

## VISUALIZACIÓN DE MODELOS POBLACIONALES

Mirta S. Padín<sup>\*</sup>, Claudio A. Delrieux<sup>†</sup>, Héctor Soto<sup>\*</sup> y Héctor H. Reinaga<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Unidad Académica Río Gallegos, Universidad Nacional de la Patagonia Austral  
L. de la Torre 1070, Z9400JZV Río Gallegos, Argentina. TE: 54-(02966)-442319–Interno 19  
e-mail: mpadin@uarg.unpa.edu.ar, web page: <http://www.unpa.edu.ar/>

<sup>†</sup> Departamento de Ing. Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur  
Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3315  
e-mail: usdelrieux@criba.edu.ar, web page: <http://www.uns.edu.ar/>

**Palabras clave:** Visualización Científica, Modelos Poblacionales, Predador-presa.

**Resumen.** *Entre las aplicaciones de mayor importancia en la Visualización Científica podemos contar el análisis interactivo del comportamiento de sistemas dinámicos no lineales y caóticos. Una simulación adecuada del comportamiento dinámico de un sistema, por complejo que sea, está siempre dentro de las posibilidades de un programa de cómputo numérico. Y estos resultados numéricos pueden ser utilizados para producir una representación gráfica del diagrama de fases.*

*En este trabajo se presenta la aplicación de diversas técnicas de visualización al problema de modelización de sistemas poblacionales, atendiendo a las diversas modalidades analizadas por los especialistas en lo que a comportamientos se refiere. En la naturaleza, todas las especies se enfrentan con estrategias estables de desarrollo para la adquisición de recursos y la asignación de estos recursos para funciones vitales como respiración, crecimiento y reproducción. Esta biología puede sólo ser representada en una forma simplificada a través de los denominados modelos poblacionales.*

*El sistema de visualización implementado permite evaluar en forma interactiva los diagramas de fase de los distintos modelos para valores arbitrarios de los parámetros lo que permite verificar la sensatez de la predicción de los modelos desde un punto de vista biológico.*

## 1 INTRODUCCIÓN

La interacción entre variables en un sistema dinámico es objeto de estudio tanto analítico como numérico, y siempre resulta útil conocer una representación gráfica que permita de una manera cómoda analizar los resultados obtenidos.

Si bien el estudio del crecimiento de las poblaciones comenzó estudiando una única especie, el estudio de una área, por más pequeña que sea, indica que siempre al menos coexisten dos de ellas. Los sistemas de Lotka-Volterra<sup>1,2</sup> son los más importantes dentro de la ecología matemática y su estudio comenzó después de la primera Guerra Mundial, aplicado a poblaciones de peces. A lo largo de los años, numerosos investigadores han incorporado modificaciones a la formulación original adaptándola a diversas especies interactuantes.

En el presente trabajo se examinan detenidamente las consecuencias de la dinámica de población de las interacciones entre el predador y la presa. Se presenta un software desarrollado con el fin de colaborar con los especialistas del tema en la representación de resultados.

## 2 SISTEMAS PREDATOR-PRESA

### 2.1 El modelo de Lotka-Volterra

El modelo de Lotka-Volterra original supone una región cerrada que contiene  $F(t)$  individuos presas en el tiempo  $t$ , de los cuales se asume que cada uno tiene una tasa de mortalidad “natural”  $m_0$  y que produce un número constante de nacimientos por unidad de tiempo,  $\beta$ . En ausencia de predación, la población de presas crece exponencialmente con una tasa neta de crecimiento característica  $r = \beta - m_0$ .

Para estimar la tasa de mortalidad adicional per cápita impuesta en la presa por la predación, se supone que las presas están aleatoriamente distribuidas dentro de un área geográfica  $A$ , y que cada predador busca en un área  $A_s$  por unidad de tiempo. Si en una fracción  $\sigma$  de los encuentros predador-presa la presa muere, entonces cada predador consume un promedio de  $\sigma \left(\frac{A_s}{A}\right) F(t)$  presas por unidad de tiempo. Se define la **tasa de ataque** como  $\alpha = \sigma \left(\frac{A_s}{A}\right)$  y por tanto la tasa de actualización per cápita de un predador es  $\alpha F(t)$ .

Si la región de interés contiene  $C(t)$  predadores en el tiempo  $t$ , entonces la tasa de mortalidad por predación per cápita experimentada por una presa es  $\alpha C(t)$ . Así, la **tasa neta de crecimiento** per cápita de una población de presas explotada por  $C$  predadores es  $r - \alpha C$ , esto es

$$\frac{dF}{dt} = (r - \alpha C)F \quad (1)$$

En la obtención de la Ec. (1), se consideró que cada predador consume  $\alpha F(t)$  presas por unidad de tiempo. Suponiendo que cada presa consumida resulta en la producción de  $\epsilon$  nacimientos, entonces la fecundidad per cápita de los predadores en el tiempo  $t$  es  $\epsilon \alpha F(t)$ .

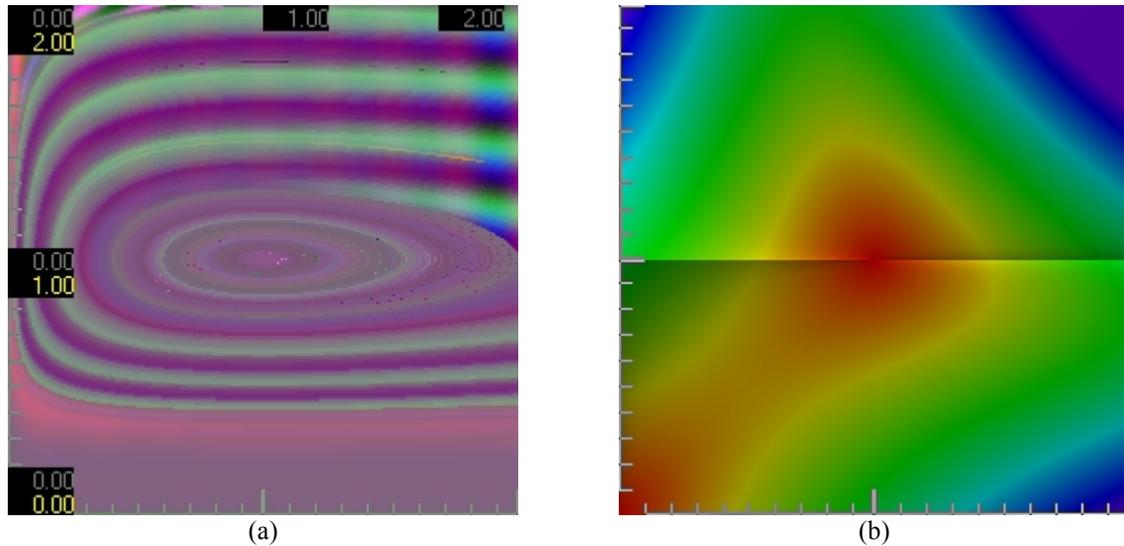


Figura 1: Ecuación de Lotka-Volterra, con parámetros  $r=\alpha=1$ ,  $\delta=\varepsilon=0.1$   
 Visualización empleando (a) LIC (b) mapa de colores.

Si los predadores están sujetos a una tasa de mortalidad per cápita constante  $\delta$ , entonces su dinámica poblacional está descrita por

$$\frac{dC}{dt} = (\varepsilon\alpha F - \delta)C. \quad (2)$$

El o los **estados estacionarios** del modelo se obtienen cuando las tasas de cambio  $F$  y  $C$  son simultáneamente cero, en este caso existen dos pares de valores. En un caso ambas poblaciones pueden ser nulas, lo cual implica que no hay nacimientos ni muertes en ambas poblaciones. En el otro, se requiere que cada presa experimente una tasa de mortalidad por predación exactamente balanceada con su tasa de crecimiento neto, y que cada predador consuma suficientes presas para que sus tasas de reproducción y mortalidad se balanceen exactamente. La primera de estas condiciones se cumple cuando la población de predadores es  $C^*$ , y la segunda cuando la población de presas es  $F^*$ , donde

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\delta}{\varepsilon\alpha} \\ C^* &= \frac{r}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3)$$

Dado que la tasa de crecimiento neta per cápita  $r = \beta - m_0$  es positiva, el estado estacionario de “coexistencia” definido en (3) indica que ambas poblaciones son positivas y ello implica que es biológicamente posible. Cuando no se satisface esta condición, la tasa de muerte de la presa excede su tasa de nacimiento aún en ausencia de predación y el único

estado estacionario biológicamente posible es el estado vacío,  $C = F = 0$ . De ahora en más se considerará que  $r > 0$ .

Si se realiza un análisis cualitativo de las ecuaciones (1) y (2), podrá comprenderse el comportamiento del sistema. Para ello puede observarse la Fig. 1 que propone dos formas de mostrar la información obtenida, empleando el software desarrollado. Como  $(0,0)$  y  $(F^*, C^*)$  son ambos estados estacionarios, el sistema no evolucionará si estos son los puntos iniciales. Si es otro el estado inicial, y si además la densidad de presas está por encima de su valor de estado estacionario ( $F^*$ ) en (2), entonces la población de predadores decrece ( $dC/dt > 0$ ), mientras que si la densidad de predadores está por debajo de  $F^*$  entonces  $dC/dt < 0$ . En forma semejante, analizando (1) se observa que si la población de predadores está por encima del valor estacionario ( $C^*$ ), entonces la población de presas decrece ( $dF/dt < 0$ ) mientras que si está por debajo de  $C^*$  la población de presas se incrementa.

Los resultados de una realización de un modelo de Lotka-Volterra tanto en un gráfico  $C(F)$ ,  $C(t)$  o  $F(t)$  indican que el sistema se mueve en forma de lazo cerrado en torno a un punto estacionario, donde una baja población de predadores conduce a una sobreproducción de presas y los altos niveles de presas resultantes llevan a la sobreproducción de predadores, los cuales producen un sobreconsumo de presas y cortan sus poblaciones a niveles inferiores.

## 2.2 Estabilidad local

Las propiedades del modelo están relacionadas con el comportamiento de las pequeñas desviaciones del estado estacionario. Esto es, la *estabilidad local*<sup>3</sup>. Definiendo  $f(t) \equiv F(t) - F^*$  y  $c(t) \equiv C(t) - C^*$  como pequeñas desviaciones del estado estacionario, las dinámicas de estas desviaciones son descritas por

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= -\frac{\delta}{\epsilon}c, \\ \frac{dc}{dt} &= \epsilon r f. \end{aligned} \tag{4}$$

Las soluciones de estas ecuaciones son de la forma  $c(t) = c_0 e^{\lambda t}$  y  $f(t) = f_0 e^{\lambda t}$ . Los autovalores  $\lambda$  deben satisfacer la ecuación característica

$$\lambda^2 = -r\delta. \tag{5}$$

Así, existen dos autovalores imaginarios puros

$$\lambda_1 = +i\sqrt{r\delta}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{r\delta}, \tag{6}$$

lo cual implica que el sistema es *neutralmente estable*.

Observando el gráfico  $C/F$ , el ciclo aparece como una elipse centrada en el estado estacionario, con los ejes mayor y menor con un radio de largo fijo, y la longitud del eje mayor directamente proporcional a la desviación inicial, como puede observarse en la Fig. 2(a).

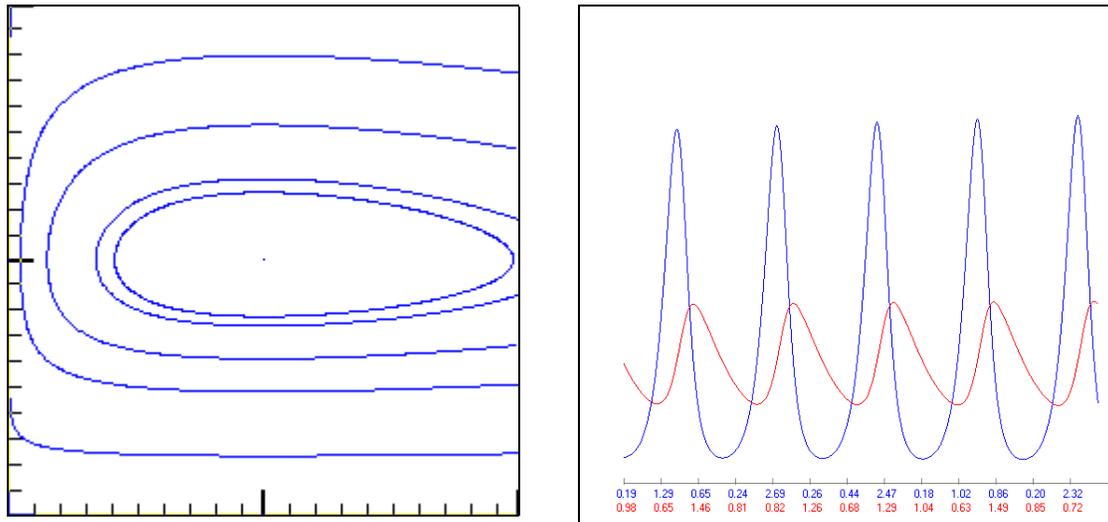


Figura 2: Ecuación de Lotka-Volterra, con parámetros  $r=\alpha=1$ ,  $\delta=\varepsilon=0.1$   
 (a) Visualización empleando *streamlines*. (b) Variación Temporal de las variables

Si se observan los gráficos de  $F$  y de  $C$  en función del tiempo, los ciclos son sinusoidales y desfasados, con picos en el número de presas anteriores a los picos en el número de predadores, como puede verse en la Fig. 2(b).

### 2.3 Autolimitación de las presas

La ventaja más singular del modelo de Lotka-Volterra es su simplicidad. No obstante, esta simplicidad extrema se obtiene omitiendo muchas características de los procesos de poblaciones reales, y es necesario saber hasta que grado tales omisiones son válidas. Se incluirán modificaciones a este modelo en busca de un mayor realismo.

Se asume que en ausencia de predación, el crecimiento exponencial de la presa no puede continuar indefinidamente<sup>4</sup>. Para modelar la inevitable limitación del recurso y su efecto en el crecimiento de la población de presas, se considera que en ausencia de predación, la presa crecería logísticamente, con tasa de crecimiento intrínseca  $r$ , hasta una capacidad de carga  $K$ . Reteniendo todas las otras características de la formulación de Lotka-Volterra, el nuevo modelo es ahora

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \left[ r \left( 1 - \frac{F}{K} \right) - \alpha C \right] F, \\ \frac{dC}{dt} &= (\varepsilon \alpha F - \delta) C. \end{aligned} \quad (8)$$

Este modelo tiene tres estados estacionarios. El estado *vacío* con  $F = C = 0$ , el estado *no predador* con  $F = K$ ,  $C = 0$ , y el estado de *coexistencia* con

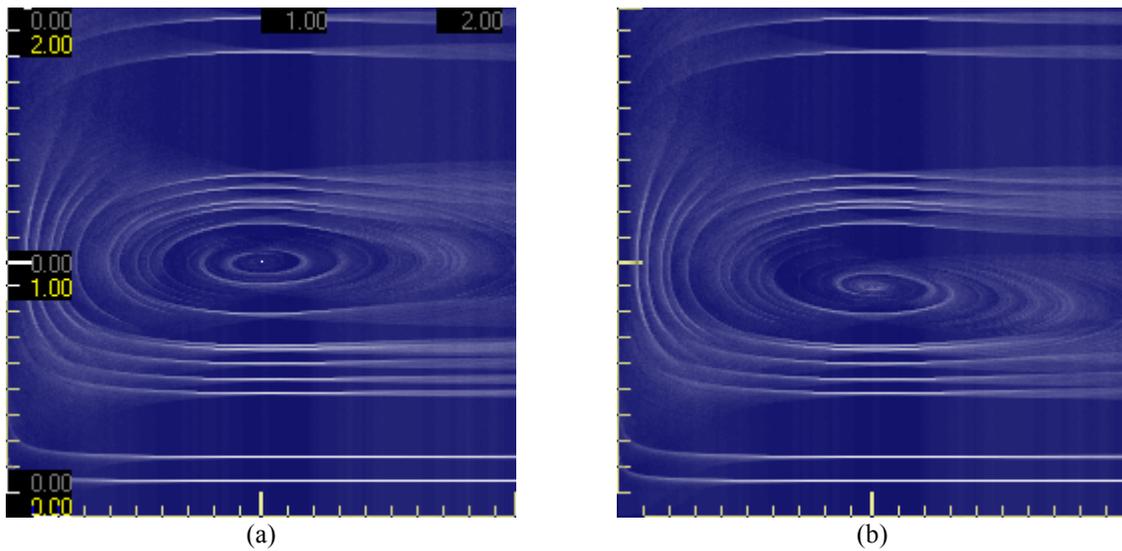


Figura 3: (a) Ecuación de Lotka-Volterra, con parámetros  $r=\alpha=1$ ,  $\delta=\varepsilon=0.1$ .  
 (b) Ecuación de L-V incluyendo autolimitación de presas,  $r=\alpha=1$ ,  $\delta=\varepsilon=0.1$ ,  $K=10$ .

$$F^* = \frac{\delta}{\varepsilon\alpha}, \quad (9)$$

$$C^* = r \left[ 1 - \frac{\delta}{\varepsilon\alpha K} \right].$$

Los estados vacío y sin predador son siempre factibles, pero el estado de coexistencia es solo factible si el predador puede al menos manejar algún exceso de producción cuando la presa esta en su capacidad de carga, esto es,

$$K \geq \frac{\delta}{\varepsilon\alpha}. \quad (10)$$

Algunas realizaciones preliminares de la ecuación (8) muestran que el nuevo modelo se comporta en forma bastante distinta del modelo básico de Lotka-Volterra, esto puede observarse en la Fig. 3, donde empleando una textura de base distinta se muestran comparativamente los comportamientos para un mismo conjunto de parámetros.

Para ver si este comportamiento es típico, se realiza un análisis de estabilidad local convencional. Pequeñas desviaciones del estado estacionario de coexistencia son ahora descritos por

$$\frac{df}{dt} = -\frac{rF^*}{K} f - \alpha F^* c, \quad (11)$$

$$\frac{dc}{dt} = \varepsilon\alpha C^* f.$$

Para hallar soluciones de la forma  $c(t) = c_0 e^{\lambda t}$  y  $f(t) = f_0 e^{\lambda t}$ , se calculan los dos autovalores

$$\lambda = -\frac{rF^*}{K} \pm \sqrt{\left(\frac{rF^*}{K}\right)^2 - \varepsilon\alpha F^* C^*}. \quad (12)$$

Dado que  $F^*$  y  $C^*$  son positivos, este resultado admite sólo dos posibilidades: la expresión bajo el signo de la raíz cuadrada es positiva y menor que  $\left(\frac{rF^*}{K}\right)^2$ , en cuyo caso ambos autovalores son reales y negativos, o esta expresión es negativa, y los dos autovalores son complejos con parte real negativa. Como el estado de estacionario de coexistencia es biológicamente factible, es localmente estable y el sistema converge a él.

Puede suponerse que el comportamiento es oscilatorio. La condición para que el decaimiento de pequeñas fluctuaciones sea oscilatorio es que el sistema posea al menos un autovalor complejo, esto es, la expresión bajo el signo de la raíz cuadrada en la ecuación (12) debe ser negativa. Si las pequeñas desviaciones vuelven al estado estacionario luego de una serie de oscilaciones, entonces una desviación finita lo hará también. De esta forma, la condición para un transitorio oscilatorio es

$$K\left(K - \frac{\delta}{\varepsilon\alpha}\right) > \frac{\delta}{\varepsilon\alpha} \frac{r}{\varepsilon\alpha} \quad (13)$$

Esto es cierto si  $K$  sea suficientemente grande, y no es verdad en cercanías al límite de posible existencia del estado de coexistencia  $K = \delta/\varepsilon\alpha$ . Puede concluirse que el incremento de la capacidad de carga de la presa siempre incrementará la tendencia del sistema al comportamiento oscilatorio transitorio.

## 2.4 La paradoja del enriquecimiento

La autolimitación en la población de presas del modelo de Lotka-Volterra cambia las dinámicas de largo plazo. Si bien el comportamiento del modelo básico de Lotka-Volterra queda determinado por las condiciones iniciales (conclusión no biológica), la introducción de aún la más mínima autolimitación de la presa hace que el comportamiento a largo término sea independiente de las condiciones iniciales. El modelo básico siempre predice oscilaciones continuadas del predador-presa, pero el modelo con presa autolimitante es estable en el largo plazo aunque frecuentemente muestra un transitorio oscilatorio. Resta saber si este comportamiento estable es una propiedad robusta de la estructura del modelo.

Los modelos propuestos son matemáticamente convenientes pero biológicamente poco reales o directamente imposibles. La hipótesis de que el predador tiene una respuesta lineal, lleva a que el crecimiento de la presa por predador crezca sin límite en proporción al número de presas. La respuesta de todos los organismos debe saturar por lo que esta restricción debe ser impuesta al modelo. Si se asume que el predador tiene una respuesta funcional de Holling tipo II<sup>2,4</sup>, la tasa de **actualización** per cápita  $U(F)$  será

$$U(F) = U_m \left[ \frac{F}{F + F_h} \right]. \quad (14)$$

Sin cambiar las restantes hipótesis planteadas, pero escribiendo ahora la tasa neta de crecimiento de la presa como  $L(F) \equiv rF\left(1 - \frac{F}{K}\right)$ , las ecuaciones del modelo serán

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= L(F) - U(F)C, \\ \frac{dC}{dt} &= [\varepsilon U(F) - \delta]C. \end{aligned} \quad (15)$$

El sistema tiene nuevamente tres estados estacionarios, el estado vacío  $(0,0)$ , el estado sin predador  $(K,0)$ , y el estado de coexistencia  $(F^*, C^*)$ , donde

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\delta F_h}{\varepsilon U_m - \delta}, \\ C^* &= \frac{r(F^* + F_h)}{U_m} \left( 1 - \frac{F^*}{K} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

La condición para que el estado estacionario de coexistencia sea biológicamente posible es que  $F^*$  esté dentro del rango en que  $K \rightarrow 0$ . Esto es equivalente a requerir que

$$\varepsilon U_m \left[ \frac{K}{K + F_h} \right] > \delta, \quad (17)$$

lo cual indica que la población del predador debe al menos ser capaz de crecer cuando la presa está en su capacidad de carga.

Puede observarse que este modelo, al igual que los anteriores, es independiente en el largo plazo de las condiciones iniciales. Pero a diferencia de ellos su comportamiento no es necesariamente estable. La convergencia a un estado estacionario estable ocurre solo para un rango bastante estrecho de valores de capacidad de carga, entre el mínimo requerido para satisfacer la desigualdad (17) y un valor crítico sobre el cual el comportamiento de largo plazo es cíclico, frecuentemente con grandes amplitudes.

Se presenta ahora un análisis de estabilidad local para identificar el valor de la capacidad de carga en la cual el estado estable de coexistencia se hace inestable.

Sean  $L'$  y  $U'$  las derivadas de  $L$  y  $U$  con respecto a  $F$ , evaluadas en  $F=F^*$ . Sea  $U^*=U(F)$  y sean pequeñas desviaciones del estado estacionario ( $f$  y  $c$ ) descriptas por

$$\frac{df}{dt} = [L' - U' C^*] f - U^* c, \quad (18)$$

$$\frac{dc}{dt} = \varepsilon U' C^* f.$$

A fin de obtener soluciones de la forma  $e^{\lambda t}$  se encuentra que los autovalores deben obedecer a una ecuación característica bastante familiar,

$$\lambda^2 + [C^*U' - L']\lambda + \varepsilon U^* C^* U' = 0. \quad (19)$$

Por analogía con la discusión anterior puede concluirse que el estado estacionario es localmente estable si el coeficiente de  $\lambda$  en esta ecuación cuadrática es positivo, esto es

$$C^*U' > L'. \quad (20)$$

En este caso el requerimiento de estabilidad local es

$$\frac{K}{F_h} < \left[ \frac{\varepsilon U_m + \delta}{\varepsilon U_m - \delta} \right] \quad (21)$$

Agregando a esta restricción la impuesta por (17), se obtiene el rango de  $K$  sobre el cual la coexistencia no oscilatoria de la presa y el predador es posible

$$\frac{\delta}{\varepsilon U_m - \delta} \leq \frac{K}{F_h} \leq \frac{\varepsilon U_m + \delta}{\varepsilon U_m - \delta}. \quad (22)$$

Debajo de este rango la población del predador no puede mantenerse a sí misma, y por encima de él su estado estacionario es localmente inestable, llevando a oscilaciones predador-presa. Dado que el predador es capaz de mantenerse a sí mismo en un ambiente suficientemente alto en comida ( $\varepsilon U_m > 0$ ) hay siempre algún rango de  $K$  para el cual la coexistencia no oscilatoria es posible. No obstante, este rango es generalmente bastante estrecho, e incrementando la capacidad de carga de la presa sobre el valor crítico superior definido por la desigualdad (22) este último actuará para desestabilizar la interacción. El incremento de  $K$  puede interpretarse biológicamente como incremento del recurso límite disponible para la presa y en algunas oportunidades resulta ser estabilizante más que desestabilizante. Esta tendencia hacia la inestabilidad oscilatoria con el incremento de  $K$  es frecuentemente llamada la *paradoja del enriquecimiento*.

Los ciclos predichos por el modelo cuando el estado estacionario de coexistencia es localmente inestable son llamados *ciclos de escape de predadores*, debido a los mecanismos por los cuales son generados. Cerca del cruce del ciclo de presas, el número de predadores y la mortalidad de predación son bajas y la población de presas crece sin control. Inicialmente la población de presas es tan baja que la población de predadores continúa cayendo, pero la presa crece al punto donde la fecundidad del predador excede la mortalidad y su población comienza a crecer. No obstante, la tasa de incremento per cápita de la población del predador es menor que la de la presa, de manera que la predación no es nunca capaz de controlar el crecimiento en la población de la presa, esto es, la presa se escapa del control de predación.

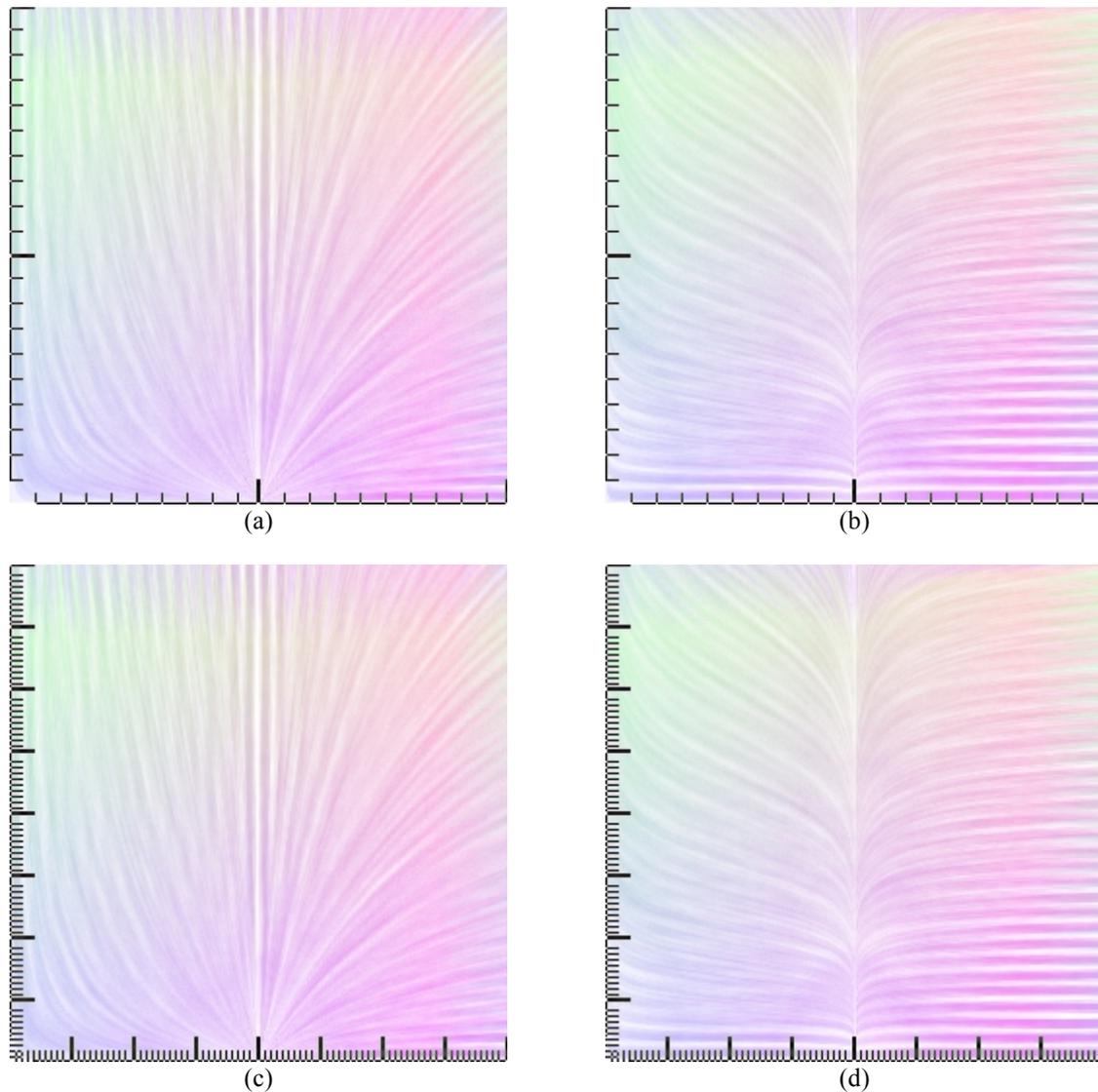


Figura 4: Paradoja del enriquecimiento (Holling II)  $\varepsilon = \delta = 0.1$ ,  $U_m = 5$ ,  $F_H = 2$   
 (a)  $r=0.1$ ,  $K=1$  (b)  $r=1$ ,  $K=1$  (c)  $r=0.1$ ,  $K=4$  (d)  $r=1$ ,  $K=4$

El crecimiento descontrolado en la población de la presa queda terminado cuando la presa se aproxima a su capacidad de carga. Esto hace más lenta o aún detiene su incremento de población, y el predador entonces crece. Mientras esto ocurre, la población del predador esta por encima del valor de estado estacionario, y el exceso de predadores diezma la presa, causando así una declinación en su propio número y recomienza el ciclo. Estos resultados pueden observarse en la Fig. 4, donde con una nueva textura se muestran los cambios de

comportamiento del sistema según el conjunto de parámetros elegidos y las relaciones entre ellos. Nótese que los casos mostrados en (c) y (d) no cumplen con la condición (22).

### 3 L-V WORKBENCH

Todas las figuras vistas más arriba fueron generadas con el L-V Workbench, una aplicación computacional especialmente desarrollada por los autores para facilitar la exploración y visualización de las diferentes características del comportamiento dinámico de poblaciones basado en el modelo de Lotka-Volterra y sus variantes. El L-V Workbench permite elegir el sistema dinámico básico o cualquiera de sus variantes, modificar los parámetros de evaluación, y generar representaciones por medio de integración numérica utilizando el algoritmo de Runge-Kutta.

La representación visual se realiza por medio de los métodos clásicos de Streamlines y LIC. El método de las streamlines se basa en la representación de trayectorias computadas a partir de una condición inicial o “semilla”, por medio de una integración numérica. Esta forma de proceder es muy eficaz, produciendo una visualización adecuada en fracciones de segundo. Para obtener un cubrimiento uniforme del diagrama de fases o para ubicar todos los puntos críticos del sistema, se requiere encontrar un conjunto representativo de trayectorias, lo cual implica encontrar las respectivas semillas, y el paso y la longitud de integración. Una manera automática de generar las semillas es posicionarlas uniformemente en el espacio de fases. De esa forma es posible ubicarlas con una posición y densidad arbitrarias. Usualmente esta técnica produce aliasing cuando la frecuencia espacial de posicionamiento interactúa con las características del diagrama de fases, por lo que es aconsejable utilizar una perturbación de Poisson<sup>6</sup>. La elección de un valor para el diferencial finito o factor de integración es también un problema, dado que un paso demasiado conservador puede producir sobremuestreo, es decir, la generación de una excesiva cantidad de muestras por trayectoria, mayor que la cantidad de pixels en la misma. Por otro lado, un paso de integración muy grande producirá submuestreo, es decir, una cantidad inadecuadamente baja de muestras por trayectoria, lo cual en streamlines se aprecia como una “desintegración” en la representación de la trayectoria. El valor adecuado es imposible de determinar estáticamente, aún en un mismo sistema dinámico, porque obviamente depende de la velocidad local en cada punto. La única manera de asegurarse un paso óptimo en toda circunstancia consiste en utilizar un paso adaptativo, como se sugiere en trabajos previos<sup>7</sup>.

La cantidad de iteraciones, junto con el paso de integración y la velocidad media en la trayectoria, son todos factores que inciden en la longitud final que tendrá la misma en el diagrama de fases. En muchas circunstancias la correcta apreciación de un campo de velocidades se logra visualizando un gran conjunto de trayectorias relativamente cortas. Estas técnicas son directamente dependientes del sistema en particular, por lo que una visualización adecuada requiere de la asistencia del usuario. El posicionamiento uniforme de las semillas no garantiza un cubrimiento satisfactorio, ni siquiera garantiza que todos los puntos críticos del sistema dinámico se representen adecuadamente. Modificar el color de la trayectoria a medida

que se evalúa (por ejemplo, la saturación) permite distinguir atractores de repeledores, así como ubicar ciclos límite y su estabilidad. Sin embargo el diagrama de fases quedará más cubierto en cercanías de atractores o ciclos límite atractivos, mientras que en cercanías de los repeledores, el diagrama es más disperso. Una solución para estos problemas consiste en realizar la dinámica inversa del sistema a partir de la semilla, una cierta cantidad de iteraciones, para determinar si el punto está cerca de un repeledor.

Por su parte, los métodos basados en texturas realizan una integración más corta (típicamente se realizan menos de 100 iteraciones). La trayectoria generada no se grafica, sino que se utiliza para recorrer los “texels” (pixels de la textura) correspondientes, integrando el color de los mismos para encontrar el color final del pixel. Una mejora inmediata consiste en multiplicar, para cada pixel, el aporte de cada texel por medio de una función ponderadora o kernel de convolución de longitud  $L$  igual a la cantidad de pasos de integración. De esa manera se computa cada pixel de la imagen final. Por dicha razón, la LIC produce un cubrimiento uniforme del diagrama de fases, por lo que todos los puntos críticos del sistema son satisfactoriamente representados. Sin embargo muchas veces resulta difícil identificarlos adecuadamente. No siempre se pueden distinguir atractores de repeledores, y resulta casi imposible determinar la existencia de trayectorias cerradas (focos, ciclos límite, trayectorias homoclinicas). La mejora de las posibilidades de la LIC constituye un activo campo de investigación<sup>8,9</sup>, especialmente en lo que concierne a mejorar su costo computacional y la representación del sentido del flujo y las trayectorias cerradas.

En el caso de elegir un método basado en texturas, el sistema permite elegir entre un amplio conjunto de texturas base, las cuales se generan dinámicamente por medio de parámetros elegidos por el usuario según sus necesidades de visualización (ver Fig. 5). También es posible representar la evolución temporal de las poblaciones. El L-V Workbench constituye un primer prototipo de un sistema más amplio, el cual permitirá que el experimentador elija entre un conjunto más amplio de sistemas dinámicos, o bien que directamente escriba las ecuaciones del mismo. Por cuestiones de velocidad este prototipo está actualmente implementado en Delphi. La eficacia de dicha plataforma, junto con la elección y cuidadosa implementación de algoritmos de gran eficiencia, permite lograr visualizaciones en tiempo real, y generar secuencias de animaciones en tiempos interactivos. En un futuro próximo se está contemplando migrar el sistema a Java para ponerlo disponible como applet, lo cual sin duda permitirá ampliar considerablemente el espectro de usuarios potenciales.

#### **4 CONCLUSIONES**

En el presente trabajo se expone el ampliamente difundido modelo predador-presa, partiendo de la formulación original de Lotka-Volterra e incorporando las modificaciones que a lo largo del tiempo le han sido realizadas por estudiosos del tema. Luego, se proponen visualizaciones para todos ellos empleando un software diseñado por los autores.

Este desarrollo pretende constituirse a partir de su versatilidad e interactividad en una propuesta “amigable” para su uso con fines didácticos y científicos.

**Agradecimiento:** Deseamos agradecer a Julián Domínguez por su invaluable ayuda en la elaboración de este trabajo.

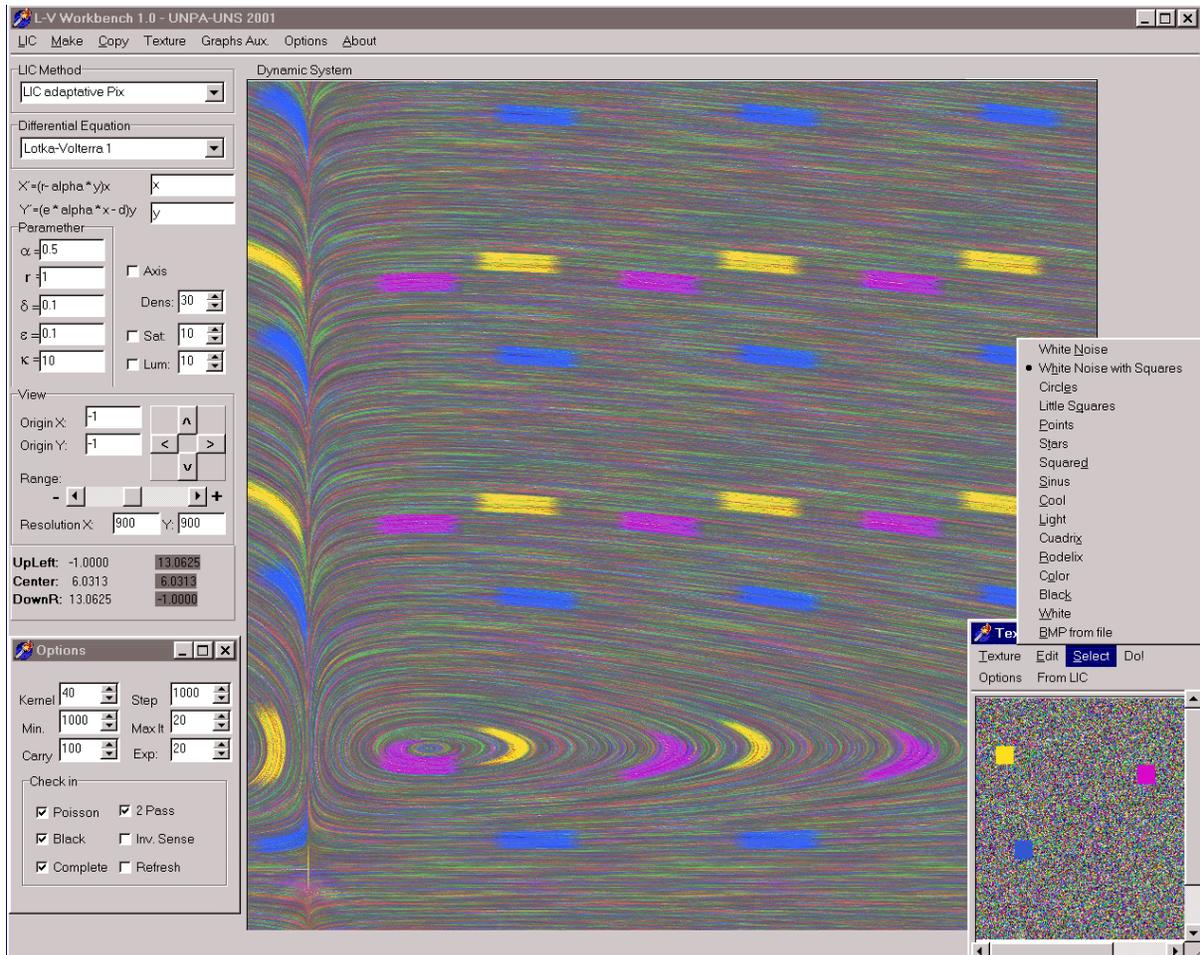


Figura 5: El L-V Workbench

## REFERENCIAS

- [1] W.S.C. Gurney y R.M. Nisbet, *Ecological Dynamics*, Oxford University Press, New York, (1998).
- [2] Y. Takeuchi, *Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems*, World Scientific, Singapore, (1996).
- [3] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books, (1994).

- [4] A.P. Gutierrez, *Applied Population Ecology: a supply-demand approach*, John Wiley & Sons, New York, (1996).
- [5] B. Cabral y L. Leedom, “Imaging Vector fields Using Line Integral Convolution”, *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, 263-270, (1993).
- [6] Claudio Delrieux, Julián Domínguez, y Andrés Repetto. “Towards a CLIC in Vector Field Visualization”. En *Proceedings of the CISST 2001 Conference*, 695--702, CSREA Press, ISBN 1-892512-73-4, (2001).
- [7] Claudio Delrieux, Julián Domínguez, y Andrés Repetto. “Advanced Techniques for Real-time Flow Visualization”. En *SPIE Proceedings Vol. 4716*, 375--385, ISBN: 0-8194-4466-9, (2002).
- [8] Hans-Christian Hege y Detlev Stalling. “Fast LIC with Piecewise Polynomial Filter Kernel”, En H.-C. Hege and K. Polthier, editors, *Mathematical Visualization*, 295-314. Springer-Verlag, Amsterdam, (1998).
- [9] R. Wegenkittl, E. Gröller, y W. Purgathofer. “Animating Flow-fields: Rendering of Oriented Line Integral Convolution”. En *Computer Animation '97 Proceedings*, 15-21, Los Alamitos, CA, IEEE Computer Society Press (1997).