conseqüências diferenciais

$$\left(f(\ln r)_\xi \right)_\xi + \left(\frac{1}{f}(\ln r)_\eta \right)_\eta = 0, \quad \left(f\alpha_\xi \right)_\xi + \left(\frac{1}{f}\alpha_\eta \right)_\eta = 0,$$

então, de novo, conseguimos encontrar a solução para qualquer $f = const$. Isso se deve ao fato de que a colocação do problema de condições de contorno bem posto para essas equações não depende do valor do parâmetro f ⁶.

3 QUESTÕES DE ORTOGONALIDADE DE MAPEAMENTO

Mostremos agora que as equações generalizadas de Laplace (7) nem sempre asseguram a ortogonalidade de coordenadas geradas. Embora muitas vezes (7) são utilizadas para gerar as grades ortogonais^{1,3,9}, a experiência de alguns autores^{10,11} revela que junto com as condições inadequadas de contorno, as equações (7) podem resultar num sistema de coordenadas não ortogonal. Para conveniência de análise reescrevemos as relações (6) e (7) mais uma vez:

$$fx_{\xi} = y_{\eta} , fy_{\xi} = -x_{\eta} \quad (25)$$

$$(fx_{\xi})_{\xi} + \left(\frac{1}{f}x_{\eta}\right)_{\eta} = 0 , (fy_{\xi})_{\xi} + \left(\frac{1}{f}y_{\eta}\right)_{\eta} = 0 . \quad (26)$$

Sob a hipótese da suavidade das funções, as relações (26) se encontram como uma simples consequência diferencial de (25). A recíproca não é verdadeira, isto é, de um modo geral, as funções x, y satisfazendo (26) podem não ser soluções de (25).

Realmente, introduzimos no lugar de (25) as seguintes equações mais genéricas

$$fx_{\xi} = y_{\eta} + fA , fy_{\xi} = -x_{\eta} + fB , \quad (27)$$

onde A e B são duas funções de ξ, η . Evidentemente, (27) vai resultar em (26) se, e somente se, as funções A e B satisfazem as equações

$$(fA)_{\xi} + B_{\eta} = 0 , (fB)_{\xi} - A_{\eta} = 0 . \quad (28)$$

Consideremos primeiro a situação mais simples quando $f=1$, isto é, a de transformações conformes. Neste caso temos as condições de Cauchy-Riemann para função de variável complexa $C = B + iA$:

$$A_{\xi} = -B_{\eta} , B_{\xi} = A_{\eta} . \quad (29)$$

Considerando A e B como componentes de um campo vetorial (tri-dimensional) $V = (A, B, 0)$, concluímos que este campo é potencial e irrotacional ao mesmo tempo:

$$rotV = 0 , divV = 0 , \quad (30)$$

então existe potencial deste campo p tal que $V = \nabla p \equiv gradp$ e $\nabla^2 p = 0$. Portanto, qualquer função harmônica p vai gerar funções $A = p_{\xi}$, $B = p_{\eta}$ tais que as relações (29) sejam satisfeitas e, conseqüentemente, as equações

$$x_{\xi} = y_{\eta} + A , y_{\xi} = -x_{\eta} + B , \quad (31)$$

mesmo não sendo as de Cauchy-Riemann, vão definir duas funções harmônicas x e y , porque as conseqüências diferenciais de (31) são

$$\nabla^2 x = 0 , \nabla^2 y = 0 . \quad (32)$$

Assim, duas funções harmônicas quaisquer não satisfazem necessariamente as condições de Cauchy-Riemann, mas, sim, de um modo geral, as condições (31) com funções A, B satisfazendo (29). As funções x e y vão resultar numa função analítica de variável complexa, somente quando a escolha apropriada das condições de contorno para as equações (32) seja feita, isto é, se fossem usadas tais condições de contorno que correspondem ao anulamento de funções A e B em (31).

Para dar um exemplo específico consideramos a função harmônica elementar $p = \xi + \eta$ que vai gerar as funções $A = p_\xi = 1, B = p_\eta = 1$. Então as equações (31) vão tomar a forma

$$x_\xi = y_\eta + 1, y_\xi = -x_\eta + 1, \tag{33}$$

introduzindo as funções

$$X = x - \xi, Y = y - \xi, \tag{34}$$

reescrevemos (33) na forma de relações de Cauchy-Riemann

$$X_\xi = Y_\eta, Y_\xi = -X_\eta.$$

Escolhendo qualquer função analítica Z , temos garantia que as suas partes real e imaginária satisfazem as últimas relações. Por exemplo, escolhendo $Z = az = a(\xi + i\eta)$, $a \in \mathbb{R}$, encontramos $X = a\xi, Y = a\eta$ (as condições de Cauchy-Riemann resultam em $X_\xi = Y_\eta = a, Y_\xi = -X_\eta = 0$). Pelas fórmulas (34) encontramos as funções $x = a\xi + \xi, y = a\eta + \xi$ que não satisfazem as condições de Cauchy-Riemann (realmente, $x_\xi = a + 1, y_\eta = a; y_\xi = 1, x_\eta = 0$, isto é, são satisfeitas as condições (33)) e portanto não representam o mapeamento ortogonal com $f = 1$. Mais do que isso, essas duas funções não podem representar uma transformação ortogonal para $a \neq 0$, porque, devido as condições primitivas de ortogonalidade (25), temos

$$f = \frac{y_\eta}{x_\xi} = \frac{a}{a+1}, f = -\frac{x_\eta}{y_\xi} = \frac{0}{1} = 0,$$

isto é, uma contradição.

No caso genérico, quando $f \neq 1$, as equações (28) também tem várias soluções não nulas. Alguns exemplos destes podem ser obtidos considerando as formas simplificadas de função de distorção. Caso $f = f(\eta)$, as equações para A e B têm a forma

$$\left(fA_\xi \right)_\xi + \left(\frac{1}{f} A_\eta \right)_\eta = 0, \left(fB_\xi \right)_\xi + \left(\frac{1}{f} B_\eta \right)_\eta = 0, \tag{35}$$

junto com condições respectivas de contorno. Caso $f = f(\xi)$, as equações para A e B têm a forma

$$(f(fA)_\xi)_\xi + A_{\eta\eta} = 0, \quad (f(fB)_\xi)_\xi + B_{\eta\eta} = 0, \quad (36)$$

junto com condições respectivas de contorno. No caso genérico $f = f(\xi, \eta)$ as equações são mais complexas. Por exemplo, a equação para A pode ser expressa na forma

$$\left[\frac{1}{(f_\xi/f)_\eta} \left(\frac{f_\xi}{f} (fA)_\xi + A_{\eta\eta} + (fA)_{\xi\xi} \right) \right]_\eta + (fA)_\xi = 0.$$

Coloquemos a questão: quais são as condições de contorno que, junto com as equações (26), garantem a satisfação de condições de ortogonalidade (25)? Naturalmente, as equações (25) são o primeiro candidato para tal tipo de condições. Assim, consideramos o seguinte problema:

$$(fx_\xi)_\xi + \left(\frac{1}{f} x_\eta \right)_\eta = 0, \quad (fy_\xi)_\xi + \left(\frac{1}{f} y_\eta \right)_\eta = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (37)$$

$$fx_\xi = y_\eta, \quad fy_\xi = -x_\eta \quad \text{em } \Gamma = \partial\Omega. \quad (38)$$

Como foi demonstrado antes o sistema (37) é equivalente ao sistema

$$fx_\xi = y_\eta + fA, \quad fy_\xi = -x_\eta + fB \quad (39)$$

onde A e B satisfazem as equações

$$(fA)_\xi + B_\eta = 0, \quad (fB)_\xi - A_\eta = 0. \quad (40)$$

As condições (38) resultam em condições homogêneas para A e B

$$A = 0, \quad B = 0 \quad \text{em } \Gamma = \partial\Omega, \quad (41)$$

que são consistentes com (40) e destacam a única solução nula do problema (40), (41). Portanto, junto com as condições (38), as equações (37) são equivalentes as condições primitivas de ortogonalidade (25).

Da teoria de equações elípticas, segue que as condições de contorno (38) fecham o sistema (37). A única preocupação a respeito de (38) é a sua concordância com as equações (37), porque as (38) podem ser consideradas como generalização das condições de Neumann. No entanto, aplicando a verificação familiar das condições de Neumann, podemos concluir que nenhuma restrição na fronteira vai aparecer além das definidas em (38). Realmente, integrando a primeira equação em (37), obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (fx_{\xi})_{\xi} + \left(\frac{1}{f} x_{\eta}\right)_{\eta} d\Omega &= \int_0^1 \int_0^1 (fx_{\xi})_{\xi} + \left(\frac{1}{f} x_{\eta}\right)_{\eta} d\xi d\eta = \int_0^1 (fx_{\xi})_{\xi=0}^1 d\eta + \int_0^1 \left(\frac{1}{f} x_{\eta}\right)_{\eta=0}^1 d\xi = \\ &= \int_0^1 (y_{\eta})_{\eta=0}^1 d\eta + \int_0^1 (-y_{\xi})_{\xi=0}^1 d\xi = y(1, \eta)_{\eta=0}^1 - y(0, \eta)_{\eta=0}^1 + (y(\xi, 0))_{\xi=0}^1 - y(\xi, 1)_{\xi=0}^1 = 0 \end{aligned}$$

O cálculo análogo é válido para segunda equação. Assim, as condições (38) são automaticamente consistentes com as equações (37) sem qualquer ajuste complementar.

Embora as condições (38) garantam a ortogonalidade de coordenadas curvilíneas, elas não são de simples aplicação prática, porque geralmente levam ao acoplamento das duas equações em (37), enquanto a passagem de (25) a (26) se justifica na prática pelo desacoplamento de duas equações e funções incógnitas. Ao mesmo tempo, a utilização de quaisquer condições de contorno pode resultar na perda de ortogonalidade, como mostram os exemplos construídos.

4 CONCLUSÕES

Foram consideradas as questões de existência e ortogonalidade de transformações baseadas nas equações generalizadas de Laplace. Através dos exemplos simples de mapeamento entre quadrados unitários e entre quadrado e círculo unitários foi demonstrado que utilização dessas equações pode levar a grades computacionais que perdem as propriedades desejadas impostas previamente. Foram obtidas as equações que definam duas funções provocando a violação de condições de ortogonalidade e foram indicadas as condições de contorno que podem garantir o anulamento dessas funções, restabelecendo dessa maneira a ortogonalidade de grades computacionais.

5 AGRADECIMENTOS

Agradecemos as agências de pesquisa CNPq e FAPERGS que apoiaram essa pesquisa com as bolsas 302738/2003-7 e 01/60053.9.

6 REFERÊNCIAS

- [1] J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C.W. Mastin, *Numerical grid generation. Foundations and applications*, North-Holland (1985).
- [2] C.W. Mastin, J.F. Thompson, "Quasiconformal mappings and grid generation", *SIAM J Sci. Stat. Comput.*, **5**, 305-310 (1984).
- [3] G Ryskin, L.G. Leal, "Orthogonal mapping", *J. Comp. Phys.*, **50**, 71-100 (1983).
- [4] D.S. Dandy, L.G. Leal, "Boundary layer separation from a smooth slip surface", *Phys Fluids*, **29**, 1360-1366 (1986).
- [5] L.V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand (1966).
- [6] P.R. Garabedian, *Partial differential equations*, Wiley & Sons (1964).
- [7] Z. Nehari, *Conformal mapping*, Dover Pub. (1975).
- [8] O. Lehto, K.I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*. Springer-Verlag (1973).

- [9] P. Knupp, S. Steinberg, *Fundamentals of grid generation*, CRC Press (1993).
- [10] E.D. Chikhliwala, Y.C. Yortsos, "Application of orthogonal mapping to some two-dimensional domains", *J. Comp. Phys.*, **57**, 391-402 (1985).
- [11] R. Duraiswami, A. Prosperetti, "Orthogonal mapping in two dimensions", *J. Comp.Phys.*, **98**, 254-268 (1992).