

MODELOS Y ENFOQUES PARA PROBLEMAS CON ACOPLAMIENTO DE MICRO Y MACRO ESTRUCTURAS

Luis A. Godoy

Departamento de Estructuras, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina. TE: 54-(0351)-4334144
e-mail: lgodoy@com.uncor.edu

Palabras clave: Elementos finitos, Micromecánica, Métodos numéricos, Soluciones acopladas.

Resumen. *Este trabajo contiene una revisión de algunos aspectos que se presentan en el acoplamiento entre una micro y una macro-estructura. El tratamiento de macro-estructuras se ha llevado a cabo mediante la mecánica de medios continuos por unos 200 años. El tratamiento de micro-estructuras se realiza experimentalmente y mediante modelos desde hace 50 años. Lo que es nuevo es el acoplamiento de ambos problemas en una sola estrategia de solución. Se identifican algunos problemas importantes de micro-mecánica, incluyendo la identificación de las heterogeneidades y procesos que ocurren. Se define el elemento de volumen representativo (RVE) y la celda unitaria en materiales con periodicidad en su estructura y respuesta. Se consideran algunos modelos computacionales de evolución de una micro-estructura, que consideran un RVE o una celda unitaria. Finalmente se describen formas de acoplar una micro-estructura con el problema macro.*

1 INTRODUCCIÓN

La mecánica del continuo en general, y la teoría de elasticidad en particular, consideran el comportamiento de materiales sólidos suponiendo que en su interior no existen vacíos, discontinuidades o diferencias de fase. Esta idealización permite considerar puntos geométricos en el espacio que no ocupan volumen, y puntos materiales en cuya vecindad se supone que el material está distribuido de manera uniforme. La vecindad puede llevarse al límite y distinguir elementos infinitesimales y se supone que todas las funciones que describen el comportamiento del continuo son funciones continuas. El interés se centra en el comportamiento macroscópico de un sólido, despreciando lo que ocurre en niveles que podemos identificar como microscópicos. Las ventajas de este enfoque han sido apreciadas por los científicos por 200 años y han servido para modelar exitosamente la respuesta de materiales de ingeniería. Para establecer las ecuaciones constitutivas del material se recurre en general al nivel diferencial, en el que, por ejemplo, se relacionan las componentes del tensor de tensiones con las del tensor de deformaciones. El éxito del enfoque de la mecánica del continuo se ha visto potenciado en las últimas décadas por la aparición de métodos numéricos.

La micro-mecánica es la mecánica de cosas y procesos cuyas medidas se expresan en micrones. Cuando uno considera la vecindad material infinitesimal de un medio continuo en la micro-escala, se observa que allí el material no es uniforme, sino que está formado por varios elementos constitutivos, cada uno de los cuales puede tener propiedades distintas y presentarse con formas características. La consideración de la micro-mecánica no es un tema nuevo; en realidad, a partir de la introducción del microscopio electrónico se pueden observar micro-objetos de pocos micrones. La metalurgia y las ciencias de los materiales investigan la micro-estructura desde la segunda mitad del Siglo XX. También se han desarrollado modelos para representar fenómenos o comportamientos en la micro-estructura.

Lo nuevo es tratar de acoplar el nivel macroscópico con el microscópico. Ese intento es mucho más reciente y ha comenzado a ser viable y exitoso en algunos casos recién en la última década. Ahora se requiere compatibilizar los campos de variables entre la micro y la macro-mecánica.

¿Porqué surge ahora este interés por estudiar y modelar de manera acoplada la macro-mecánica y la micro-mecánica en problemas que antes se trataban sólo con macro-mecánica? Parece haber tres razones principales: (a) Debido a la competencia global, se precisan mejores productos, menores costos, menores tiempos de desarrollo. Se trata de reducir los ensayos sobre prototipos y sobre componentes. Hace falta evaluar conceptos de diseño antes de emplear esfuerzos económicos muy grandes en su desarrollo. Hace falta optimizar el ciclo de vida de los diseños, satisfaciendo un nivel de confiabilidad. Este es el enfoque de la ingeniería concurrente. (b) Hay avances notables en capacidad de las computadoras (hardware), especialmente capacidad de cómputo en paralelo. (c) Hay avances notables en tecnología informática. Es posible hacer un modelado más preciso, tomando en cuenta la interacción. Se pueden acoplar modelos multi-disciplina.

Este trabajo presenta una revisión breve de algunos aspectos que hacen al acoplamiento entre macro y micro-estructuras. Esta revisión no intenta ser exhaustiva y está orientada hacia la problemática vista desde la mecánica computacional.

2 MARCO GENERAL DE ANALISIS

Como marco general se puede considerar que hay niveles de análisis y relaciones entre niveles, que se expresan mediante variables de acoplamiento.

Nivel de macro-mecánica. La escala macroscópica tiene medidas relacionadas a las dimensiones del sólido o de la estructura considerada; en esa escala se desarrollan por ejemplo comportamientos elásticos, zonas de plasticidad y grietas visibles. En esta revisión haremos énfasis en problemas mecánicos y térmicos que se modelan con la mecánica del continuo.

Nivel de micro-mecánica. En la escala microscópica las dimensiones son del orden entre mm y micrones. En esa escala aparecen formaciones ordenadas de elementos que forman una micro-estructura. Designaremos como objetos a los elementos de la micro-estructura, posiblemente visibles mediante microscopio. La micro-estructura puede sufrir cambios en el tiempo, y diremos que esos cambios producen una evolución. Por ejemplo, en este nivel se producen deslizamientos entre granos, formación de vacíos, porosidades, micro-fisuras, inclusiones, defectos, nucleación, crecimiento de fases sólidas y otros.

Nivel de nano-mecánica. Una tercera escala puede considerarse en un nivel atómico, y los fenómenos que ocurren en ella se denominan nano-mecánica. La nano-tecnología, que ha generado grandes expectativas en algunos países industrializados, intenta diseñar materiales en esta escala. Sin embargo, por el momento no hay evidencia que permita establecer correlaciones entre las propiedades de los niveles nano y micro. En este trabajo nos limitaremos al acoplamiento micro-macro, prescindiendo del nivel nano.

Los conceptos de micro y macro-mecánica han sido extendidos a un concepto relativo, de manera que importa cuál es la diferencia entre las escalas en las que se miden los fenómenos en los niveles macro y micro. Las dimensiones relativas entre las escalas macro y micro deben ser de varios órdenes de magnitud. Entonces en este concepto extendido es aceptable decir que una represa de tierra es el continuo y allí se usa la macro-escala, mientras que los agregados que tienen varios centímetros de diámetro forman la micro-estructura.

Los modelos que tratan de representar comportamientos micro-mecánicos frecuentemente emplean las mismas variables que se usan en la mecánica del continuo, esto es, tensiones, deformaciones, desplazamientos, pero actuando sobre medidas de longitud del orden del micrón. Se supone que la teoría de elasticidad es válida sin necesitar un factor de escala, pero para la teoría de plasticidad, por debajo de unos 50 micrones se ha postulado que es necesario introducir un factor de escala ¹¹.

Para modelar la micro-mecánica hay dos aspectos importantes que considerar: (a) Las acciones sobre el medio no son fuerzas másicas, de superficie o desplazamientos impuestos, sino que son promedios de campos. (b) El contorno del micro-medio no existe o está definido arbitrariamente, de modo que no se pueden establecer condiciones de contorno de fuerzas o desplazamientos tal como se hace en problemas de valores de contorno en la mecánica del continuo.

Hay muchos problemas macro que no pueden ser tratados empleando las simplificaciones de la mecánica del continuo, o en los que es importante incluir la micro-mecánica como parte de la formulación. En algunos casos la micro-estructura determina las propiedades en el nivel

macro (como en el caso de materiales compuestos ya formados), pero hay otros casos en los que la micro-estructura evoluciona, pudiendo a su vez ser afectada por la respuesta a nivel macro (como en la solidificación de aleaciones metálicas) de manera que se produce un acoplamiento micro-macro-estructural. (a) En primer lugar, hay materiales que derivan sus propiedades de los elementos constituyentes en el nivel microscópico, como los materiales compuestos de fibras y matriz, o los suelos formados por partículas finas. La micro-mecánica trata aquí de encontrar las variables continuas que ocurren en la vecindad de un punto material, tomando en cuenta la micro-estructura de la vecindad y las propiedades de los constituyentes. Vale decir, se desarrollan ecuaciones constitutivas a partir de los micro-elementos. (b) En segundo lugar, hay materiales que presentan una evolución en la formación de su micro-estructura, como las aleaciones que forman una micro-estructura mediante solidificación o el hormigón que sufre hidratación en edad temprana. Se trata de investigar como se forma la micro-estructura de un material a partir de procesos macroscópicos. (c) En tercer lugar, existen procesos de deterioro de las propiedades de un material que tienen su origen en procesos de micro-estructura, como fatiga, daño, plasticidad, fractura y otros, que están asociados a micro-mecánica, micro-fisuración, micro-pandeo o micro-plasticidad. Se trata de descubrir en qué medida la falla de un material se debe a un proceso de la micro-estructura.

3 ELEMENTOS Y FENOMENOS QUE FORMAN UNA MICRO-ESTRUCTURA

Hay una extensa bibliografía sobre micromecánica ^{2, 9, 10, 18, 19, 21, 24} y sólo consideraremos aquí algunos aspectos salientes.

3.1 Micro-elementos

Con la aparición de microscopios de barrido electrónico se ha podido investigar en detalle la micro-estructura de materiales, y esa es la base de las ciencias de los materiales en la actualidad. Una micro-estructura puede estar formada por diferentes elementos, como por ejemplo: Matriz, Granos, Inclusiones, Vacíos y micro-cavidades, Micro-fisuras, Defectos, Fibras, Cristales, Contornos de micro-elementos e interfases con la matriz.

La Figura 1.a muestra un esquema de micro-estructura consistente en una matriz con dos tipos de micro-elementos. Se nota que ambos elementos tienen tamaños diferentes y orientaciones diferentes, de manera que no se puede hacer una caracterización determinística de la micro-estructura. Hay contactos entre elementos y con la matriz. En la Figura 1.b se ilustra un caso similar, pero ahora una de las componentes tiene forma y tamaño regular, los elementos se encuentran sin contacto entre ellos de manera que las superficies en contacto son siempre con la matriz.

El tamaño de los elementos constituyentes puede permanecer constante durante el periodo en el que interesa modelar el material, o puede crecer (como en procesos de nucleación) o decrecer (como en procesos de compactación). Los micro-elementos pueden también estar formados por láminas, como en la aleación eutéctica Al-Cu con contenido de Cu de aproximadamente 33%. Puede haber una gran irregularidad en la disposición de las láminas. Este tipo de formación se encuentra también en suelos.

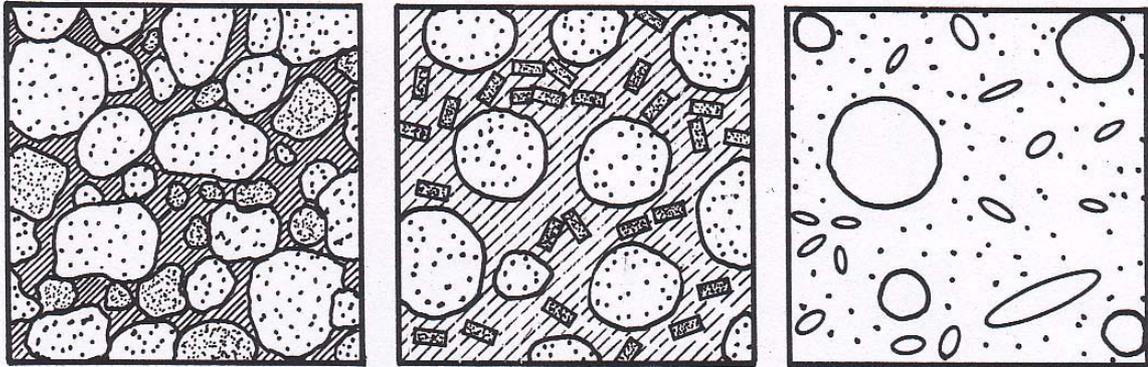


Figura 1: Esquemas de micro-estructuras. (a) Dos elementos en una matriz; (b) Dos elementos en una matriz; (c) Porosidades en una matriz.

En la Figura 1.c se ilustra un medio continuo con micro-porosidades, micro-vacíos o micro-fisuras. En este caso particular se observan algunas tendencias, como que los tamaños de los poros circulares son mayores que los elípticos, no hay contacto entre agujeros. Pero si los vacíos son dominantes, como en el caso de estructuras de tipo celular (como una micro-estructura tipo panal de abeja), el comportamiento es totalmente diferente.

No sólo existen problemas con dos fases, sino que en algunas disciplinas, como en mecánica de suelos, son comunes los problemas de micro-estructura con tres fases: sólida, líquida y gaseosa (vacíos).

En materiales artificiales que se diseñan, como los materiales compuestos formados por fibras en una matriz, es posible lograr arreglos ordenados de micro-estructura. En esa situación aparecen arreglos rectangulares y hexagonales de fibras.

Las **propiedades** micro-mecánicas están influenciadas por las interfases entre micro-elementos, especialmente su estructura, resistencia, propiedades químicas. Por ejemplo, entre fibras y matriz de un composite hay adherencia en la superficie y puede producirse despegado generando discontinuidades de desplazamientos.

El tipo de **acciones** que se encuentran en una micro-estructura no son del tipo de fuerzas másicas, inerciales o de contorno, sino que son las mismas tensiones definidas en el continuo, o las temperaturas. Los campos locales de variables del continuo son los datos que se supone que actúan de manera uniforme sobre el micro-medio heterogéneo.

Hay diversos **fenómenos** que pueden ser de interés en la dinámica de una micro-estructura, como por ejemplo: Colapso de vacíos o porosidades; Pandeo de fibras (*fiber kinking*); Disipación termo-elástica; Plasticidad en escala micro; Endurecimiento debido a transformaciones de fase; Falla de adherencia entre matriz y micro-elementos constitutivos.

Si la micro-estructura cambia debido al proceso de deformación (u otro) del continuo, entonces se genera una dinámica y es necesaria una formulación incremental del problema. Por el contrario, si no hay cambios significativos en la micro-estructura (como en un composite en estado elástico), entonces se puede usar una formulación en términos de

tensiones y deformaciones totales.

3.2 Elemento de volumen representativo

Como se mencionó anteriormente, no es posible establecer un contorno en un medio microscópico. Para evitar este problema se recurre a una definición ad-hoc de los contornos en una micro-estructura.

El elemento de volumen representativo (*representative volume element*, o RVE, por sus siglas en inglés) es un volumen material que se define en la vecindad de un punto material y que es representativo estadísticamente de la micro-estructura local del material. El RVE debe ser representativo de las propiedades locales del continuo y debe contener o representar un número muy grande de micro-elementos. Este concepto fue introducido por Hill en 1963, y se emplea frecuentemente en muchos materiales con diferentes significados. Dicho de otra forma, RVE es la parte más pequeña del material (en su micro-estructura) que contiene todas las peculiaridades del material; por lo tanto es representativa del material en su conjunto. La definición de RVE la hace el investigador o ingeniero, es una decisión acerca de cuales son los elementos micro que van a influenciar en las propiedades macro. Hay que encontrar un balance entre la complejidad de la micro-estructura y la intención de lograr un modelo simple. Por ello es necesario contar con observaciones, resultados experimentales y análisis.

El RVE puede conceptualizarse como un volumen que es lo suficientemente pequeño desde el punto de vista macroscópico, tal que pueda ser tratado como un punto típico del continuo. Por otra parte, debe ser lo suficientemente grande desde el punto de vista microscópico como para contener un número grande de inhomogeneidades, de manera que sea representativo de la micro-estructura del material.

Cuando el material tiene un ordenamiento regular periódico en su micro-estructura, porque se lo diseña y construye así, se pueden definir unidades menores al RVE que se denomina **celdas unitarias** de formas que son rectangulares, circulares, paralelepípedos o hexagonales. Se dice que un material es periódico si se lo puede representar mediante una celda unitaria. Se dice que es cuasi-periódico si tiene un ordenamiento periódico pero también presenta defectos. La celda contiene el mínimo de información que se repite periódicamente en la micro-estructura, y sirve para explicar el comportamiento del RVE. Estas celdas usan las simetrías existentes en la micro-estructura a fin de reducir el dominio que se considera representativo. La definición de estas celdas depende del problema que se considere.

Interesa si hay posibilidad que se pierda la simetría debido al fenómeno que se estudia en la micro-estructura. Por ejemplo, en pandeo por bifurcación de las paredes de una micro-estructura celular hay pérdida de simetría geométrica.

En resumen, el RVE se usa para estimar las propiedades del continuo en un punto material en términos de las propiedades de los micro-elementos que constituyen la micro-estructura. Con esto se pueden definir ecuaciones constitutivas.

Homogeneización es el procedimiento por el cual las propiedades microscópicas heterogéneas se relacionan con propiedades homogéneas. Las propiedades heterogéneas se suavizan y distribuyen, y se establece una relación de equivalencia. Se establece un promedio de la respuesta del material sobre un volumen, el RVE. La técnica de homogeneización

comenzó con Sánchez Palencia en los 70. La técnica se basa en el comportamiento asintótico de heterogeneidades finas en composites que tienen una micro-estructura que es periódica o casi-periódica.

4 ALGUNOS PROBLEMAS FISICOS DE MICRO-ESTRUCTURAS

4.1 Micro-estructuras no evolutivas

En muchos problemas, bajo determinadas condiciones, puede considerarse que la micro-estructura del material no sufre modificaciones significativas durante el proceso de evolución de la macro-mecánica.

Materiales compuestos.^{1, 4} Los materiales compuestos se forman típicamente por fibras resistentes en una matriz aglutinante. En el nivel de materiales constituyentes se pueden distinguir entre las fibras, la matriz y la interfase entre ambos. El enfoque más sencillo es la teoría clásica del laminado, en el cual la micromecánica permanece fija.

Materiales porosos y celulares.⁸ La micro-estructura de algunos materiales naturales (como la madera) y artificiales (como espumas) está formada por panales que surgen de arreglos de celdas. La madera blanda tiene celdas de forma hexagonal, cuyas propiedades se modifican de acuerdo a la edad de los anillos de crecimiento. La resistencia de esos materiales bajo compresión en el plano de los panales depende de la estabilidad de las paredes de las celdas constitutivas, de manera que el pandeo elástico o elasto-plástico de las celdas produce un límite en la capacidad portante del conjunto.

4.2 Evolución por procesos de formación de micro-estructuras

Solidificación de aleaciones. En el problema de solidificación se comienza con un líquido y a medida que evoluciona la temperatura el material se solidifica, formando una micro-estructura que a la vez genera propiedades macro-estructurales. En particular se trata de predecir el desarrollo de la micro-estructura en función de la temperatura en cada punto, y la influencia de la liberación de calor latente de los granos sobre la historia térmica²⁰. Gandin y Rappaz⁷ han acoplado una discretización de elementos finitos con autómatas celulares a fin de predecir las estructuras dendríticas de granos en procesos de solidificación. Anteriormente esos autores habían supuesto un campo térmico uniforme que actúa en el nivel macro (la pieza colada) para predecir tasas de enfriamiento y composición de la estructura final del grano. En el trabajo de 1994 se contemplan situaciones de temperatura no uniforme y la influencia del calor latente liberado por los granos.

Aumento de resistencia por transformación de fase. Los materiales cerámicos tienen propiedades muy ventajosas a altas temperaturas, pero tienen escasa resistencia a fractura. Hay transformaciones que aumentan la resistencia de cerámicos en las que se lo refuerza con partículas muy pequeñas (como Zirconio) que cuando se las somete a un estado de tensiones determinado se produce una transformación de dilatación. Esa expansión del volumen hace que se tiendan a cerrar las micro-fisuras. Estas partículas obedecen a relaciones entre la tensión media y la dilatación volumétrica que son aproximadamente tri-lineales. Para un valor

crítico de la tensión media se produce un salto en la dilatación volumétrica. Se supone que la zona transformada en la vecindad del extremo de fisura es pequeña comparada con el largo de la fisura (esto es similar a lo que se supone en mecánica de fractura no lineal).

4.3 Evolución debida al daño

Micro-mecánica de defectos y porosidades. Los problemas más comunes de micro-mecánica de defectos son la aparición de inclusiones, inhomogeneidades, micro-fisuras, porosidades y vacíos ¹⁸.

Las **inclusiones** son frecuentes en la mayoría de los materiales que se usan en ingeniería, tales como compuestos, aleaciones que se forman por transformaciones o por precipitados, hormigón, materiales porosos y otros. Si la inclusión es rígida, sobre su contorno se verifican condiciones de desplazamiento nulo (en los agujeros se verifican tensiones nulas). Las inclusiones producen concentraciones de esfuerzos en la matriz y afectan las propiedades mecánicas y térmicas a nivel macro. Soluciones analíticas para una inclusión en estado plano de tensiones y de deformaciones se han obtenido para una inclusión circular en una matriz elástica o elasto-plástica, suponiendo adherencia perfecta entre la inclusión y la matriz.

Otro defecto frecuente es la aparición de **porosidades y micro-fisuras** en rocas, cerámicos, metálicos y otros materiales. Muchos fenómenos macro no lineales en materiales frágiles se deben a la iniciación, crecimiento, interacción y coalescencia de vacíos y micro-fisuras. Esos defectos sufren cambios que evolucionan durante una cierta historia de carga en el nivel macro-mecánico.

Horii y Nemat-Nasser ¹⁹ presentaron un método que denominaron de "pseudo-tracciones" para tratar interacciones de agujeros o fisuras en un estado plano. Para ello se requiere la solución de problemas que contengan un defecto por vez en un medio infinito. Se plantea la solución mediante un sistema de ecuaciones integrales que se reducen a un sistema algebraico mediante discretización del contorno del defecto. Para poros o agujeros circulares en un dominio bidimensional la solución es más simple y se complica en poros de forma elíptica. Tsukrov y Kachanov ²³ emplearon un algoritmo alternador para la interacción de poros usando la solución analítica de un poro cada vez. Este es el primer trabajo que se interesa por la importancia de la micro-mecánica para predecir posibles formaciones de defectos que tendrían impacto en la macro-mecánica. Los autores consideran la interacción de un agujero elíptico grande con otros pequeños y encuentran los mecanismos de magnificación de esfuerzos junto a los agujeros pequeños, y de ocultamiento de unos agujeros por otros. El algoritmo alternador para múltiples agujeros circulares fue empleado por Monroy y Godoy ¹⁶.

La filosofía de los estudios de micro-mecánica (o aplicables a ella) mencionados en esta sección están basados en superposición de soluciones, cada una de las cuales considera un solo defecto y esto es posible sólo en problemas lineales. En ninguno de los estudios anteriores se acopla la micro-estructura a un análisis de macro-mecánica de sólidos.

Micro-pandeo de fibras y materiales de celdas. ^{3, 22} *Fiber kinking* es una forma de inestabilidad del material de las fibras que están alineadas, debido a fuerzas axiales. Se cree que la resistencia a compresión de los composite está dada por la resistencia a pandeo de las fibras. Como el diámetro de las fibras puede ser de 6 micrones, entonces se conoce como

micro-pandeo.

La inestabilidad elástica linealizada no modela los fenómenos característicos que ocurren en pandeo de fibras en composite. El fenómeno está controlado por dos efectos: (a) La no linealidad en corte puro (que produce inestabilidad asociada a la respuesta no lineal del material). En algunos trabajos se supone plasticidad perfecta en corte puro. (b) Sensibilidad ante la falta de alineación de las fibras. Al parecer, las desviaciones locales de alineamiento de las fibras (debidas a inclusiones, defectos, espaciamiento irregular de las fibras) inducen patrones de falta de alineamiento angular que se acomodan en dominios inclinados. La consecuencia es que los ángulos de *kink* que se observan son del orden de 35° , no de ángulos pequeños.

Micro-plasticidad. Las teorías convencionales de plasticidad que se emplean en el nivel macro no tienen ninguna escala de longitud en sus relaciones constitutivas. Pero en la escala del micrón (que va desde fracciones de micrón hasta decenas de micrones) se ha encontrado que los metales tienen una fuerte dependencia en sus relaciones constitutivas, de modo que se comportan con mayor resistencia a medida que se reduce la escala. Existe evidencia experimental de esto en filamentos de cobre y de tungsteno, y en películas delgadas.

La escala de micrón a que se hace referencia es mayor que la que se necesita para representar la mecánica de dislocaciones, que interesa para poder seguir la nucleación de dislocaciones. En la escala del micrón se homogeneizan las dislocaciones usando el concepto de densidad de dislocaciones. El pasaje de dislocaciones individuales a la formulación continua con densidades de dislocaciones no es sencilla y requiere formular hipótesis especulativas sobre como crece la densidad de dislocaciones.

El efecto de tamaño aparece en compuestos formados por partículas cerámicas en una matriz metálica, en los que se inicia plasticidad en la vecindad de las partículas. Para vincular la micro-fisuración con las macro-fisuras parecería necesario contar con teorías de plasticidad diferentes de las actuales, dado que las tensiones se ven modificadas por gradientes de deformaciones. También parece afectar en crecimiento de vacíos del tamaño de micrón, en cuyo caso la plasticidad convencional no parece estar justificada. Recientemente Hutchinson ha desarrollado una teoría de plasticidad continua que incorpora la dependencia del tamaño. Según Hutchinson, "la plasticidad convencional se ha empleado de manera extendida en estudios de micro-mecánica de materiales estructurales (como fractura, crecimiento de vacíos, comportamiento de compuestos en plasticidad y en modos de falla de compuestos como separación de fibras y partículas y arrancamiento). Algunas de estas aplicaciones se han hecho dentro de la escala del micrón y pueden ser sospechosas" (Hutchinson ¹¹, pp. 237).

Se cree que el colapso de vacíos y su coalescencia causan la falla dúctil de metales, tanto a temperaturas elevadas (en cuyo caso puede ocurrir además creep) o a temperaturas ambientales. También puede desempeñar un papel importante en el colapso de suelos loessicos. Este fenómeno puede producirse voluntariamente (como en compactación de polvos y partículas finas, en procesos de metalurgia).

4.4 Evolución por cumplimiento de una función

Materiales granulares. Los problemas de flujo de materiales granulares pueden

considerarse mediante la evolución de una micro-estructura (formada por los granos o partículas que interactúan a través de puntos de contacto). Se supone que las partículas discretas tienen formas geométricas sencillas, como discos de diferentes diámetros. Cada partícula individual es casi rígida, de modo que su movimiento en el plano se puede caracterizar mediante dos componentes de desplazamiento y una de rotación. La detección de contactos se lleva a cabo midiendo la distancia entre los centros y comparándola con la suma de los radios ⁶. Las partículas sólo se transfieren fuerzas a través de los puntos de contacto. Hay varios modelos de transferencia de fuerzas pero en su forma sencilla se supone que se transfieren entre sí fuerzas normales y tangenciales entre partículas. Si se supone un coeficiente de fricción, las fuerzas tangenciales resultan iguales o menores a la fricción por la fuerza normal (fricción seca de Coulomb). Otras variantes usan la teoría de Hertz. La técnica numérica general de análisis de modelos de partículas se denomina “Método de Elementos Discretos” ¹⁷, en contraposición con el MEF.

De estudios experimentales se encuentra que los contactos tienden a concentrarse en la dirección de las tensiones principales mayores, de modo que las fuerzas se transmiten en estructuras de columnas que van evolucionando.

5 MODELOS COMPUTACIONALES DE EVOLUCION DE MICRO-ESTRUCTURAS

Se señalan a continuación algunos de los modelos posibles para tratar micromecánica. Por su importancia se deberían haber incluido también algoritmos genéticos y caminantes activos ¹³, pero se los ha omitido por razones de espacio.

5.1 Formulaciones continuas de la micro-estructura

Hay problemas en los que se puede modelar la micro-mecánica usando la mecánica del continuo, aunque suele ser computacionalmente costoso. Por ejemplo, en crecimiento dendrítico ²⁶ se trata de acompañar una frontera sólido-líquido en el problema de solidificación mediante una malla de elementos finitos triangulares. El problema es muy sensible a las condiciones iniciales, y en este tipo de problema fracasan las estrategias de malla fija de elementos.

El tamaño de los elementos está controlado por la frontera, y a partir de unas pocas capas ya no interesa el tamaño de los elementos. Un análisis requiere de la solución de unas 10,000 mallas, donde cada malla tiene unos 50,000 elementos. Las estrategias posibles de adaptividad son (a) Movimiento de nudos, (b) Modificaciones locales, y (c) Remallado.

5.2 Ensamble de esferas

Hashin en 1962 propuso identificar esferas alrededor de cada esfera de un material compuesto de partículas, de modo que resultaran tangentes entre ellas con un mínimo de espacios vacíos, como se muestra en la Figura 2.a. La esfera individual contiene tanto matriz como inclusión y respeta la fracción de volumen; constituye así una celda unitaria. Técnicas similares se usan en problema de nucleación de aleaciones. Estos métodos permiten evaluar

los campos en el RVE, pero la dificultad es la compatibilidad en las uniones entre esferas.

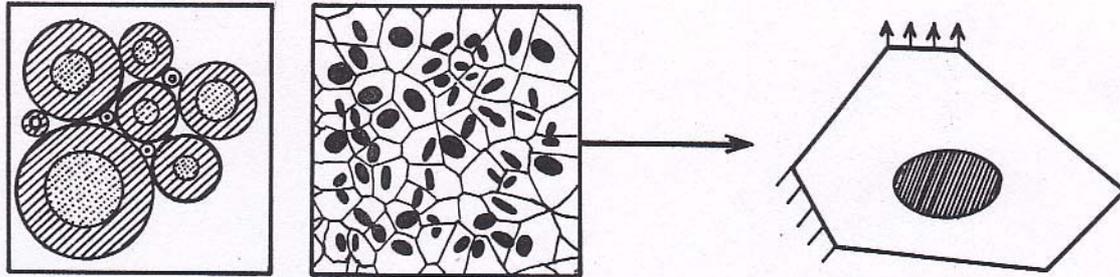


Figura 2: (a) Ensamble de esferas; (b) RVE dividido mediante elementos de Voronoi; (c) Elemento de Voronoi.

5.3 Elementos Voronoi

Una alternativa es usar elementos de Voronoi, como en la Figura 2.b y 2.c. Se lleva a cabo una partición del dominio usando polígonos convexos de varios lados. En su interior, cada elemento contiene una heterogeneidad. Para establecer la partición se toman las áreas de influencia asociadas a cada elemento: se definen los elementos que son vecinos de uno y se trazan las líneas que unen los centros; luego se particiona a la mitad. Cada elemento Voronoi puede considerarse como una celda unitaria. Pero se resuelven en una malla de elementos finitos, donde cada elemento se formula como elemento híbrido de tensiones, usando el funcional de energía potencial complementaria. La dificultad es la precisión en la determinación de los campos, dado que usan un solo elemento por heterogeneidad.

5.4 Modelos equivalentes

Algunos autores formulan modelos equivalente a la micro-estructura, en la que no se hace una representación geométrica de los micro-elementos, sino que se establece una correspondencia entre elementos diferentes. Miao, Liu y Niu ¹⁵ consideran un modelo de barras para el cual se establece una equivalencia con la micro-mecánica del loess considerando la pérdida de la capacidad resistente del suelo. El modelo intenta establecer ecuaciones constitutivas que permitan describir simultáneamente cambios en el volumen y en la deformación cortante. Se supone que los granos individuales son rígidos, que el mecanismo de colapso es un proceso físico, que el contenido de agua puede representarse mediante cambios en las propiedades de los resortes involucrados, y que la deformación de colapso está causada por el daño del mecanismo y el vacío. El modelo equivalente se estudia mediante la teoría de estabilidad y los resultados se presentan en términos de presiones en el sólido.

5.5 Modelos geométricos de crecimiento

Una manera sencilla de implementar un modelo de solidificación multi-nodular grafito-austenita sería tomar para la austenita un núcleo central y ramificaciones, como las que se muestran en la Figura 3, computada con un manipulador simbólico.

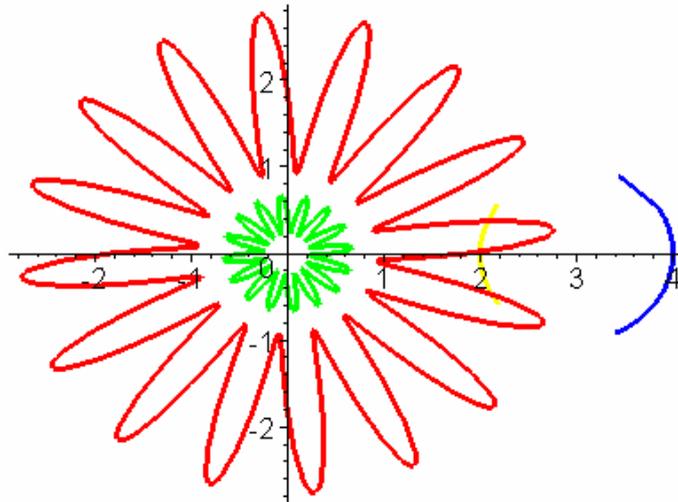


Figura 3: Modelo geométrico de crecimiento. Para computar la figura se supuso que el radio (distancia desde el centro) es $r = r_m + B \sin(n\theta)$ donde r_m es el radio medio, B es un parámetro, n es el número de ondas completas alrededor de la circunferencia. Los parámetros pueden ser dependientes del proceso, por ejemplo $r_m = r_0 + A * T$ donde A es un parámetro, r_0 el radio inicial de la austenita, T la temperatura. Suponiendo $r_0 = 0.25$, $A = -0.01$, $n = 16$, $B = 0.5r_m$ se tiene la figura verde para $T = -20$ y la roja para $T = -60$. Se puede hacer crecer la austenita en función de otras variables. De hecho, n podría ser función de T. Suponemos que el radio queda constante inicialmente (igual a 1), y para distancia entre centros de 3.

Eso muestra que para la primera temperatura los objetos estaban lejos, pero al bajar la temperatura la austenita llega hasta el grafito. La Figura 3 muestra que ya la austenita se está introduciendo dentro del espacio reservado para el núcleo de grafito, de modo que podrá computar el área de la intersección y con ella hacer crecer el radio del grafito, por ejemplo de manera uniforme (que siga siendo un círculo). Se podrían poner varios núcleos de grafito en la figura y a diferentes distancias del centro de la austenita, y hacerlo con varios granos que se van formando simultáneamente. Ese quizás sería un RVE del problema (una austenita y varios grafitos).

5.6 Algoritmo alternador (Monroy y Godoy ¹⁶)

El algoritmo alternador se conoce como algoritmo de Newman-Schwartz, con retroalimentación de tensiones. Este algoritmo permite estudiar la interacción de varios objetos de una micro-estructura mediante la superposición de problemas más sencillos que incluyen un objeto cada vez.

Para ilustrar el algoritmo consideremos sólo dos agujeros elípticos en un medio sometido a esfuerzos. El problema se descompone primero en el medio sin defectos. Luego se toma un solo agujero y se calculan los esfuerzos necesarios para cancelar los producidos en el primer estado. De esta manera se satisfacen las condiciones en el borde libre del agujero. Pero esto genera esfuerzos en la zona del contorno del segundo agujero, que no deberían existir.

Entonces se aplican esfuerzos en el contorno del segundo agujero para satisfacer su borde libre. Esa corrección afecta el primer agujero. De este modo, se implementa un esquema iterativo que requiere de sucesivas correcciones hasta que se hacen despreciables los efectos que se transportan entre agujeros.

El algoritmo requiere poder aplicar una fuerza sobre el dominio; la solución de ese problema se denomina solución fundamental. El uso de la solución fundamental hace que esta técnica sea muy cercana a un método de contorno.

La simplicidad de este procedimiento está asociada a que hay una clara condición (de borde libre, con tensiones nulas sobre un contorno interno) que se puede forzar. El algoritmo puede extenderse a objetos micro-estructurales que tengan desplazamientos cero en el contorno de la heterogeneidad, como inclusiones elásticas.

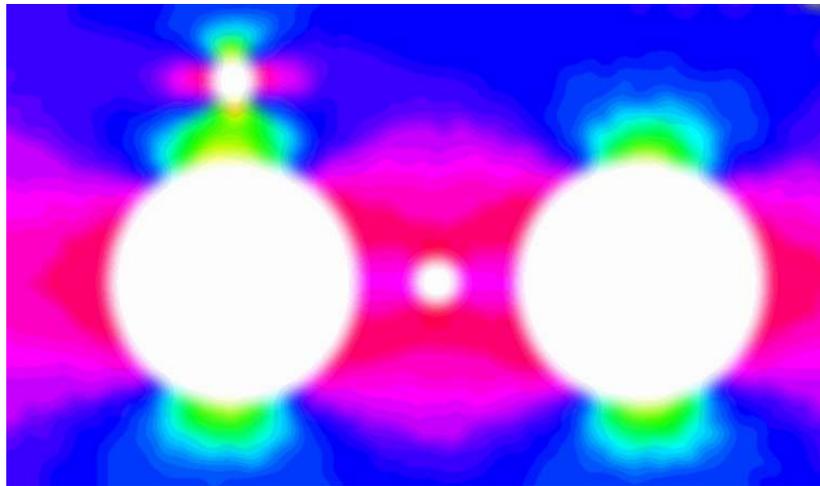


Figura 4. Micromecánica con varios poros, resuelta mediante el algoritmo alternador de la Referencia 16.

5.7 Autómatas celulares

En los autómatas celulares se representa el dominio micro estudiado mediante una cuadrícula de celdas de tamaño regular, que almacena información y reglas de operación sobre la información. En su forma más simple, cada **celda** puede tener una variable y dos estados de la misma (por ejemplo, vacía o llena de material). Por ejemplo, en modelos de porosidad de materiales, una celda puede estar vacía, indicando que no contiene material, o llena, indicando que el continuo se extiende por esa celda. También puede haber variables que se definen en escalas continuas o discretas. Interesa averiguar la evolución de cada celda en el tiempo, por ejemplo formando patrones de micro-poros y micro-fisuras ¹⁴.

Una celda es del tamaño de las medidas de longitud de la micro-estructura que se quieren representar. En modelos de evolución de daño las celdas deben ser adecuadas para modelar longitudes en el mecanismo de daño que se estudia ¹⁴. En solidificación de aleaciones, una celda típica tiene el tamaño de las ramas secundarias de la dendrita.

La evolución está sujeta a una serie de **reglas** sencillas que permiten tomar decisiones en

cada intervalo de tiempo. Las reglas que gobiernan el proceso en el nivel micro representado por autómatas celulares en general involucran una celda y sus ocho vecinas en dos dimensiones. En modelos de solidificación hay reglas de nucleación y de crecimiento de granos, que se ejecutan en el nivel de cada celda. El problema contempla el crecimiento dendrítico a medida que se solidifica una aleación, formándose estructuras columnares. Las reglas son similares a las de un modelo de diferencias finitas, y como tal este algoritmo tiene sus raíces en los métodos iterativos de solución de ecuaciones diferenciales por relajación desarrollados por Southwell en 1946.

Las celdas se extienden sobre un elemento representativo de volumen (RVE) que es el tamaño del tablero sobre el cual se estudia la **evolución** de la micro-estructura. El RVE debe tener un tamaño tal que capture la evolución del fenómeno que ocurre en el nivel micro: puede ser la evolución del daño en un material, el crecimiento de micro-poros, la solidificación en dendritas, etc. El RVE puede modificarse en el tiempo: por ejemplo, extenderse debido a una dilatación del material ¹⁴; o mantenerse ocupando el mismo espacio durante el proceso estudiado ⁷. La evolución en el modelo de autómatas celulares hace que los casilleros almacenen información y se desarrollen patrones de respuesta.

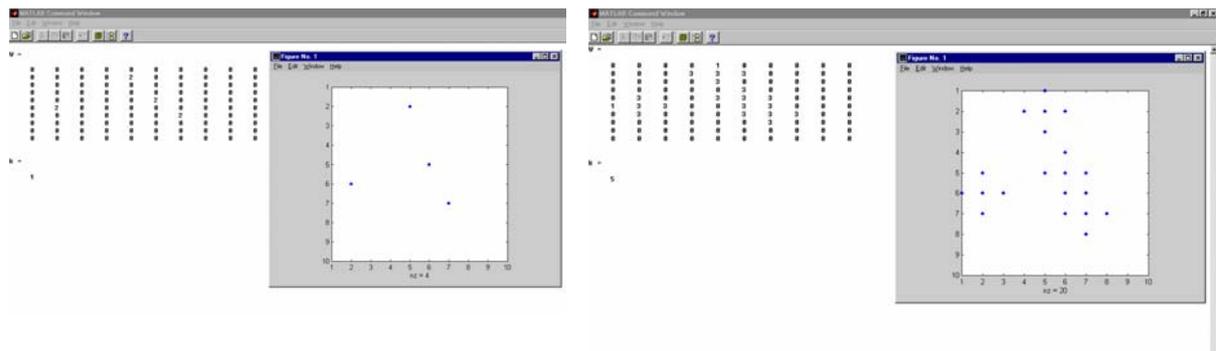


Figura 5. Modelo simple de autómata celular que considera nucleación y crecimiento de granos durante solidificación. (a) Estado inicial; (b) Estado final.

6 ESQUEMAS DE ACOPLAMIENTO MICRO-MACRO

En el continuo hay una escala macro, dentro de la cual tiene sentido hablar de elemento infinitesimal en la vecindad de un punto material. En la micro-estructura hay una escala micro, en la cual tiene sentido hablar de tamaño de los elementos constituyentes, por ejemplo fibras de 6 micrones de diámetro o polvos de 1 micrón de diámetro. Para establecer la micro-escala se considera cuáles son los elementos que se supone que tienen una influencia directa, de primer orden, sobre las propiedades del continuo. Pero esta relación de escalas depende de qué es lo que se quiere describir.

No todos los detalles de la micro-mecánica se toman en cuenta para el nivel macro-mecánico. En particular, sólo algunas variables se comparten en ambos niveles y se definen como variables de acoplamiento. Típicamente estas variables pueden ser las tensiones, la temperatura, velocidades, presiones, composición del material, propiedades, módulos. Debido a la presencia de heterogeneidades, en una micro-estructura los campos de las variables

presentan fluctuaciones con gradientes altos, típicos de problemas de concentración de esfuerzos.

Modelos micro en escala macro. En problemas de modelado del flujo de materiales granulares se ha intentado modelar cada grano individualmente en el dominio macro. Sin embargo, por el momento sólo se logran solucionar problemas de muy pequeñas dimensiones, dado que se mezclan las dos escalas en un mismo modelo.

Esquema local-global. Acoplamiento en elementos finitos a través de puntos de integración de Gauss. Como es reconocido, en el método de elementos finitos el continuo se divide en elementos macroscópicos y en cada uno de ellos se supone que las variables de interés se comportan como funciones suaves que pueden aproximarse mediante polinomios de bajo orden. Como se ilustra en la Figura 6, en cada elemento se consideran nodos, y para llevar a cabo las integraciones necesarias se emplean puntos de integración de Gauss. De esta forma las propiedades del continuo sólo se emplean en los puntos de integración. De modo que, si bien las propiedades de un punto de integración se consideran representativas de un entorno finito de ese punto, las propiedades mismas se derivan de consideraciones de tipo diferencial.

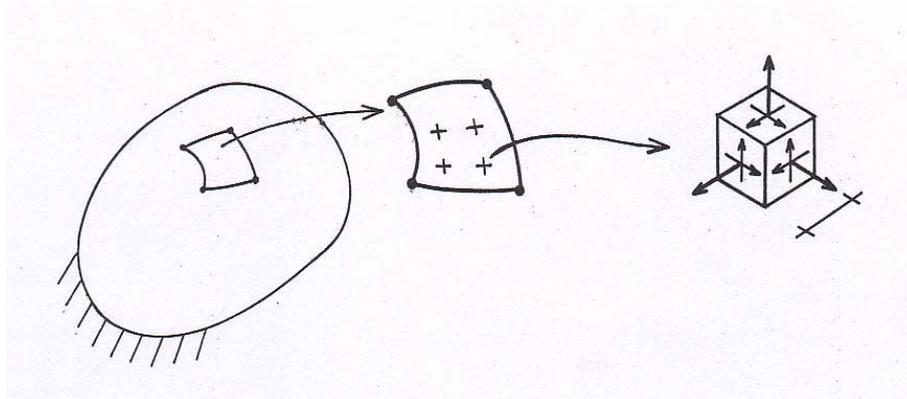


Figura 6. Acoplamiento a través de puntos de Gauss en cada elemento.

Método de los Promedios (Suquet ²¹, Zalamea ²⁵). Se establecen ecuaciones de comportamiento macro usando un promedio de las variables micro. Supongamos que \mathbf{x} son coordenadas en escala macro (M) y que en la escala micro (m) las coordenadas son \mathbf{y} . Si $V = \text{RVE}$, entonces se puede definir

$$\sigma^M(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_V \sigma^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV \quad \varepsilon^M(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV \quad (1)$$

En el nivel micro se establecen ecuaciones constitutivas

$$\sigma_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varepsilon_{kl}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2)$$

Reemplazando la (2) en la (1) se obtiene

$$\sigma_{ij}^M(x) = \frac{1}{V} \int_V C_{ijkl}(x, y) \varepsilon_{kl}^m(x, y) dV \quad (3)$$

Se supone que la deformación micro es función lineal de la macro, mediante una transformación lineal que permite calcular la deformación micro usando el tensor de concentración de deformaciones o tensor de influencia:

$$\varepsilon_{ij}^m = d_{ijkl} \varepsilon_{kl}^M \quad (4)$$

Reemplazando en la (3) se obtiene

$$\sigma_{ij}^M(x) = \frac{1}{V} \int_V C_{ijkl}(x, y) d_{klmn} \varepsilon_{mn}^M dV \quad (5)$$

Podemos sacar fuera de la integral a la deformación macro, que ya existe en promedio. Queda así:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^M(x) &= \varepsilon_{mn}^M \left(\frac{1}{V} \int_V C_{ijkl}(x, y) d_{klmn} dV \right) \\ \sigma_{ij}^M(x) &= C_{ijmn}^M \varepsilon_{mn}^M \\ C_{ijmn}^M &= \left(\frac{1}{V} \int_V C_{ijkl}(x, y) d_{klmn} dV \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Esta es la ecuación constitutiva en el nivel macro, obtenida a partir de variables y relaciones micro. El tensor constitutivo promedio del medio continuo es un promedio de la ley micro ponderado por un tensor de influencia.

También se puede formular el problema a través de tensiones, y resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^M(x) &= D_{ijkl} \sigma_{kl}^M(x) \\ D_{ijkl} &= \left(\frac{1}{V} \int_V D_{ijkl}(x, y) c_{klmn} dV \right) \end{aligned} \quad (7)$$

donde c_{klmn} es el tensor de concentración de tensiones.

Micro-estructuras formadas por granos en contacto. A nivel de partícula se define el tensor de tensiones promedio de todas las fuerzas que actúan en los contactos. Si en el

contacto c se tiene f_n^c y f_t^c y las direcciones normales y tangenciales en ese contacto son n^c y t^c , entonces

$$\sigma_{ij}^p = \frac{1}{\pi R^p} \sum_c [f_n^c n_i^c n_j^c + \frac{1}{2} f_t^c (n_i^c t_j^c + t_i^c n_j^c)] \quad (8)$$

donde R^p es el radio del disco p (Kruyt ¹²). La distribución de puntos de contacto para una partícula no permanece constante, sino que se modifica debido a la deformación del medio macro.

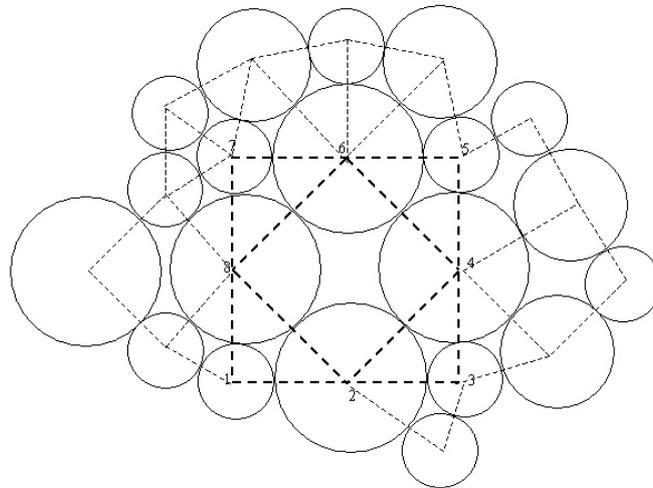


Figura 7. Arreglo arbitrario bidimensional de partículas, con identificación de un subconjunto de ellas.

Un resumen del algoritmo de cálculo es como sigue:

Subrutina UMAT. Paso de cálculo i .

Datos disponibles:

- Deformaciones acumuladas hasta el incremento i . Tensor ϵ_{ij} .
- Salto de deformaciones en el paso i . Tensor $\Delta\epsilon_{ij}$.

Datos calculados en la subrutina:

- Salto de tensiones en el paso i . Tensor $\Delta\sigma_{ij}$.
- Tensor de tensiones acumulado hasta el paso i . Tensor σ_{ij} .

Secuencia de cálculo:

Start Micromecánica

-
- Transformación de deformaciones (tensor ϵ_{ij}) en desplazamientos.
 - Aplicación de desplazamientos prefijados en los nudos del reticulado ideal.
 - Resolución del reticulado ideal representando la micromecánica. (obtención de esfuerzos en las barras componentes)

- Promedio de esfuerzos en el reticulado ideal para obtener el tensor de tensiones promedio. (tensor $\Delta\sigma_{ij}$).
- Actualización del tensor de tensiones acumulado. ($\sigma_{ij}^i = \Delta\sigma_{ij}^i + \sigma_{ij}^{i-1}$) en el punto de Gauss considerado.

End Micromecánica.

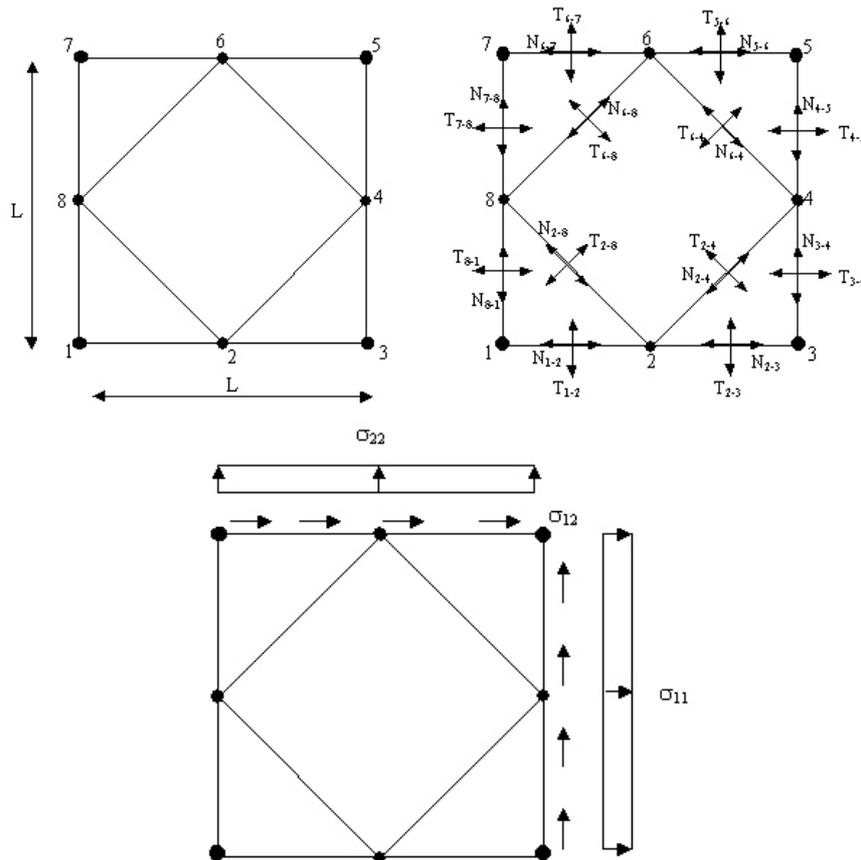


Figura 8. (a) Esquema idealizado de distribución de fuerzas a través de los contactos inter-partícula, aislando el esquema de la Figura 7. (b) Esfuerzos presentes en los contactos intergranulares (considerando $T_{i-j} = \mu N_{i-j}$, donde μ es un coeficiente de fricción de tipo Coulomb). (c) Tensiones resultantes como esfuerzos promedio dentro de un punto de integración.

Método de la expansión asintótica. Este método, desarrollado por Sánchez-Palencia en 1980, descompone el problema en escalas de orden diferente. La relación entre escalas macro y micro es

$$y = \frac{x}{\xi} \tag{9}$$

donde ξ es un parámetro pequeño, que representa la diferencia de longitud de onda entre las

dos escalas. El campo de desplazamientos se descompone mediante perturbaciones en la suma de una parte uniforme más una parte periódica:

$$u^\xi = u^0(x, y) + \xi u^1(x, y) + \xi^2 u^2(x, y) + \dots \quad (10)$$

Las funciones u^0 , u^1 , u^2 están asociadas a diferentes órdenes de magnitud. Se admite que las funciones cambian lentamente en cada escala.

7 CONCLUSIONES

Este trabajo ha presentado un punto de inicio al campo de acoplamiento entre problemas de micro y macro mecánica. Si bien una gran parte de problemas en la mecánica computacional se representan en la actualidad mediante elementos finitos, en la escala micro hay una enorme variedad de enfoques que coexisten. Esta diversidad está fuertemente ligada al problema o tipo de problema y varía según los objetos y procesos que se elijan representar en la micromecánica.

Por su generalidad, es posible que los algoritmos de autómatas celulares y las formulaciones continuas de micromecánica sean los más usados en el futuro. Ambos pueden acoplarse con mayor o menor dificultad con programas de elementos finitos para propósitos múltiples.

8 AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo brindado a este trabajo por la Agencia Córdoba Ciencia y por CONICET, a través de subsidios. Los estudiantes graduados M. Ruiz, P. Dardati, H. Monroy, G. Cervetto, P. Paguagua han contribuido a través de discusiones y resultados sobre esta temática.

9 REFERENCIAS

- [1] Arnold, S. M. y Castelli, M. G. (1994). Continuum based theoretical and experimental studies in deformation and damage of MMCs at NASA-Lewis: Progress and trends, *Composites Engineering*, vol. 4(8), pp. 811-828.
- [2] Axelrad, D. R., Muschik, W. Eds. (1991). *Recent Developments in Micromechanics*, Springer-Verlag, Berlin. Proc. Mechanical Engineering Forum 1990, June 3-9, 1990, University of Toronto, Canada, pp. 204.
- [3] Budiansky, B. (1983). Micromechanics, *Computers and Structures*, vol. 16(1-4), pp. 3-12.
- [4] Caiazzo, A. A. y Costanzo, F. (2001). Modeling the constitutive behavior of layered composites with evolving cracks, *Int. J. Solids and Structures*, vol. 38, pp. 3469-3485.
- [5] Cleary, P. W., Sawley, M. L. (2002). DEM modeling of industrial granular flow: 3D case studies and the effect of particle shape on hopper discharge, *Applied Mathematical Modelling*, vol. 26, pp. 89-111.
- [6] Cundall, P. A., Hart, R. D. (1992). Numerical modeling of discontinua, *Engineering Computations*, vol. 9, pp. 101-113.
- [7] Gandin, Ch. A. y Rappaz, M. (1994). A coupled finite element-cellular automaton model

- for the prediction of dendritic grain structures in solidification processes, *Acta Metall. Mater.*, vol. 42(7), pp. 2233-2246.
- [8] Gibson, L. J. y Ashby, M. F. (1997). *Cellular Solids: Structure and Properties*, second edition, Cambridge University Press.
- [9] Gosh, S., Ostoja-Starzewski, M. Eds. (1995). *Computational Methods in Micromechanics*, AMD-vol. 212, MD-vol. 62, ASME Press, New York.
- [10] Harkov, K., Preziosi, L. Ed. (2000). *Heterogeneous Media : Micromechanics Modeling, Methods and Simulations*, Birkhauser, Boston. Contains five review chapters, pp. 477.
- [11] Hutchinson, J. W. (2000). Plasticity at the micron scale, *Int. J. Solids and Structures*, vol. 37, pp. 225-238.
- [12] Kruyt, N. P. (1992). Towards micro-mechanical constitutive relations for granular materials based on two dimensional discrete element simulation, en Proceedings of the Conference on *Modern Approaches to Plasticity*, Morton, Grecia.
- [13] Lam, L. (1997). Active walks: Pattern formation, self organization and complex systems, Chapter 15 in L. Lam Editor, *Introduction to Nonlinear Physics*, Springer Verlag, New York.
- [14] Matic, P. y Geltmacher, A. B. (2001). A cellular automaton-based technique for modeling mososcale damage evolution, *Computational Material Science*, vol. 20, pp. 120-141.
- [15] Miao T., Liu, Z., Niu Y. (2002). Unified catastrophic model for collapsible loess, *ASCE J. Engineering Mechanics*, 128(5), pp. 595-598.
- [16] Monroy, H. A. y Godoy, L. A. (2002). Interacción de objetos en micro-mecánica mediante un algoritmo alternador. *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas*, Caracas, Venezuela.
- [17] Mustoe, G. G. W. (1992). A generalized formulation of the discrete element method, *Engineering Computations*, vol. 9, pp. 181-190.
- [18] Mura, T. (1987). *Micromechanics of Defects in Solids*, Second edition, Martinus Nijhoff, Dordrecht.
- [19] Nemat-Nasser, S., Hori, M. (1999). *Micromechanics : Overall Properties of Heterogeneous Materials*, 2nd. Edition, North-Holland, Amsterdam.
- [20] Stefanescu, D. M. (1995). Methodologies for modeling of solidification microstructure and their capabilities, *ISIJ Int.*, vol. 35(6), pp. 637-650.
- [21] Suquet, P. (1997). *Continuum Micromechanics*, Springer-Verlag, New York. CISM courses and lectures 377. Six seminars at the CISM in Italy.
- [22] Tomblin, J., Barbero, E. J., Godoy, L. A. (1997). Imperfection sensitivity of fiber micro-buckling in elastic nonlinear polymer-matrix composites, *Int. J. Solids and Structures*, vol. 34(13), pp. 1667-1679.
- [23] Tsukrov, I. y Kachanov, M. (1997). Stress concentrations and microfracturing patterns in a brittle-elastic solid with interacting pores of diverse shapes, *Int. J. Solids and Structures*, 34(22), pp. 2887-2904.
- [24] Weng, G. J., Taya, M., Abe, H. (1990). *Micromechanics and Inhomogeneity*. Springer Verlag, New Cork. The Toshio Mura 65 anniversary volume, pp. 632, contains 37 papers.

- [25] Zalamea, J. F. (2000). *Tratamiento Numérico de Materiales Compuestos Mediante la Teoría de Homogeneización*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona.
- [26] Zhao, P., Heinrich, J. C., Vénere, M. (2001). Adaptatividad en problemas de solidificación, Presentado en *Congreso de Métodos Numéricos y Aplicaciones*, ENIEF 2001, Córdoba, Argentina.