

UN ELEMENTO TRIANGULAR 2-D EN DEFORMACIONES LINEALES IMPUESTAS PARA DEFORMACIONES FINITAS

Fernando G. Flores

Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de Correo 916
5000 Córdoba - Argentina
e-mail: fflores@efn.uncor.edu
web page: <http://www.efn.uncor.edu>

Palabras clave: Elementos Finitos, Triángulos, Deformaciones Impuestas, Grandes Deformaciones.

Resumen. *En este trabajo se presenta una aproximación en deformaciones impuestas con el objetivo de obtener un elemento triangular lineal capaz de abordar problemas en deformaciones finitas. La geometría del elemento se define por 3 nudos con sólo grados de libertad de traslación y está basado en una formulación Lagrangiana Total. Las deformaciones se calculan a partir del tensor métrico el cual se interpola en función de valores a la mitad de cada lado. Para la evaluación del tensor métrico en cada lado se recurre a la geometría de los elementos adyacentes, de tal forma que resulta una parcela de 4 elementos. Esto conduce a una aproximación no-conforme, pese a lo cual el elemento pasa la prueba de la parcela. Se considera plasticidad con deformaciones finitas usando un par tensión-deformación logarítmico. Se supone una descomposición aditiva de deformaciones elásticas y plásticas y se adopta una ley hiper-elástica para la relación tensión-deformación elástica y una función de fluencia cuadrática anisótropa (Mises-Hill) para el comportamiento plástico. El elemento ha sido implementado en un código implícito para problemas con no linealidad moderada y en un código explícito para problemas fuertemente no lineales. Se muestran varios ejemplos a los fines de evaluar el comportamiento de la presente formulación.*

1. INTRODUCCIÓN

Para el análisis de problemas en deformaciones finitas se prefiere casi exclusivamente a los elementos de bajo orden y con grados de libertad nodales que tengan un significado físico claro. En el caso bidimensional esto conduce a triángulos lineales y cuadriláteros bilineales.

Si se restringe a los elementos a tener sólo grados de libertad traslacionales, el triángulo lineal (Triángulo de Deformación Constante de 6 grados de libertad) por un lado requiere mallas finas para obtener resultados de precisión ingenieril y por otro lado bloquea en problemas quasi-incompresibles como es el caso de los problemas que involucran plasticidad o elastómeros en deformación plana.

Desde el punto de vista de las técnicas para el desarrollo de elementos el cuadrilátero bilineal sí presenta variantes y ello ha conducido a intensas investigaciones para obtener cuadriláteros eficientes y robustos. De esta forma se han desarrollado elementos que no bloquean en el límite de incompresibilidad o en problemas dominados por la flexión y que tienen un buen comportamiento en mallas gruesas.

Las técnicas utilizadas y su base teórica han ido evolucionando en los últimos treinta años, comenzando con el adición de modos incompatibles para mejorar el comportamiento flexional o la integración reducida de la componente volumétrica para evitar el bloqueo por incompresibilidad, hasta las técnicas de deformaciones impuestas y mejoradas (ver por ej. la Referencia¹ y las referencias allí citadas).

Desde el punto de vista de las aplicaciones industriales la utilización de triángulos resulta mucho más versátil, esto está principalmente asociado a los generadores de mallas existentes que para el caso de triángulos resultan más eficientes y robustos que los de cuadriláteros, lo que permite además remallados automáticos cuando las mallas se distorsionan mucho durante el proceso.

Por ello se han propuesto distintos triángulos lineales con grados de libertad nodales distintos de los desplazamientos. Esto ha dado lugar por un lado a elementos mixtos o híbridos y por otro a elementos con rotaciones y/o derivadas de los desplazamientos como grados de libertad. En el caso de utilizar códigos explícitos, los elementos híbridos presentan algunos inconvenientes debido a que no todos los grados de libertad tienen masa asociada y requieren técnicas especiales para la integración en el tiempo.² Los elementos con grados de libertad rotacionales son menos comunes y han estado restringidos a problemas de tensión plana. A los fines de evitar el bloqueo volumétrico se ha propuesto también evaluar la componente volumétrica como un promedio sobre un conjunto de elementos.³

En este trabajo se presenta un elemento triangular cuya geometría se define por 3 nudos con sólo grados de libertad de traslación. Para el cálculo de las deformaciones se utiliza además la geometría de los elementos adyacentes, de tal forma que resulta una parcela de 4 elementos. La aproximación propuesta interpola el tensor métrico en forma lineal en función de valores a la mitad de cada lado. El elemento desarrollado resulta capaz de abordar problemas elasto-plásticos en deformaciones finitas.

El contenido de este trabajo es el siguiente, en la sección 2 se presentan las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del sólido. Las secciones 3 y 4 están dedicadas a la aproximación por elementos finitos, allí se presenta una propuesta para evaluar los gradientes a partir de una parcela de elementos, se aproximan los tensores métricos y las deformaciones y se derivan las expresiones necesarias para su implementación computacional. Las secciones 5 y 6 muestran un resumen de los experimentos numéricos realizados en régimen lineal y no-lineal. Finalmente en la sección 7 se resumen algunas conclusiones.

2. CINEMÁTICA DEL SÓLIDO

Se presenta inicialmente los aspectos más relevantes asociadas al comportamiento del sólido. Mayores detalles pueden encontrarse en la vasta literatura dedicada a este campo.

Considérese un sólido con dominio Ω^0 en R^3 y cuyo contorno es Γ^0 . Sean \mathbf{X} y \mathbf{x} las posiciones de un punto cualquiera en las configuraciones indeformada y deformada respectivamente.

En cada punto es posible definir al gradiente de la deformación

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = [\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2 \quad \mathbf{F}_3] \quad (1)$$

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_i} \quad (2)$$

Esto permite introducir al tensor métrico covariante \mathbf{a} en cada punto

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\beta \quad (3)$$

y a partir del gradiente \mathbf{F} , el producto $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$ (con \mathbf{U} el tensor de estiramiento derecho, y \mathbf{C} tensor de deformación derecho de Cauchy-Green) resulta

$$(\mathbf{U}^2)_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \quad (4)$$

Con \mathbf{U}^2 es posible definir diferentes medidas de deformación Lagrangianas. Una ventaja de trabajar con éstas es que están referidas a fibras materiales por lo cual resulta sencillo tratar materiales anisótropos. Para ello se realiza la descomposición espectral de \mathbf{U}

$$\mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha \quad (5)$$

donde λ_α y \mathbf{r}_α son los autovalores y autovectores del tensor de estiramiento derecho \mathbf{U} .

Para considerar plasticidad con deformaciones finitas debe usarse un par tensión-deformación adecuado, aquí se adopta el par de Hencky de tal forma que la medida de deformación (logarítmica) a utilizar es (restringiéndonos a problemas bidimensionales):

$$\mathbf{E}_{\ln} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^3 \ln(\lambda_\alpha) \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha \quad (6)$$

En forma consistente se adopta como medida de tensión al tensor de tensiones de Hencky. Por otro lado al usar una formulación Lagrangiana total, resulta conveniente trabajar con el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff (\mathbf{S}) para la evaluación de fuerzas residuales. La relación entre el tensor de Hencky \mathbf{T} y \mathbf{S} resulta de definir los tensores rotados

$$\mathbf{T}_L = \mathbf{R}_L^T \mathbf{T} \mathbf{R}_L \quad (7)$$

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{R}_L^T \mathbf{S} \mathbf{R}_L \quad (8)$$

donde \mathbf{R}_L es el tensor rotación obtenido a partir de los autovectores de \mathbf{U}

$$\mathbf{R}_L = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3] \quad (9)$$

La relación entre \mathbf{T}_L y \mathbf{S}_L es:

$$[S_L]_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\lambda_\alpha^2} [T_L]_{\alpha\alpha} \quad (10)$$

$$[S_L]_{\alpha\beta} = \frac{\ln(\lambda_\alpha/\lambda_\beta)}{\frac{1}{2}(\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2)} [T_L]_{\alpha\beta} \quad (11)$$

lo que permite calcular

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}_L \mathbf{S}_L \mathbf{R}_L^T \quad (12)$$

Con las anteriores definiciones la forma débil de las ecuaciones de movimiento pueden escribirse como

$$\delta\Pi = \int_{\Omega^0} [\delta\mathbf{E}_{GL} : \mathbf{S}] d\Omega^0 + \delta\Pi_{ext} = 0 \quad (13)$$

donde \mathbf{E}_{GL} es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange

$$\mathbf{E}_{GL} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{2} (\lambda_\alpha^2 - 1) \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) \quad (14)$$

El modelo constitutivo utilizado en las aplicaciones numéricas posteriores corresponde a un material elasto-plástico asociado a metales dúctiles. En el caso de metales, donde las deformaciones elásticas son pequeñas, la utilización de una medida de deformación logarítmica, permite razonablemente adoptar una descomposición aditiva de componentes elásticas y plásticas

$$\mathbf{E}_{ln} = \mathbf{E}_{ln}^e + \mathbf{E}_{ln}^p \quad (15)$$

Se adopta además una relación lineal (constante) entre tensiones y deformaciones elásticas

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} \mathbf{E}_{ln}^e \quad (16)$$

que a su vez se separa en sus componentes desviadora y volumétrica. En las implementaciones numéricas la componente volumétrica se promedia en el centro del elemento a los fines de evitar el bloqueo volumétrico.

Las ecuaciones constitutivas se integran a través de un algoritmo de retorno estándar. La función de fluencia adoptada es la de Mises-Hill con endurecimiento isótropo no lineal.

3. FUNCIONES DE APROXIMACIÓN Y EVALUACIÓN DE LOS GRADIENTES

La idea básica es partir de una malla de triángulos de tres nudos sobre la superficie a modelar, pero a diferencia de un elemento finito estándar, para la evaluación de las deformaciones se hace uso, además de la configuración de cada elemento, de la geometría de los tres triángulos adyacentes al triángulo que se está considerando. Por lo tanto para cada triángulo se utiliza una parcela de 4 elementos que lo incluye como triángulo central (\mathbf{M} en la Figura 1.a), de tal forma que la geometría (cuadrática ahora) queda definida por la posición de 6 nudos.

$$\mathbf{X} = \sum_{I=1}^6 N^I \mathbf{X}^I \quad (17)$$

$$\mathbf{x} = \sum_{I=1}^6 N^I \mathbf{x}^I \quad (18)$$

Visto en el espacio isoparamétrico se mantienen los vértices del triángulo principal (triángulo lineal estándar), los cuales ocupan las posiciones

- nudo 1: $(\xi, \eta) = (0, 0)$
- nudo 2: $(\xi, \eta) = (1, 0)$
- nudo 3: $(\xi, \eta) = (0, 1)$

en tanto que los tres nudos restantes que forman la parcela ocupan las posiciones

- nudo 4: $(\xi, \eta) = (1, 1)$
- nudo 5: $(\xi, \eta) = (-1, 1)$
- nudo 6: $(\xi, \eta) = (1, -1)$

Es entonces posible definir un conjunto de funciones de forma (no-estándar) sobre este elemento cuadrático (con $\zeta = 1 - \xi - \eta$):

$$\begin{aligned} N^1 &= \zeta + \xi\eta & N^4 &= \frac{\zeta}{2} (\zeta - 1) \\ N^2 &= \xi + \eta\zeta & N^5 &= \frac{\xi}{2} (\xi - 1) \\ N^3 &= \eta + \zeta\xi & N^6 &= \frac{\eta}{2} (\eta - 1) \end{aligned} \quad (19)$$

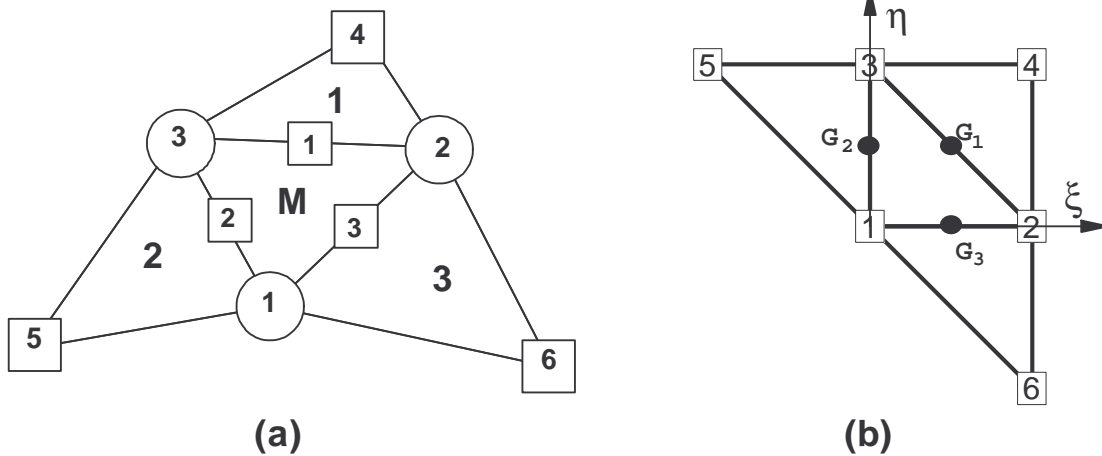


Figura 1: Parcela de elementos (a) en coordenadas espaciales (b) en coordenadas naturales

El objetivo de esta interpolación es la definición de los gradientes en puntos seleccionados a los fines de utilizar una aproximación en deformaciones impuestas. La evaluación de las gradientes se realiza en tres puntos sobre el contorno del elemento principal. Estos puntos corresponden al punto medio de cada lado, indicados como puntos G_1 , G_2 y G_3 en la Figura 1.b. Esta elección tiene las siguientes características:

- Los gradientes en dichos puntos dependen exclusivamente las posiciones de de los nudos asociados a los dos triángulos adyacentes al lado. Esto puede verse fácilmente derivando las funciones de forma y evaluando a la mitad de cada lado.
- Cuando se evalúen los gradientes en los triángulos vecinos, se utilizarán los mismos puntos, de esta forma los gradientes serán los mismos independientemente desde que triángulo se los evalúe. Bajo ciertas implementaciones, en una base de datos orientada a los lados y no a los elementos, se podría hacer una sola evaluación por lado.

Se definen como \mathbf{t}_1 y \mathbf{t}_2 a los vectores unitarios ortogonales en dos direcciones cartesianas convenientemente elegidas, que pueden ser las direcciones principales de ortotropía del material. Las derivadas (naturales) de las funciones de forma valuadas en la configuración original (supraíndice 0), permiten evaluar las matrices Jacobianas de la transformación isoparamétrica para la evaluación de las derivadas cartesianas de las funciones de forma.

$$\begin{bmatrix} N_1^I \\ N_2^I \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_\xi^I \\ N_\eta^I \end{bmatrix} \quad (20)$$

con

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'_{\xi} \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{X}'_{\eta} \cdot \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{X}'_{\xi} \cdot \mathbf{t}_2 & \mathbf{X}'_{\eta} \cdot \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Lo cual permite evaluar el gradiente en la configuración deformada respecto al sistema cartesiano material

$$[\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2] = [\mathbf{x}'_{\xi}, \mathbf{x}'_{\eta}] \mathbf{J}^{-1} \quad (22)$$

y con éstas el tensor métrico covariante

$$\mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{x}'_1 & \mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_2 \cdot \mathbf{x}'_1 & \mathbf{x}'_2 \cdot \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

y finalmente las medidas de deformación membranales que se considere conveniente. Por ejemplo, el tensor de deformaciones de Green-Lagrange

$$\mathbf{E}_{GL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{x}'_1 - 1 & \mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_2 \cdot \mathbf{x}'_1 & \mathbf{x}'_2 \cdot \mathbf{x}'_2 - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Puesto en la forma matricial habitual del MEF

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix}_{GL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{x}'_1 - 1 \\ \mathbf{x}'_2 \cdot \mathbf{x}'_2 - 1 \\ 2\mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

cuya variación es sencillamente

$$\delta \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \cdot \delta \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \cdot \delta \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_1 \cdot \delta \mathbf{x}'_2 + \delta \mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

En los puntos del contorno donde no existe el elemento adyacente, el gradiente se define sencillamente como el gradiente del elemento principal. A partir de la definición de los gradientes en los tres puntos sobre los lados del triángulo, es posible interpretar al elemento como uno en **deformaciones impuestas** si se interpola linealmente al tensor métrico en función de los valores calculados en los lados.

$$\mathbf{a}(\xi, \eta) = (1 - 2\zeta) \mathbf{a}^1 + (1 - 2\xi) \mathbf{a}^2 + (1 - 2\eta) \mathbf{a}^3 \quad (27)$$

4. MATRIZ DE RIGIDEZ

Se consideran en forma separada como es usual las componentes **material** y **geométrica**. La parte material no ofrece dificultades y resulta de la integral

$$\int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA \quad (28)$$

donde la matriz \mathbf{B} es la que resulta de evaluar las variaciones de las deformaciones cuyo cálculo no ofrece dificultades. En tanto que \mathbf{C} es la matriz de constitutiva (en el caso elasto-plástico tangente o algorítmica \mathbf{C}_{ep}).

La parte geométrica resulta de evaluar

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_m^G \Delta \mathbf{u} = \int_A \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\delta \varepsilon^T \mathbf{N}) \Delta \mathbf{u} dA \quad (29)$$

Que se obtiene de sumar las contribuciones en los tres lados

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_m^G \Delta \mathbf{u} = & \frac{A^M}{3} \sum_{K=1}^3 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \left[N_{I1}^{I(K)} N_{I1}^{J(K)} N_{11}^{(K)} + N_{I2}^{I(K)} N_{I2}^{J(K)} N_{22}^{(K)} \right. \\ & \left. + \left(N_{I1}^{I(K)} N_{I2}^{J(K)} + N_{I2}^{I(K)} N_{I1}^{J(K)} \right) N_{12}^{(K)} \right] \delta \mathbf{u}^{J(K)} \cdot \Delta \mathbf{u}^{I(K)} \end{aligned} \quad (30)$$

O escrito en forma matricial

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_m^G \Delta \mathbf{u} = \frac{A^M}{3} \sum_{K=1}^3 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \left\{ \delta \mathbf{u}^I \begin{bmatrix} N_{I1}^J & N_{I2}^J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{I1}^J \\ N_{I2}^J \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^J \right\}^{(K)} \quad (31)$$

5. EJEMPLOS NUMÉRICOS LINEALES

En esta sección se presentan dos ejemplos con el objetivo de evaluar el comportamiento del elemento desarrollado en régimen lineal. En esta primera parte de las evaluaciones numéricas los resultados han sido obtenidos con un programa para análisis estático con integración implícita de las ecuaciones de movimiento. En las comparaciones de denomina TR3 al elemento desarrollado en el cual se realiza la integración de las fuerzas de corte usando 3 puntos de integración y con TR1 cuando se utiliza un solo punto de integración, equivalente a promediar los tensores métricos evaluados en los tres lados. Para realizar comparaciones se incluyen los resultados obtenidos con otros triángulos: el triángulo de deformación constante (TDC), el triángulo de deformación lineal (TDL) y un triángulo lineal (3 nudos) con tres grados de libertad por nudo (2 desplazamientos y el giro de la normal al plano) desarrollado por Felippa y colaboradores (FM-Opt) basado en el esquema ANDES⁴ optimizado para reproducir estados de flexión.

5.1. Prueba de la parcela membranar

Uno de los objetivos principales de esta propuesta es lograr una aproximación membranar (no conforme) con un comportamiento numérico similar al triángulo de deformación lineal, que satisfaga la prueba de la parcela. Para evaluar esto se ha utilizado un dominio cuadrado de lado unitario sometido a fuerzas nodales asociadas a un estado de tensión constante (en ambas direcciones y de corte). Dos posibles parcelas de elementos se muestran en la Figura 2. En la primera de ellas se muestran las fuerzas nodales necesarias para

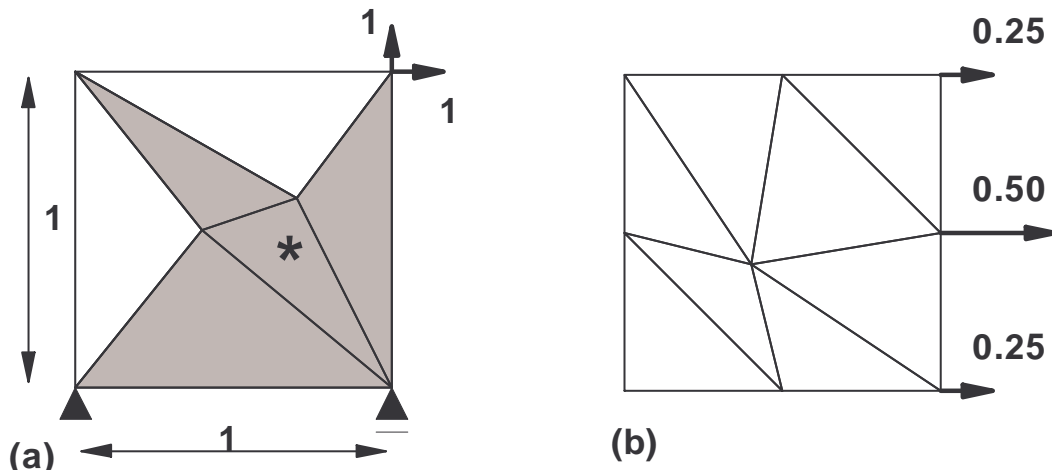


Figura 2: Prueba de la parcela membranaral

obtener un estado tensional uniforme $S_{xx} = S_{xy} = S_{yy} = 1$, en la segunda se indican las fuerzas necesarias para obtener un estado de tracción uniforme en la dirección x_1 . Notar en la segunda que las fuerzas nodales son las mismas que las asociadas al triángulo lineal y no las del triángulo cuadrático. Para ambas mallas se obtienen los resultados correctos en todos los puntos, usando 1 o 3 puntos de integración. Notar además que las parcelas de elementos utilizadas para el cálculo de los gradientes están bastante distorsionadas. Por ejemplo en la primera parcela, se ha sombreado la parcela utilizada para calcular las deformaciones en el elemento *.

5.2. Problema membranaral de Cook

El presente ejemplo⁵ corresponde a un problema con una importante cantidad de energía de corte, donde se intenta evaluar la habilidad del elemento para distorsionarse. En la Figura 3.a se muestra la geometría analizada y la carga actuante. Se trata de un panel trapezoidal empotrado en un extremo y una carga de corte en el otro. En el Cuadro 1 se muestra el desplazamiento vertical del punto **C** (centro del borde cargado) para las distintas mallas utilizadas. Estos resultados a su vez se grafican en la Figura 3.b en función del número de grados de libertad utilizados.

De los resultados presentados puede verse como el presente elemento usando 3 puntos de integración (TR3), para la malla más sencilla (con sólo dos elementos) es apenas superior al triángulo de deformación constante, pero a medida que se aumenta la discretización da resultados similares al triángulo de deformación lineal. El elemento que incluye grados de libertad rotacionales optimizado para tratar problemas de flexión converge más lenta-

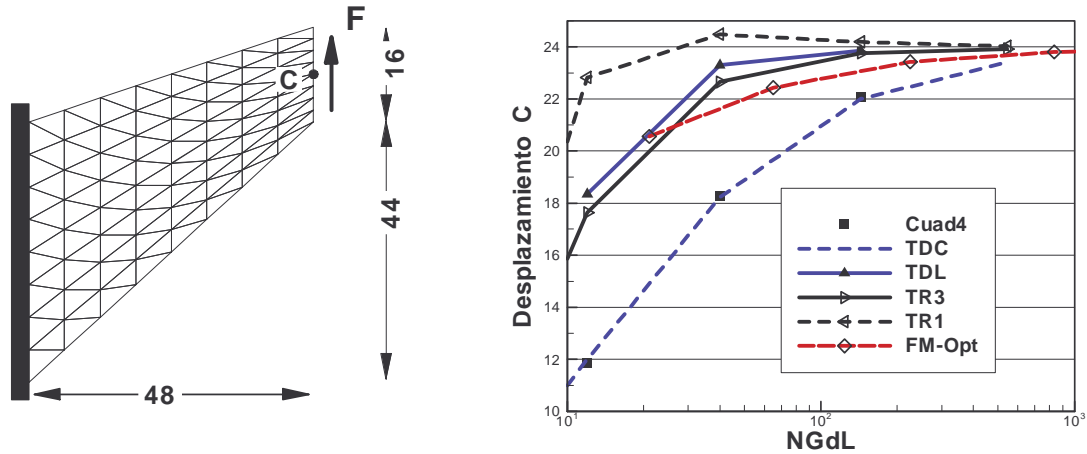


Figura 3: Problema membranal de Cook. a) Geometría b) Desplazamiento vertical del punto C

mente. Por otro lado si en el elemento propuesto se utiliza un sólo punto de integración (TR1) la convergencia en el desplazamiento medido es significativamente mejor que el resto de los elementos para mallas gruesas.

Elemento	subdivisión				
	2 × 2	4 × 4	8 × 8	16 × 16	32 × 32
TR3	6,986	17,635	22,663	23,767	23,923
TR1	8,021	22,829	24,485	24,195	24,027
FM-Opt	20,560	22,450	23,430	23,800	23,910
TDC	5,971	11,993	18,234	22,022	23,412
TDL		18,358	23,302	23,857	

Cuadro 1: Desplazamiento del punto C para el problema membranal de Cook (tensión plana)

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS NO-LINEALES

En esta segunda parte, se presentan resultados en el rango no-lineal geométrico y material. Dadas las características de los problemas analizados, con fuertes no linealidades asociadas a comportamientos inestables y a contacto con fricción, se ha recurrido a un programa con integración explícita de las ecuaciones de movimiento.⁶ Este programa permite obtener soluciones pseudo-estáticas por relajación dinámica. Por otro lado los ejemplos analizados en esta parte corresponden a problemas y axilsimétricos o en deformación plana. Se pone especial énfasis en detectar si el elemento es capaz de analizar problemas elasto-plásticos donde el flujo plástico es isócoro y problemas elásticos quasi-incompresibles.

6.1. Problema membranar de Cook

La misma geometría estudiada en la sección 5.2 se utiliza ahora pero en condiciones de deformación plana y considerando dos materiales. Un material elástico lineal quasi-incompresible con módulo de corte $\mu = 80,1938 \text{ GPa}$ y tres valores distintos del módulo de compresión volumétrica $K_A = 401,0 \times 10^3 \text{ GPa}$, $K_B = 40,1 \times 10^3 \text{ GPa}$ y $K_C = 4,01 \times 10^3 \text{ GPa}$ que corresponden a valores de la relación de Poisson $\nu = 0,4999$, $0,4990$ y $0,4900$ respectivamente. Y un material elasto-plástico definido por constantes elásticas $\mu = 80,1938 \text{ GPa}$ y $K = 164,21 \text{ GPa}$ y plasticidad J_2 con una tensión de fluencia con endurecimiento no lineal definida por

$$\sigma_y(e^p) = 0,450 + 0,12924 e^p + (0,715 - 0,450) (1 - e^{-16,93 e^p}) \quad [\text{GPa}] \quad (32)$$

En el caso elástico la carga aplicada es de 100 kN y de 5 kN en el caso elasto-plástico.

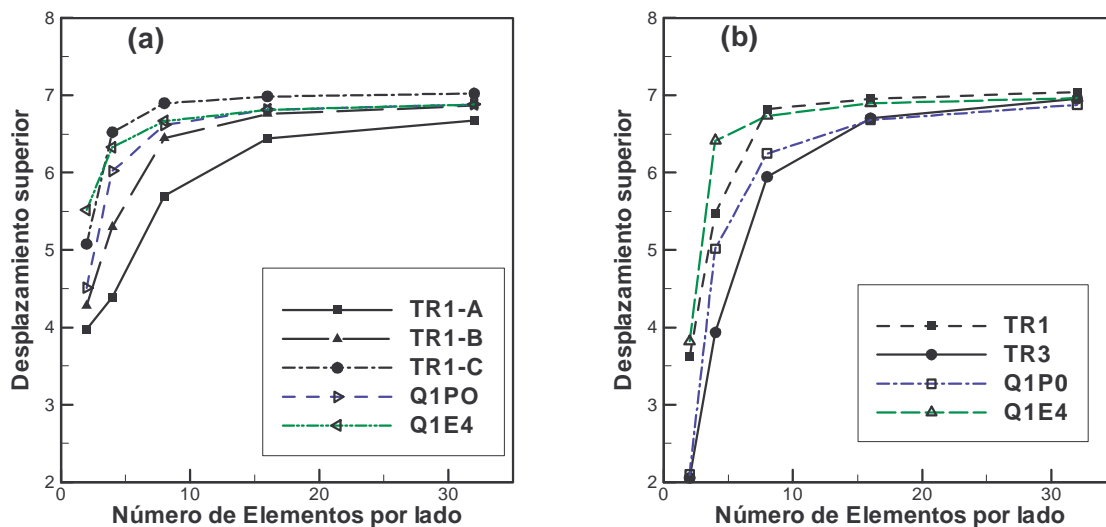


Figura 4: Problema membranar de Cook. Convergencia de las soluciones por elementos finitos. (a) Elasticidad finita quasi-incompresible (b) Plasticidad finita con ley de flujo J_2

En la Figura 4.a se ha graficado el desplazamiento vertical del vértice superior en función del número de elementos por lado de la malla. La Figura 4.a corresponde al caso elástico. Se ha utilizado la versión TR1 (un punto de integración) y se muestran los resultados para los 3 módulos K , estos resultados se denominan con TR1-A, TR1-B y TR1-C. Claramente para un valor del módulo de Poisson $\nu = 0,4999$ (TR1-A) el elemento converge lentamente, en tanto que para valores de $\nu < 0,499$ (TR1-B) converge bien. A los fines de comparar se han incluido los resultados obtenidos para el valor de Poisson más elevado con dos cuadriláteros de cuatro nudos: Q1P0⁸ equivalente a integrar con un

sólo punto de integración la parte volumétrica y con cuatro la parte cortante; Q1E4 que es un elemento en deformaciones mejoradas.⁷ Ambos cuadriláteros muestran un mejor comportamiento que el triángulo propuesto en el caso quasi-incompresible.

La Figura 4.b corresponde al caso elasto-plástico, aquí se han considerado ambas versiones del elemento propuesto (1 y 3 puntos de integración) y se ha comparado con los cuadriláteros Q1P0 y Q1E4. Los resultados con 1 punto de integración convergen mejor que los cuadriláteros utilizados para comparación, en tanto que con 3 puntos de integración la convergencia es más lenta, pero no hay bloqueo numérico.

6.2. Estricción de una barra cilíndrica

Este ejemplo consiste en la simulación de la estricción durante un ensayo de tracción de una barra metálica cilíndrica de 12.826mm de diámetro y 53.334 mm de longitud. Este problema ha sido usado por algunos autores⁹ para evaluar el comportamiento de elementos axilsimétricos y tridimensionales en problemas de localización con plasticidad incompresible. El material de la barra responde a los mismos parámetros elásticos (módulo de Young $E = 206,9GPa$ y relación de Poisson $\nu = 0,29$.) y de endurecimiento isótropo no lineal definidos para el ejemplo anterior.

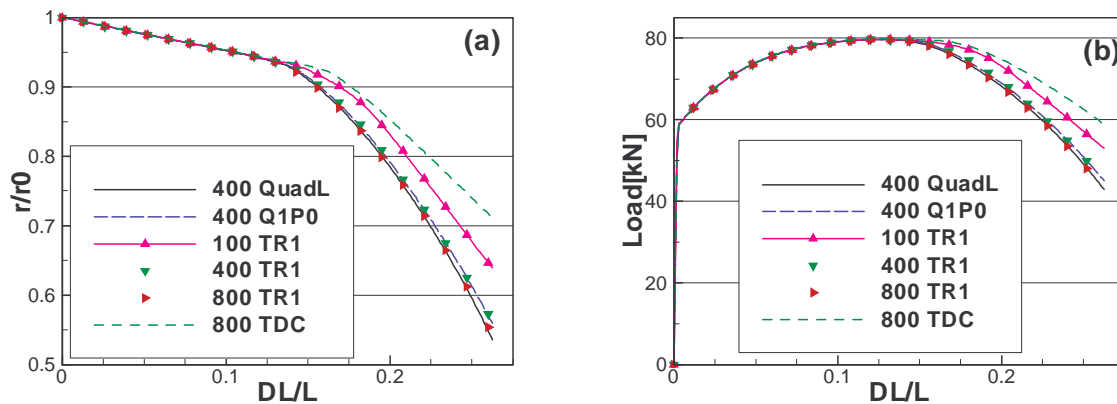


Figura 5: Estricción de una barra cilíndrica. a) radio en el cuello de la estricción versus alargamiento relativo. b) Carga axial versus alargamiento relativo.

Para estudiar el comportamiento del elemento se han utilizado 3 mallas distintas de 6×11 , 11×21 y 11×41 nudos con 100, 400 y 800 elementos triangulares respectivamente. Para comparación se han considerado resultados obtenidos con elementos cuadriláteros sobre la malla más fina que corresponden a 400 elementos. Estos elementos cuadriláteros evitan el bloqueo volumétrico utilizando un único punto de integración para la presión y se denominan aquí Q1P0⁸ y QUADL.¹⁰ En la Figura 5.a se ha graficado el radio relativo en el cuello de la estricción en función del alargamiento relativo. Puede observarse que con la malla más gruesa existe algún grado de bloqueo, pero que este es pequeño frente

al comportamiento mostrado por el triángulo estándar (TDC) incluso para mallas finas. Para las mallas más finas el elemento muestra un comportamiento similar a los elementos cuadriláteros. Como referencia en la Figura 5.b se ha graficado la carga axial en función del alargamiento relativo, donde pueden hacerse consideraciones similares.

6.3. Estiramiento de una lámina circular con un punzón esférico

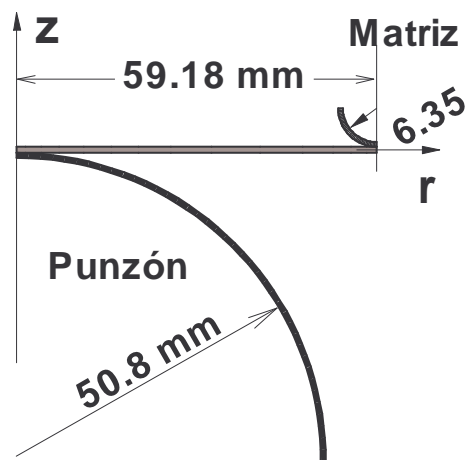


Figura 6: Estiramiento de una lámina circular con un punzón semiesférico

Como último ejemplo se considera un problema con geometría de revolución. Este *benchmark* fue propuesto en la Referencia¹¹ y ha sido ampliamente utilizado para comparar elementos bidimensionales de sólido. La geometría se muestra en la Figura 6. El espesor de la lámina es 1 mm. Las constantes elásticas del material son $E = 69,004 GPa$ y $\nu = 0,3$, en tanto que la ley de endurecimiento es $\sigma_y = 0,589(10^{-4} + e^p)^{0,216} MPa$. Para el contacto entre herramientas y punzón se ha utilizado la técnica de penalización y se ha adoptado un coeficiente de fricción $\mu = 0,3$. La malla utilizada es uniforme con 28 elementos en la dirección r y 4 en la dirección z ($28 \times 4 \times 2$) y se ha utilizado un único punto de integración por elemento. En la Figura 7.a se muestra la resistencia al avance del punzón a lo largo del proceso. Estos resultados están de acuerdo con la mayoría de las simulaciones donde se usan elementos de sólido, que captan los efectos locales de flexión y las presiones y fuerzas de corte que se producen en el contacto con la matriz y las zonas de mayor fricción.⁸ En la Figura 7.b se ha graficado el espesor a lo largo del radio para diferentes avances del punzón y en la Figura 7.c la deformación plástica equivalente en la superficie media de la lámina.

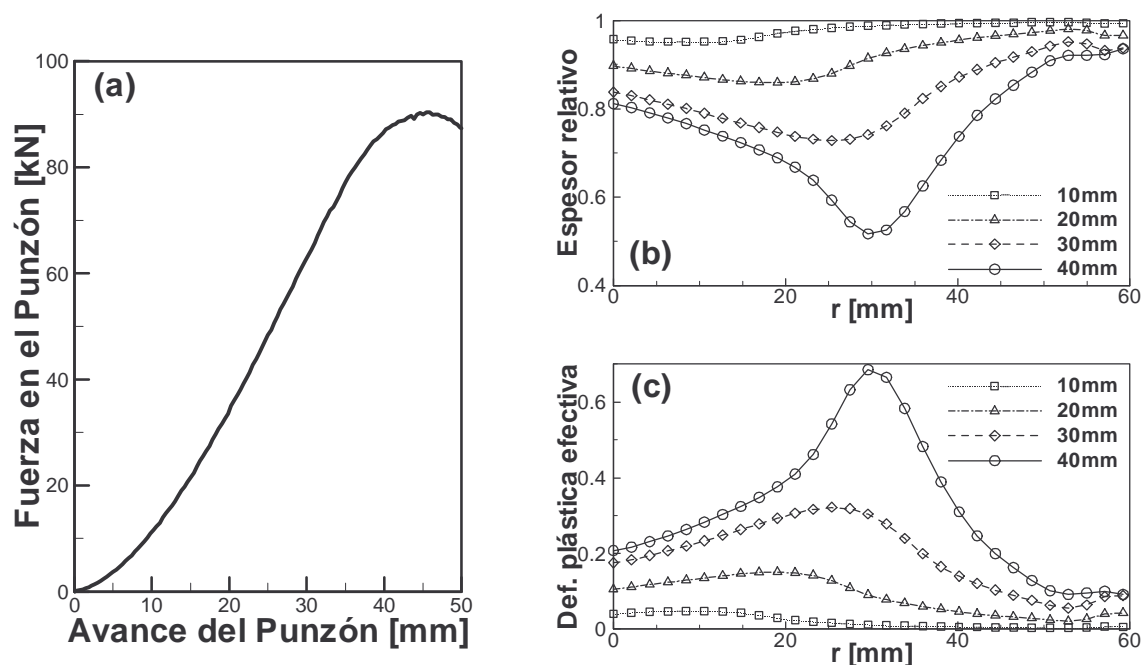


Figura 7: Estiramiento de una lámina circular con un punzón semiesférico. (a) Fuerza en el punzón versus avance del punzón. (b) Relación de espesor a lo largo del radio para diferentes avances del punzón (c) Deformación plástica equivalente a lo largo del radio para diferentes avances del punzón

7. CONCLUSIONES

Se ha presentado un elemento triangular para el análisis de sólidos bidimensionales. La geometría queda definida por 3 nudos y sólo utiliza grados de libertad traslacionales, lo que lo hace eficaz para ser utilizados en códigos con integración explícita de las ecuaciones de movimiento. El elemento es no conforme sin embargo pasa el *patch test* y las pruebas numéricas realizadas no indican problemas. En problemas de tensión plana donde la discretización es masiva, el elemento presentado muestra un comportamiento excelente. Esto lo hace elegible como parte membranar de elementos de lámina¹² cuando se intente modelar problemas de conformado de láminas, donde el comportamiento membranar es el más importante y se requiera un discretización masiva del dominio. En problemas de deformación plana y axilsimétricos con deformaciones finitas en régimen elasto-plástico el comportamiento es muy bueno, similar a los elementos cuadriláteros con deformaciones mejoradas. En problemas en deformación plana, con material elástico quasi-incompresible, el elemento bloquea para valores de la relación de Poisson muy cercana a 0,5 pero para valores menores a 0,499 el comportamiento ya es bueno. El comportamiento del elemento todavía debe ser evaluado para deformaciones superiores a 1 y las características de convergencia en geometrías y mallas más complejas donde existan variaciones locales importantes del tamaño de los elementos.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo de CONICET y la Agencia Córdoba Ciencia S.E. para el desarrollo del presente trabajo.

REFERENCIAS

- [1] J.C. Simo y M.S. Rifai, A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes, *Int. J. Num. Meths in Engrg*, vol. 29, pp 1595-1638, 1990.
- [2] O.C. Zienkiewicz, J. Rojek, R.L. Taylor y M. Pastor, Triangles and Tetrahedra in Explicit Dynamic Codes for Solids, *Int. J. Num. Meths in Engrg*, vol. 43, pp 565-583, 1998.
- [3] E.A. Souza Neto, F.M.A. Pires y D.R.J. Owen, A New F-bar-based Method for Linear Triangles and Tetrahedra in the Finite Strain Analysis of Nearly Incompressible Solids. *VII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS 2003*, E. Oñate y D.R.J. Owen (Eds), CIMNE, Barcelona, 2003.
- [4] C.A. Felippa y C. Militello, Membrane Triangles with Corner Drilling Freedoms: II. The ANDES element, *Finite Element Anal. Des.*, vol. 12, pp 189-201, 1992
- [5] R.D. Cook, Improved two-dimensional finite element, *Journal of the Structural Division*, ASCE, 100, ST6, pp. 1851-1863, 1974.
- [6] STAMPACK, *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems*, Quantech ATZ, Barcelona, SPAIN, ver. 6.00, 2003.
- [7] S. Glaser y F. Armero On the Formulation of Enhanced Strain Finite Elements in Finite Deformations, *Engineering Computations*, vol. 14, pp 757-791, 1997.
- [8] C. García Garino *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*, Tesis de doctorado, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 1993.
- [9] J.C. Simo y T.J.R. Hughes, *Computational Inelasticity*, Springer Verlag, Heidelberg, 2000.
- [10] F.G. Flores, Elementos finitos para el análisis de sólidos anisótropos con grandes deformaciones plásticas, *Mecánica Computacional vol. XX* (Ed. F.Flores), pp 163-170, 2001.
- [11] J.K. Lee, R.H. Wagoner y E. Nakamachi, *A benchmark test for sheet metal forming*, Technical Report, Ohio State University, 1990.
- [12] F.G.Flores y E. Oñate, Improvements in the Membrane Behaviour of the Three Node Rotation-free BST Shell Triangle Using an Assumed Strain Approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, aceptado para publicación, 2003.