

MODELO SIMPLE PARA HORMIGONES

Juan M. Parnás* y Guillermo J. Etse**

* Estudiante de la Carrera de Postgrado
“Magíster en Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería”
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán
Tucumán, Argentina
email: parnas@argentina.com

** Departamento de Construcciones y Obras Civiles
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán
Tucumán, Argentina
email: getse@herrera.unt.edu.ar

Palabras clave: Condición de Fluencia, Flujo Plástico Asociado, Flujo Plástico No Asociado

Resumen. *Con el objeto de encontrar un modelo sencillo y razonablemente eficiente para la simulación computacional del hormigón simple, se propone un modelo elastoplástico tridimensional basado en la versión parabólica de la conocida formulación de Drucker-Prager, en la cual se emplea una superficie de fluencia muy simple, de manera que se evita lidiar con la problemática involucrada en otras teorías más complejas. En particular se elige el caso de un material perfectamente plástico y a partir de este se introduce un flujo plástico no asociado que apunta a mejorar el desempeño del modelo. Para ello se adopta una función de flujo plástico elíptica la cual es calibrada teniendo en cuenta características correspondientes al ensayo de tracción simple. Una vez desarrollado el modelo, se expone una solución semi-analítica para encontrar el multiplicador plástico para este caso en particular. Finalmente, apuntando a la aplicación del Método de Elementos Finitos, se determina una expresión para el módulo elastoplástico tangente algorítmico con el objeto de optimizar la implementación computacional.*

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta un modelo elastoplástico tridimensional para simular el comportamiento del hormigón, el objetivo final es desarrollar un algoritmo sencillo, sólido y estable para implementar con el Método de los Elementos Finitos. Teniendo en cuenta estos parámetros se decide basar el estudio en el modelo desarrollado por Drucker-Prager, incluyendo algunas variantes que tiendan a mejorar su desempeño.

2 MODELO

Se propone emplear la versión parabólica del modelo elastoplástico de Drucker-Prager. La superficie de fluencia es un paraboloides, aparentemente más complejo que el cono de la versión lineal (versión original) pero con la ventaja de no presentar discontinuidad en la derivada para el punto de tracción triaxial.

Se elige el caso perfectamente plástico, en una primera instancia se analiza la situación con flujo plástico asociado, y luego para mejorar el comportamiento del modelo se introduce un flujo plástico no asociado.

2.1 Flujo asociado

En este caso se adopta para el flujo plástico la misma función que para la condición de fluencia. Determinada la superficie de fluencia y su gradiente, ya es posible realizar un análisis computacional del modelo.

2.1.1 Condición de Fluencia

$$F = J_2 + \alpha_F I_1 - \beta_F = 0 \quad (1)$$

$$\alpha_F = (f_c' - f_t') / 3 \quad (2)$$

$$\beta_F = (f_c' \cdot f_t') / 3 \quad (3)$$

F	: Función de fluencia
J ₂	: Segundo invariante de tensiones deviatoricas
I ₁	: Primer invariante de tensiones
α _F , β _F	: Parámetros de calibración
f _c '	: Tensión de rotura en el ensayo de compresión simple
f _t '	: Tensión de rotura en el ensayo de tensión simple

Los parámetros α_F, β_F se deducen con las condiciones de que tanto el punto correspondiente al ensayo de compresión simple como el punto correspondiente al ensayo de tracción simple pertenezcan a un paraboloides de revolución cuyo eje se encuentra sobre el eje de tensiones hidrostáticas, con el vértice en la zona de tracción y la apertura hacia la zona de compresión.

2.1.2 Gradiente de la Función de Fluencia

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \mathbf{s} + \alpha_F \mathbf{1} \quad (4)$$

\mathbf{s} : Componente Deviatórica del Tensor de Tensiones
 $\mathbf{1}$: Tensor Unitario de 2º Orden

2.1.3 Análisis Computacional

A continuación se muestran ejemplos obtenidos de la implementación del modelo con flujo asociado, empleando control de deformaciones. Para el desarrollo se utiliza una herramienta de cálculo matemático por ordenador.

Los parámetros usados son los siguientes:

$$E = 3000 \text{ ksi}$$

$$f_c' = 4.0 \text{ ksi}$$

$$f_t' = 0.6 \text{ ksi}$$

Ejemplo 1

Se aplica $\boldsymbol{\varepsilon} = [0.000 \ 0.000 \ 0.000 \ 0.004 \ 0.000 \ 0.000]^T$ en 200 pasos.

Este caso corresponde a un estado de corte simple, la acción aplicada es una distorsión (deformación por corte), se observa el comportamiento para varios valores del módulo de Poisson. Ver Figura 1.

Ejemplo 2

Se aplica $\boldsymbol{\varepsilon} = [-0.0005 \ -0.0005 \ -0.0005 \ 0.0000 \ 0.0000 \ 0.0000]^T$ en 50 pasos.

Este caso corresponde a compresión triaxial, se observa un comportamiento elástico perfecto. Se puede apreciar la variación de la rigidez elástica debido al efecto del módulo de Poisson (efecto de confinamiento). Ver Figura 2.

Ejemplo 3

Se aplica $\boldsymbol{\varepsilon} = [0.0005 \ 0.0005 \ 0.0005 \ 0.0000 \ 0.0000 \ 0.0000]^T$ en 50 pasos.

Este caso corresponde a tracción triaxial, se observa un comportamiento elastoplástico perfecto. También puede apreciar la variación de la rigidez elástica debido al efecto del módulo de Poisson. Ver Figura 3.

Ejemplo 4

Se aplica $\boldsymbol{\varepsilon} = [-0.004 \ 0.000 \ 0.000 \ 0.000 \ 0.000 \ 0.000]^T$ en 200 pasos.

Esta simulación corresponde a un material comprimido en una dirección (eje x) y restringido en las demás direcciones (ejes y, z).

Se observa claramente que cuanto mayor es el módulo de Poisson, mayor es el efecto de confinamiento. Para valores altos de ν la tensión principal tiende a linealizarse y se aproxima al comportamiento elástico. Ver Figura 4.

Ejemplo 5

Se aplica $\varepsilon = [0.002 \ 0.000 \ 0.000 \ 0.000 \ 0.000 \ 0.000]^T$ en 200 pasos.

Esta simulación corresponde a un material traccionado en una dirección (eje x) y restringido en las demás direcciones (ejes y, z). Ver Figura 5.

En este ejemplo se manifiesta un defecto del modelo, el cual no es coherente con el comportamiento del hormigón. Al traccionar el material en una dirección, una vez que se alcanza el régimen plástico se observa tensiones de compresión en las direcciones perpendiculares a la de aplicación de la acción, siendo que el material esta restringido en dichas direcciones y por lo tanto es de esperarse también tensiones de tracción. Para subsanar este defecto se propone emplear un flujo plástico no asociado.

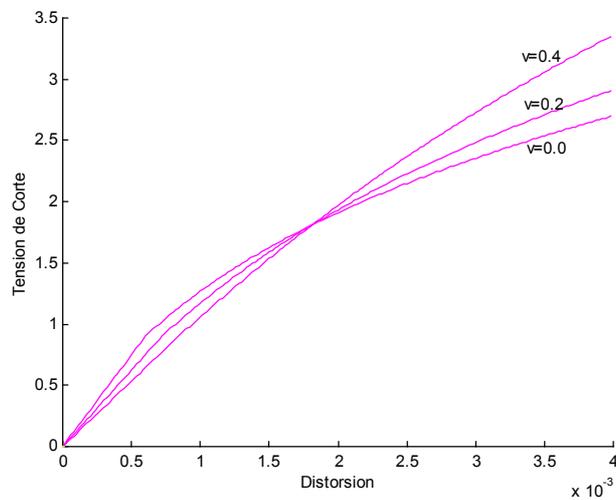


Figura 1: Flujo Asociado - Corte simple.

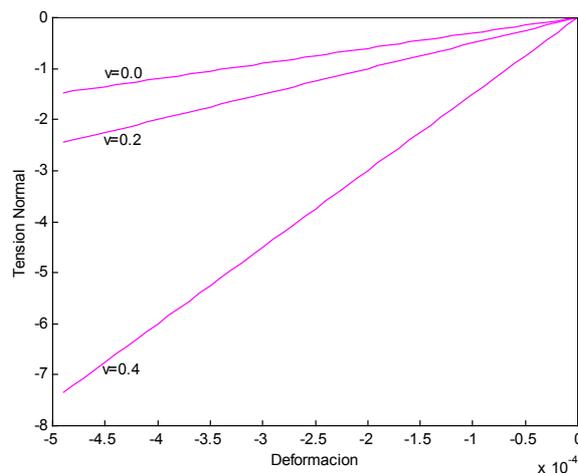


Figura 2: Flujo Asociado - Compresión triaxial.

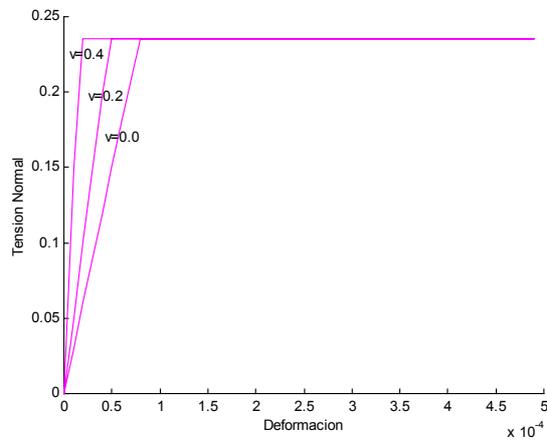


Figura 3: Flujo Asociado - Tracción triaxial.

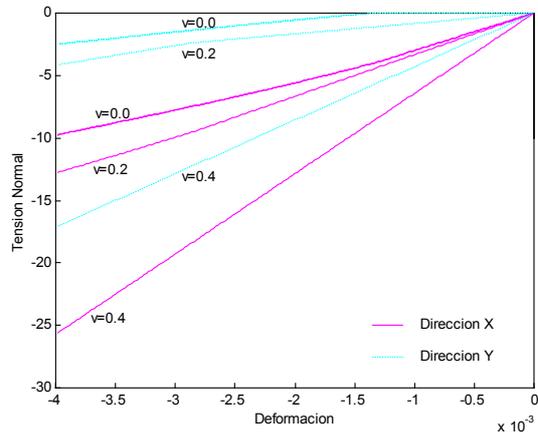


Figura 4: Flujo Asociado - Compresión con restricción lateral.

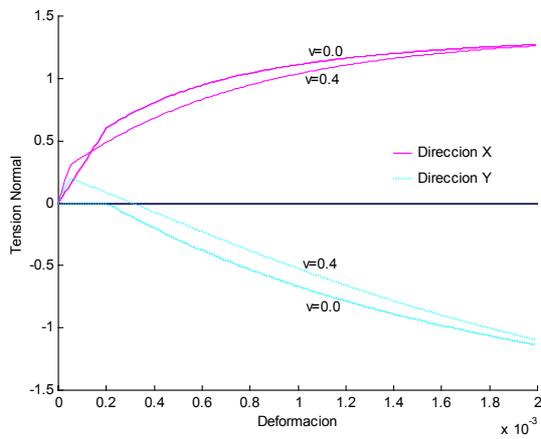


Figura 5: Flujo Asociado - Tracción con restricción lateral.

2.2 Flujo no asociado

Se propone para el flujo plástico un elipsoide de revolución con un eje sobre el eje de tensiones hidrostáticas, y que además cumpla con las siguientes condiciones:

- 1) El punto correspondiente al ensayo de compresión simple pertenece a la función.
- 2) En el punto correspondiente al ensayo de compresión simple, el vector normal es paralelo al predictor elástico en el caso de tensión uniaxial. Esto se traducirá en un comportamiento plástico perfecto para el estado de compresión simple.

2.2.1 Función de Flujo Plástico

$$Q = J_2 + [1/3 \alpha_Q I_1 - \beta_Q]^2 - k_Q^2 \alpha_Q^2 = 0 \quad (5)$$

$$\alpha_Q = \sqrt{\frac{3 f_t'}{2 (f_t' - 3 x_0)}} \quad (6)$$

$$\beta_Q = x_0 \sqrt{\frac{3 f_t'}{2 (f_t' - 3 x_0)}} \quad (7)$$

$$k_Q = \sqrt{\frac{(f_t' - 3 x_0)(f_t' - x_0)}{3}} \quad (8)$$

α_Q , β_Q , k_Q son los parámetros de calibración de la superficie.

La ecuación de la superficie tiene tres parámetros y se emplean sólo dos condiciones para determinarla, por lo tanto queda un parámetro libre (x_0), que en este caso representa el centro del elipsoide.

Para que los valores de α_Q , β_Q , k_Q sean números reales, se debe cumplir que:

$$x_0 < \frac{f_t'}{3} \quad (9)$$

2.2.2 Gradiente del Flujo Plástico

$$\mathbf{m} = \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{s} + \frac{2}{3} (1/3 \alpha_Q I_1 - \beta_Q) \alpha_Q \mathbf{1} \quad (10)$$

2.2.3 Multiplicador Plástico ($\Delta\lambda$)

Debido a que el modelo es perfectamente plástico, se puede obtener una solución analítica para el multiplicador plástico a partir de una dirección dada (\mathbf{m}) del corrector plástico. Como tal dirección en realidad es desconocida, esta solución será parte de una solución semi-

analítica donde por iteración se obtendrá simultáneamente el valor de la dirección en cuestión y el multiplicador. Esta expresión es válida incluso para el caso de flujo asociado.

Si $\mathbf{m}_S = 0$

$$\Delta\lambda = -\frac{c}{b} \quad (11)$$

Si $\mathbf{m}_S \neq 0$

$$\Delta\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (12)$$

Con:

$$a = (2G)^2 [\mathbf{m}_S : \mathbf{m}_S] \quad (13)$$

$$b = - [2G \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{m}_S + \alpha_F (2G+3\Lambda) \text{tr}(\mathbf{m})] \quad (14)$$

$$c = \mathbf{s} : \mathbf{s} + \alpha_F \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) - \beta_F \quad (15)$$

\mathbf{m}_S : Componente Deviatórica de \mathbf{m}

$\boldsymbol{\sigma}$: Tensor de Tensiones

G, Λ : Parámetros de Lamé

2.2.4 Representación gráfica de las funciones

Tanto la función de potencial plástico como la función de fluencia pueden representarse en un sistema cartesiano de dos dimensiones donde la ordenada es $\sqrt{J_2}$ y la abscisa $\frac{I_1}{3}$.

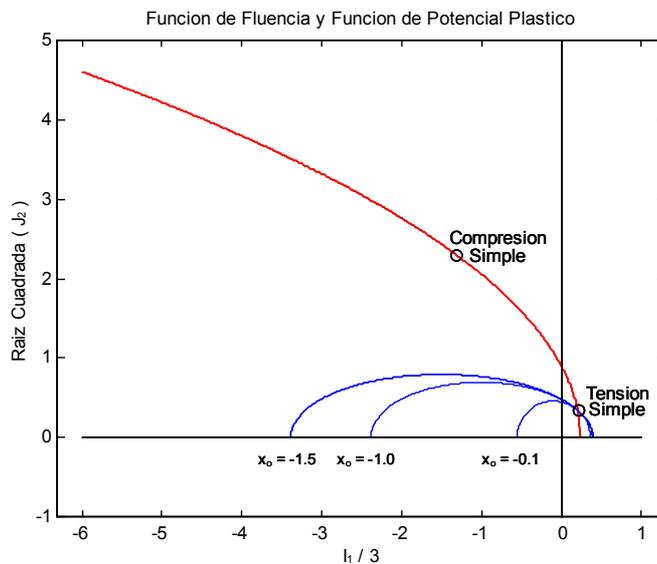


Figura 6: Comparación de funciones.

2.2.5 Análisis Computacional

A continuación se muestran ejemplos obtenidos de la implementación del modelo con flujo no asociado, empleando control de deformaciones. Para el desarrollo se utiliza una herramienta de cálculo matemático por ordenador.

Los parámetros usados son los siguientes:

$$E = 3000 \text{ ksi}$$

$$f_c' = 4.0 \text{ ksi}$$

$$f_t' = 0.6 \text{ ksi}$$

$$x_0 = -1.5 \text{ ksi}$$

Ejemplo 1

Se aplica $\varepsilon = [0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.004 \ 0.0 \ 0.0]^T$ en 200 pasos.

Este caso corresponde al estado de corte simple, en la zona elastoplástica se observa que las tensiones de corte son inferiores a las obtenidas en el caso de flujo asociado. Ver Figura 7.

Ejemplo 2

Se aplica $\varepsilon = [-0.0005 \ -0.0005 \ -0.0005 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T$ en 50 pasos.

Este caso corresponde a compresión triaxial. Ver Figura 8.

Ejemplo 3

Se aplica $\varepsilon = [0.0005 \ 0.0005 \ 0.0005 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T$ en 50 pasos.

Este caso corresponde a tracción triaxial. Ver Figura 9.

Tanto en tracción triaxial como en compresión triaxial, se observan resultados similares al caso del flujo asociado.

Ejemplo 4

Se aplica $\varepsilon = [-0.004 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T$ en 200 pasos

En esta simulación, correspondiente a un estado de compresión con confinamiento, en la zona elastoplástica se observa una ligera disminución de las tensiones comparadas con el caso de flujo asociado, esta disminución es mas notable cuanto menor es el módulo de Poisson (ν). Ver Figura 10. Para valores altos de ν , la respuesta no varía apreciablemente si el flujo es asociado o no.

Ejemplo 5

Se aplica $\varepsilon = [0.002 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T$ en 200 pasos

En esta simulación, correspondiente a un estado de tracción con confinamiento, se observa que con la función elegida para el flujo plástico no asociado se ha corregido el defecto detectado en el caso del flujo asociado. Una vez superado el límite elástico, si bien la plasticidad reduce el estado de tracción lateral, las tensiones nunca llegan a cambiar de signo sino que tienden a anularse para una deformación grande. Por lo tanto se puede decir que el efecto de confinamiento lateral va disminuyendo a medida que el material se deforma y se plastifica. Ver Figura 11.

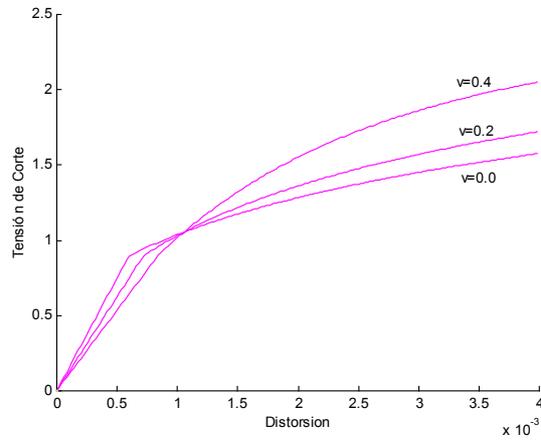


Figura 7: Flujo No Asociado - Corte simple.

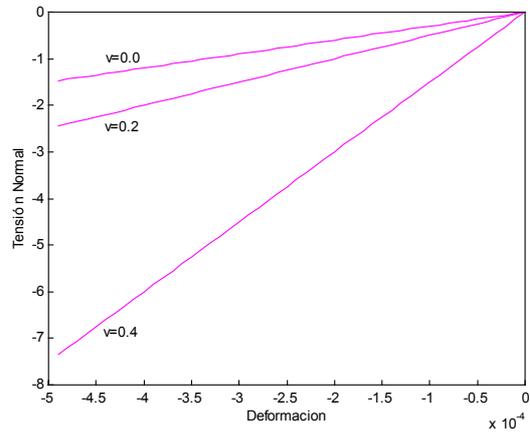


Figura 8: Flujo No Asociado - Compresión triaxial.

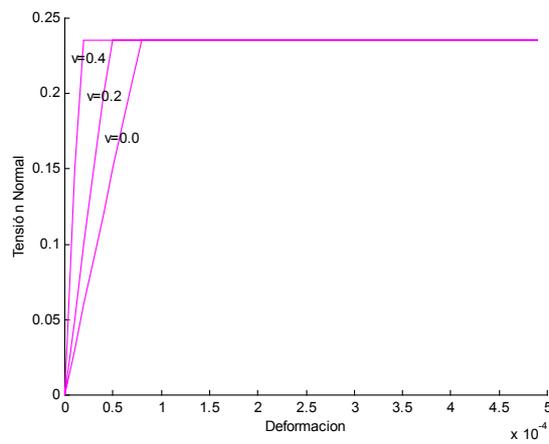


Figura 9: Flujo No Asociado - Tracción triaxial.

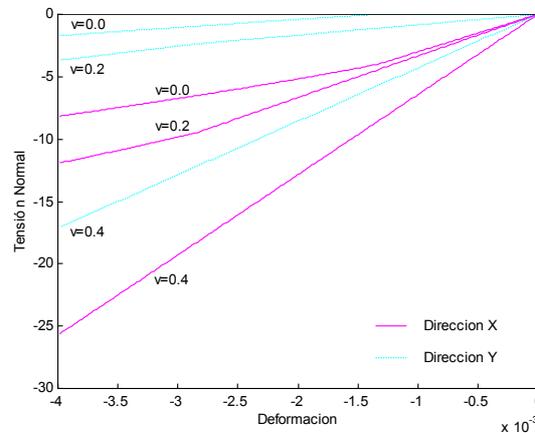


Figura 10: Flujo No Asociado - Compresión con confinamiento.

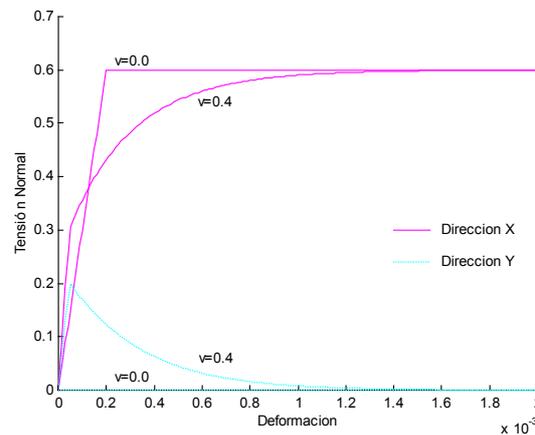


Figura 11: Flujo No Asociado - Tracción con confinamiento.

2.2.6 Influencia de la variación del parámetro x_0

A continuación se analizan algunas simulaciones realizadas para diferentes valores del parámetro x_0 .

Ejemplo 1

Se aplica $\varepsilon = [0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.004 \ 0.0 \ 0.0]^T$ en 200 pasos.

Para el estado de corte simple, se observa que para $x_0 = 0.0$ la respuesta es plástica perfecta, para valores $x_0 < 0.0$ se observa un endurecimiento del material y para valores $x_0 > 0.0$ un ablandamiento. Como se indica en 2.2.1, el límite superior de x_0 teóricamente es $f_t'/3$ pero a medida que ν crece el valor que puede tomar este parámetro decrece pues el algoritmo se vuelve inestable con valores de x_0 positivos o cercanos a cero.

- 1) $\nu = 0.0$ Ver Figura 12.
- 2) $\nu = 0.3$ Ver Figura 13.

Ejemplo 2

Se aplica $\varepsilon = [0.002 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T$ en 200 pasos.

- 1) $\nu = 0.0$ Ver Figura 14.
- 2) $\nu = 0.3$ Ver Figura 15.

En el caso de tracción con confinamiento se observa que la variación del parámetro x_0 no es de gran relevancia. Particularmente, cuando $\nu = 0.0$ se observa comportamiento perfectamente plástico independientemente de x_0 .

Ejemplo 3

Se aplica $\varepsilon = [-0.01 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T$ en 200 pasos.

Para un estado de compresión con confinamiento, en la zona elastoplástica se observa que para cierto valor límite de x_0 se produce el caso perfectamente plástico, para valores menores hay endurecimiento del material, y para valores mayores se produce ablandamiento.

Cuando $\nu = 0.0$, este valor característico es $x_0 = 0.0$, para valores cada vez mayores de ν , los valores de x_0 que producen este fenómeno son cada vez menores.

- 1) $\nu = 0.0$ Ver Figura 16.
- 2) $\nu = 0.3$ Ver Figura 17.

Observación

Tanto para la simulación correspondiente a un estado de tracción triaxial como para compresión triaxial, el parámetro x_0 no tiene influencia alguna en los resultados.

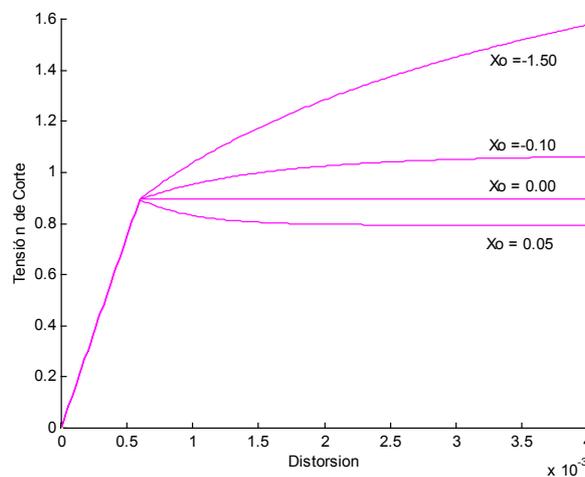


Figura 12: Flujo No Asociado - Corte simple - $\nu = 0.0$

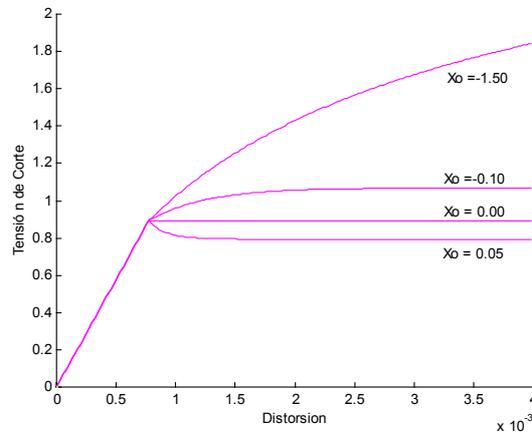


Figura 13: Flujo No Asociado - Corte simple - $\nu = 0.3$

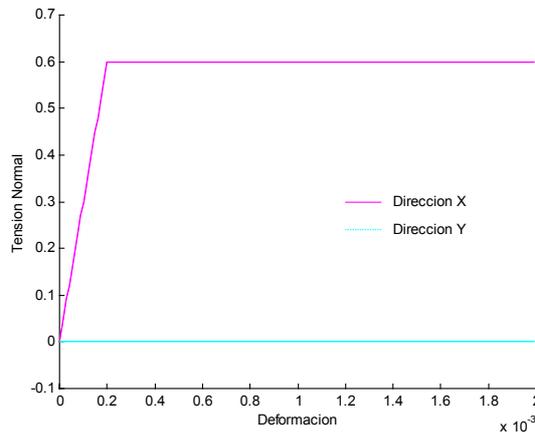


Figura 14: Flujo No Asociado - Tracción con confinamiento - $\nu = 0.0$

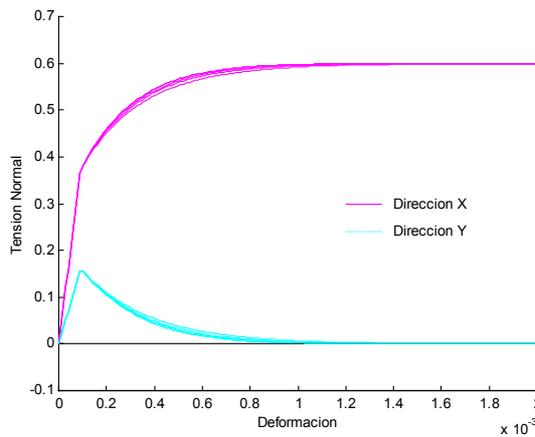


Figura 15: Flujo No Asociado - Tracción con confinamiento - $\nu = 0.3$

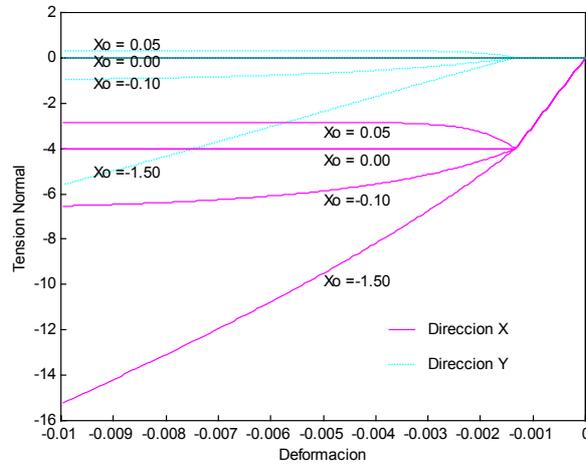


Figura 16: Flujo No Asociado - Compresión con confinamiento - $\nu = 0.0$

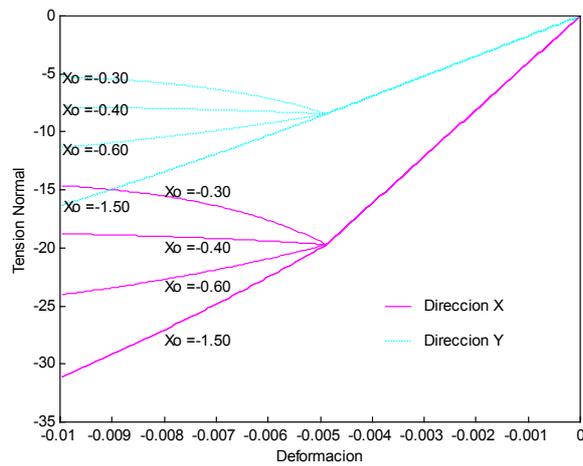


Figura 17: Flujo No Asociado - Compresión con confinamiento - $\nu = 0.3$

3 MODULO TANGENTE ALGORÍTMICO

El *módulo elastoplástico tangente continuo* E se obtiene cuando se impone la condición de consistencia plástica en un problema del continuo, pero para resolver este tipo de problemas es necesario encontrar la solución a un sistema de ecuaciones diferenciales muy complejo que por lo general debe realizarse en forma numérica e incremental, esto conduce a sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales que se resuelven mediante métodos del tipo Newton. Por lo tanto, de un problema continuo se pasa a un problema discreto e incremental, entonces para preservar la convergencia del método se emplea el denominado *módulo elastoplástico tangente algorítmico* E^* que es consistente con el algoritmo de integración.

$$\mathbf{E}^* = [\mathbf{C} + \Delta\lambda \mathbf{H}]^{-1} \quad (16)$$

Donde:

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1} ; \quad C_{ijkl} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1+\nu}{2E} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] \quad (17)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma} \quad (18)$$

Flujo Asociado

El flujo plástico se puede escribir

$$Q = \frac{1}{2} \sigma_{pq} \sigma_{pq} - \frac{1}{6} \sigma_{ff}^2 + \alpha_F \sigma_{ff} - \beta_F \quad (19)$$

El operador Hessiano

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma} = \frac{1}{2} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (20)$$

Reemplazando en (16) se obtiene:

$$\mathbf{E}^*_{ijkl} = \Lambda^* \delta_{ij} \delta_{kl} + G^* [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] \quad (21)$$

Donde:

$$\Lambda^* = \frac{(\nu + \frac{\Delta\lambda}{3} E) E}{(1-2\nu)(1+\nu + \Delta\lambda E)} ; \quad G^* = \frac{E}{2(1+\nu + \Delta\lambda E)} \quad (22)$$

Flujo no Asociado

El flujo plástico se puede escribir

$$Q = \frac{1}{2} \sigma_{pq} \sigma_{pq} + \frac{1}{3} \sigma_{ff}^2 \left(\frac{1}{3} \alpha_Q^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{3} \alpha_Q \beta_Q \sigma_{ff} - (\beta_Q^2 + k_Q^2 \alpha_Q^2) \quad (23)$$

El operador Hessiano

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma} = \frac{1}{2} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{3} \alpha_Q^2 \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (24)$$

Reemplazando en (16) se obtiene:

$$\mathbf{E}^*_{ijkl} = \Lambda^* \delta_{ij} \delta_{kl} + G^* [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] \quad (25)$$

Donde:

$$\Lambda^* = \frac{[\nu + \frac{\Delta\lambda}{3} E (1 - \frac{2}{3} \alpha_Q^2)] E}{(1 - 2\nu + \Delta\lambda E \frac{2}{3} \alpha_Q^2)(1 + \nu + \Delta\lambda E)} ; \quad G^* = \frac{E}{2(1 + \nu + \Delta\lambda E)} \quad (26)$$

4 CONCLUSIONES

En un futuro trabajo se podría determinar una expresión analítica para el parámetro x_0 introduciendo una nueva condición en la función de potencial plástico de manera que este valor quede vinculado con las propiedades características del hormigón. También se podría determinar el valor de x_0 en forma experimental comparando los resultados de las simulaciones con datos de ensayos de laboratorio.

Otros pasos posibles para enriquecer el desempeño del modelo son la introducción del efecto del tercer invariante de tensiones y la capacidad de endurecimiento o ablandamiento del material.

5 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Kaspar J. Willam, *Constitutive Models for Engineering Material*, Encyclopedia of Physical Science & Technology, University of Colorado at Boulder (2002)
- [2] W. F. Chen and D. J. Han, *Plasticity for structural engineers*, Springer-Verlag (1988)
- [3] Lawrence E. Malvern, *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, (1969)