

## PROBLEMA TEST PARA LA CONTRASTACION DE ESQUEMAS NUMERICOS 1D ADECUADOS A LA DESCRIPCION DE FLUJOS GASEOSOS TRANSITORIOS EN TUBERÍAS INCORPORANDO TECNICAS DE CAPTURA DE CHOQUES

Jorge Toth<sup>\*</sup>, Ezequiel López<sup>\*</sup> y Norberto Nigro<sup>†</sup>

<sup>\*</sup> Departamento de Mecánica Aplicada  
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue  
Buenos Aires 1400, 8300 Neuquén, Argentina  
e-mail: jtoth@uncoma.edu.ar, e-mail: ezequiellopez@hotmail.com

<sup>†</sup> Grupo de Tecnología Mecánica del INTEC  
Universidad Nacional del Litoral, CONICET  
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina  
e-mail: nnigro@intec.unl.edu.ar, web page: <http://venus.ceride.gov.ar/cimec>

**Key words:** Flujo en ductos, Dinámica de gases, Euler 1D, Choque no estacionario, Método de las Características.

**Resumen.** *Una alternativa usual de la modelación 1D de flujos gaseosos en tuberías lo constituye el Método de las Características, tanto en sus versiones directas (uno, dos o más niveles de tiempo), como en las derivaciones del método según esquemas en Diferencias Finitas, también explícitos. Entre dichos esquemas, algunos son aptos para capturar choques y discontinuidades de contacto y suelen ser contrastados chequeando los resultados numéricos del problema de Riemann con la correspondiente solución exacta. Este trabajo, también concebido con fines de contrastación, halla la solución exacta del flujo adiabático e invíscido de un gas ideal contenido en un conducto semiinfinito; asumiendo provocada la corriente por el desplazamiento de un émbolo desde el reposo. La ley cinemática de éste fue resuelta en forma analítica, con la consigna de establecer, en un tramo del conducto, cierta distribución lineal de la velocidad del fluido. En consecuencia, fueron exactamente determinados el instante y la posición de la formación de un choque de amplitud finita y, asociados a éste, un abanico de expansión y una discontinuidad de contacto. Asimismo, se hallan las soluciones analíticas que, dentro de un intervalo acotado del tiempo, describen completamente el campo de flujo. Finalmente, corroborando la validez del código computacional empleado, fue comprobada la utilidad del test propuesto comparando las soluciones exactas con los respectivos resultados numéricos.*

## 1 INTRODUCCION

El presente trabajo está contextualizado en el proyecto Motor Rotativo de Combustión a Volumen Constante, el cual incluye el desarrollo de un compresor volumétrico no valvulado y de un motor de encendido chispa. El proyecto contempla además del uso de software para simular motores de combustión interna, una efectiva participación en la generación de algunos códigos computacionales; contribuyendo por una parte a facilitar la tarea del motorista y, por otra, a proveer material didáctico adecuado a la enseñanza de las Máquinas Térmicas.

El pronóstico de potencias y performances de motores exige conocer el comportamiento del flujo impermanente de los gases que escurren por los conductos de admisión y escape. Actualmente, la modelación numérica 1D provee una descripción aceptable del flujo en esos conductos<sup>1,4</sup>. La física del problema se aproxima mediante las ecuaciones de Euler del flujo invíscido *cuasi*-unidimensional. La resolución numérica de estas ecuaciones puede acometerse empleando el Método de las Características<sup>1</sup>, tanto en sus versiones directas como en sus variantes explícitas en Diferencias Finitas<sup>3</sup>.

Frecuentemente, en los flujos de gases aparecen discontinuidades tales como ondas de choque y discontinuidades de contacto; demandando el diseño de códigos capaces de detectar la formación de cada discontinuidad y estudiar su progreso ulterior. Es de estilo contrastar estos programas chequeando los resultados numéricos del problema de Riemann con la solución exacta correspondiente. Justamente, el principal objetivo de este trabajo es establecer otra referencia de contrastación; deduciéndose la condición de borde y la consecuente solución analítica de un flujo compresible transiente 1D, caracterizado por la formación de un choque, donde y cuando surge una discontinuidad en la distribución de la velocidad. Asimismo, en esa posición e implicados simultáneamente por aquel, son generados un abanico de expansión y una discontinuidad de contacto. Por supuesto, relativo a la existencia de estas discontinuidades, la situación exhibe similitudes con el clásico test de Riemann; sin embargo, no vale inferirla a partir del último; simplemente, en razón de las diferentes condiciones de movimiento del gas al desencadenarse el choque.

Para el problema de Riemann están disponibles las soluciones exactas del campo de flujo en cualquier instante. En cambio, en este trabajo son encontradas las soluciones analíticas que, dentro de un lapso temporal acotado, obedece el flujo del gas contenido en un conducto semiinfinito, asumiendo provocada la corriente por el desplazamiento positivo de un émbolo desde el reposo. La cota temporal superior para la validez de las referidas soluciones exactas queda definida por el inicio de la interacción entre el abanico y el émbolo; siendo inexistente una solución exacta capaz de dar cuenta de dicha reflexión<sup>1</sup>. Empero, haciendo tender el tiempo al infinito, el test propuesto vuelve nuevamente asequibles en forma analítica el salto entrópico debido al choque, la velocidad de éste, las propiedades termodinámicas del gas sobre los flancos de la discontinuidad de contacto y su propia celeridad. Por tanto, se comprueba que sendos tests, el de Riemann y el propuesto, resultan de utilidad complementaria a fin de validar códigos computacionales 1D capaces de capturar ondas de choque, discontinuidades de contacto y / o de gradiente. Particularmente, valiéndose de las dos comprobaciones, el trabajo muestra la validez de un código, basado en Método de las Características, para resolver patrones fluidodinámicos con discontinuidades.

## 2 RESOLUCIÓN DEL FLUJO UNIDIMENSIONAL HOMENTRÓPICO

Una de las formulaciones alternativas en derivadas parciales del flujo compresible invíscido *cuasi*-unidimensional y adiabático puede escribirse del siguiente modo<sup>1, 2, 3</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + \delta a \frac{\partial u}{\partial x} = -\delta \frac{a u}{F} \frac{dF}{dx} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{\delta} \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1);$$

donde  $a$  y  $u$  representan, respectivamente, las velocidades sónica y del fluido;  $F$  la sección y, para la relación de calores específicos  $k = c_p / c_v$ ,  $\delta = (k - 1) / 2$ .

El sistema (1) describe el escurrimiento sin fricción ni intercambio de calor de un gas ideal en un conducto horizontal recto; o sea, simplificando para esa situación topográfica, la formulación corresponde al caso isoentrópico a través de todo el campo del flujo o, sintéticamente, al flujo homentrópico.

Asumimos la existencia de direcciones en el plano  $xt$  dadas por  $dx / dt = f_{(x)}$  sobre las cuales el sistema (1) queda reducido a otro en derivadas totales. Es decir, suponemos trayectorias y derivadas direccionales asociadas de las variables dependientes  $a$  y  $u$ , que permiten expresar cada una de aquellas derivadas parciales en términos de la otra y de la respectiva derivada direccional; por ejemplo, como es inmediato probar, valen las equivalencias siguientes:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{du}{dt} \right)_C - f_{(x)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial a}{\partial t} = \left( \frac{da}{dt} \right)_C - f_{(x)} \left( \frac{\partial a}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (2);$$

en las cuales el subíndice  $C$  especifica la derivada direccional.

Luego, una combinación lineal adecuada de las ecuaciones (1), sustituyéndolas por (2) y mediante la elección correcta de la direcciones características, habilita la eliminación de todas las derivadas parciales; resultando:

$$\begin{cases} \left( \frac{da}{dt} \right)_{C_1} + \delta \left( \frac{du}{dt} \right)_{C_1} = -\delta \frac{a u}{F} \left( \frac{dF}{dx} \right) \\ \left( \frac{da}{dt} \right)_{C_2} - \delta \left( \frac{du}{dt} \right)_{C_2} = -\delta \frac{a u}{F} \left( \frac{dF}{dx} \right) \end{cases} \quad (3);$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  representan las direcciones características según:  $C_1: dx / dt = u + a$  y  $C_2: dx / dt = u - a$ .

Multiplicando las ecuaciones del sistema (3) por  $dt$ , dividiéndolas por  $\delta$  y agrupando se obtiene la formulación diferencial:

$$\begin{cases} \left[ d\left(\frac{a}{\delta} + u\right) \right]_{C_1} = -\frac{au}{F} \left(\frac{dF}{dx}\right) dt \\ \left[ d\left(\frac{a}{\delta} - u\right) \right]_{C_2} = -\frac{au}{F} \left(\frac{dF}{dx}\right) dt \end{cases} \quad (4).$$

Con relación a la Figura 1, son integradas las ecuaciones (4), respectivamente, la primera sobre la dirección  $C_1$ , entre los puntos A y C, y la segunda a lo largo de  $C_2$ , entre los puntos B y C; determinándose, para una aproximación de primer orden, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \left(\frac{a_C - a_A}{\delta}\right) + (u_C - u_A) = -\frac{a_A u_A}{F_A} \left(\frac{dF}{dx}\right)_A \Delta t \\ \left(\frac{a_C - a_B}{\delta}\right) - (u_C - u_B) = -\frac{a_B u_B}{F_B} \left(\frac{dF}{dx}\right)_B \Delta t \end{cases} \quad (5);$$

luego, para un definido  $\Delta t$  y siendo conocidos al instante  $t$  los valores de  $u_A, u_B, a_A, a_B, F_A, F_B$  y de las derivadas  $(dF/dx)_A$  y  $(dF/dx)_B$ , (5) constituye un sistema de dos ecuaciones lineales en las incógnitas  $u_C$  y  $a_C$ . Obviamente, para el algoritmo más simple de resolución por características del flujo homentrópico, las velocidades en los puntos A y B pueden ser interpoladas linealmente entre los nodos vecinos más próximos. Además, en este típico problema hiperbólico, la estabilidad de la solución numérica queda garantizada cumpliendo la condición Courant, Friedrich y Levy (CFL)<sup>2,3</sup>:

$$\Delta x / \Delta t \leq \text{Max}(|u \pm a|_i) \quad (6).$$

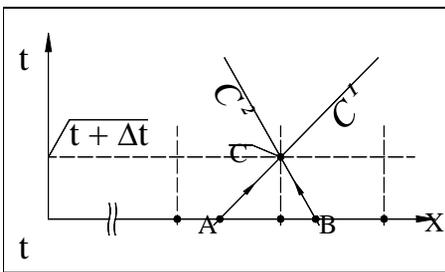


Figura 1

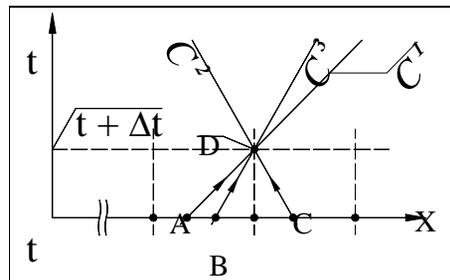


Figura 2

Para el caso homentrópico, la constancia de la entropía se cumple en cualquier instante de tiempo y a través de todo el campo de flujo; siendo, entonces, simultáneamente nulas ambas

derivadas parciales, la espacial y la temporal; verificándose, en consecuencia, la nulidad de la derivada substancial de la entropía:

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (7).$$

En cambio, para un caso algo más general, el isoentrópico, las variaciones espacio-temporales de la entropía sólo están compensadas de acuerdo con el balance (7). Por lo tanto, el flujo homentrópico constituye apenas un caso particular del flujo isoentrópico. A propósito de clarificar los rasgos distintivos de sendos flujos, la Figura 3 brinda una descripción esquemática de cada caso. Con relación a las situaciones reseñadas en dicha figura, imaginemos cada una de las fracciones del fluido, contenida en el conducto de sección uniforme, confinada por una membrana de elasticidad infinita e impermeable al flujo de calor y/o masa; configurando así cualquiera de esas porciones un sistema cerrado que, con el desarrollo del escurrimiento, experimenta una transformación adiabática reversible. La membrana adiabática y sin rigidez idealiza convenientemente diversas situaciones de interés práctico; aquellas donde puede desprejarse la difusión térmica en las direcciones axial y radial. En cuanto a la semblanza *a* de la Figura 3, ilustra que, cualesquiera sean dos porciones infinitesimales, de masas  $dm_i$  y  $dm_k$ , surcan el conducto conservando inmodificadas e idénticas entre sí sus respectivas entropías específicas,  $s_{i(t)} = s_{i(t+\Delta t)} = s_{k(t)} = s_{k(t+\Delta t)}$ ; ésta es la interpretación del flujo homentrópico. De acuerdo con la semblanza *b*, para cada una de las porciones vale la conservación de la entropía a lo largo de su correspondiente línea de corriente; o sea;  $s_{i(t)} = s_{i(t+\Delta t)}$  y también  $s_{k(t)} = s_{k(t+\Delta t)}$ , aunque en general no se verifique  $s_i = s_k$ ; ésta es la situación del flujo isoentrópico.

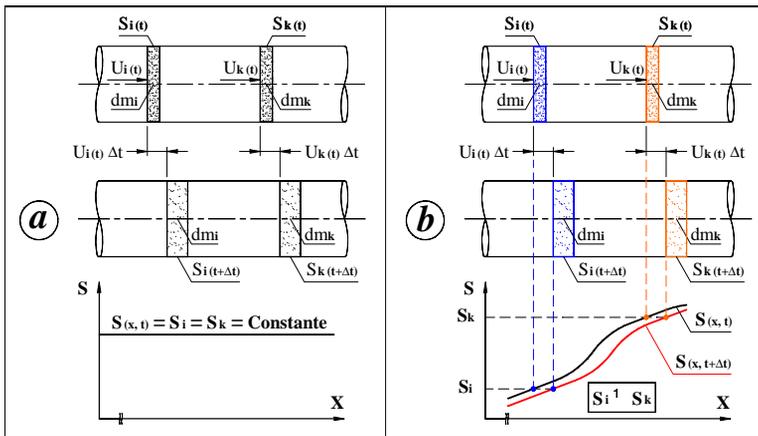


Figura 3

### 3 RESOLUCIÓN DEL FLUJO UNIDIMENSIONAL ISOENTRÓPICO

Empleando el concepto de flujo isoentrópico, caracterizado por (7), las ecuaciones de conservación<sup>1,2</sup> pueden formularse así:

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + \delta a \frac{\partial u}{\partial x} = -\delta \frac{a u}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{\delta a}{k R_p} \left( \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{\delta} \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{a^2}{k R_p} \frac{\partial s}{\partial x} \end{cases} \quad (8).$$

Procediendo como en el caso homentrópico, sustituyendo por (2) las derivadas parciales de (8) y, después, supliéndolas por sendas combinaciones lineales de las mismas; de manera que el sistema quede transformado en otro equivalente; pero, con la adopción de las direcciones apropiadas, expresado sólo en derivadas totales; se obtiene, como antes, que las trayectorias características son:  $(dx/dt)_{C_1} = u+a$  y  $(dx/dt)_{C_2} = u-a$ . Una característica evidente es la dirección  $xt$  del movimiento del fluido,  $(dx/dt)_{C_3} = u$ , sobre la cual permanece invariable la entropía; o sea, con la ecuación (7) se completa el sistema:

$$\begin{cases} \left[ d \left( \frac{a}{\delta} + u \right) \right]_{C_1} = -\frac{a u}{F} \left( \frac{dF}{dx} \right) dt + \frac{a}{k R_p} \left( \frac{ds}{dt} \right)_{C_1}; & \left( \frac{dx}{dt} \right)_{C_1} = u+a \\ \left[ d \left( \frac{a}{\delta} - u \right) \right]_{C_2} = -\frac{a u}{F} \left( \frac{dF}{dx} \right) dt + \frac{a}{k R_p} \left( \frac{ds}{dt} \right)_{C_2}; & \left( \frac{dx}{dt} \right)_{C_2} = u-a \\ \left( \frac{ds}{dt} \right)_{C_3} = 0; & \left( \frac{dx}{dt} \right)_{C_3} = u \end{cases} \quad (9).$$

Con relación a la Figura 2, son integradas las ecuaciones (9): la primera sobre la dirección  $C_1$ , entre los puntos A y D; la segunda a lo largo de  $C_2$ , desde C hasta D, y la última a través de  $C_3$  uniendo los puntos B y D; estableciéndose, para una aproximación de primer orden, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{(a_D - a_A)}{\delta} + (u_D - u_A) = -\frac{a_A u_A}{F_A} \left( \frac{dF}{dx} \right)_A \Delta t + \frac{a}{k R_p} (s_D - s_A) \\ \frac{(a_D - a_C)}{\delta} - (u_D - u_C) = -\frac{a_C u_C}{F_C} \left( \frac{dF}{dx} \right)_C \Delta t + \frac{a}{k R_p} (s_D - s_C) \\ s_D - s_B = 0 \end{cases} \quad (10).$$

#### 4 GENERACION DE UNA ONDA DE COMPRESION SIMPLE

Con referencia al conducto esquematizado en la Figura 4, consideramos en su extremo izquierdo impelido un flujo, cuya velocidad obedece cierta ley temporal exacta. Fijándose ésta de manera que, al transcurrir el tiempo, la velocidad del fluido a lo largo de un tramo del conducto resulte distribuida según una función lineal de la posición. Asumimos además que en el extremo del conducto, a partir del instante  $t = 0$ , la velocidad del gas se incrementa desde el estancamiento; alcanzando, al cabo del tiempo  $t = t_A$ , el valor uniforme  $V_{PF}$ . La instancia  $a$  de la Figura 4 ilustra el campo de velocidad en tanto ocurre esa aceleración que, al instante  $t = t_A$ , cesa en forma súbita; la semblanza  $b$  exhibe la distribución en un instante posterior, aunque previo a la aparición del choque en  $x = x_{CH}$ , a  $t = t_{CH}$ ; cuando la velocidad torna en el escalón que muestra  $d$ . Determinamos la ley temporal que regla la condición de contorno del extremo del ducto con el propósito de conseguir las simples distribuciones de velocidades ilustradas en la Figura 4.

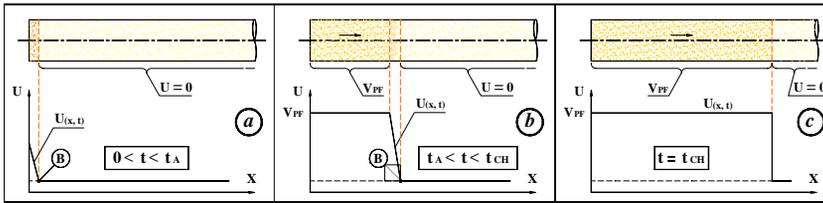


Figura 4

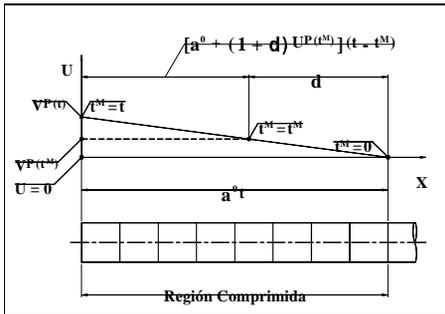


Figura 5

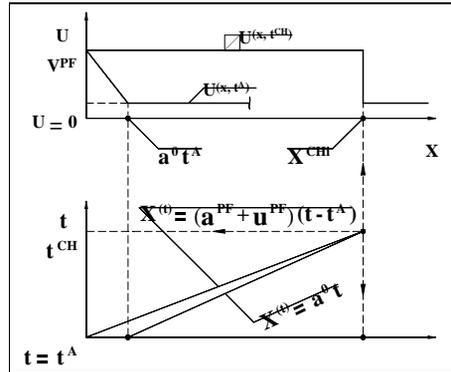


Figura 6

Analizaremos el comportamiento de la velocidad del flujo y la del sonido a lo largo de una trayectoria característica  $C_2$  (Véase la Figura 1) que, partiendo del punto B, señalado en la Figura 4, donde el fluido aún reposa, surca el conducto hacia el extremo izquierdo. Asimismo,

si admitimos que la velocidad sónica en B es  $a_0$ , en razón de la nulidad de la variación espacial de la sección del conducto, de acuerdo con la segunda ecuación del sistema (4), obtenemos:  $(da/du)_{C_2} = \delta$ ; cuya integral  $\int_{a_0}^a da = \delta \int_0^u du$ , al transponer  $a_0$ , conduce a la relación:

$$a = a_0 + \delta u \quad (11).$$

Por lo tanto, las perturbaciones infinitesimales de presión y velocidad son propagadas en el sentido del flujo con la celeridad  $a_{PROP} = a + u$ ; que, por (11) y para  $u = V_{P(t_M)}$ , resulta:

$$a_{PROP} = a_0 + (1 + \delta) V_{P(t_M)} \quad (12).$$

La equivalencia precedente, dentro del intervalo temporal  $0 \leq t \leq t_A$ , habilita expresar la posición para la cual se verifica la velocidad  $V_{P(t_M)}$  como  $x_{(t,t_M)} = [a_0 + (1 + \delta) V_{P(t_M)}](t - t_M)$ ; donde  $t_M$  representa el instante para el que fue alcanzada aquella velocidad en el extremo del conducto. Entonces, la longitud  $d$  en la Figura 5 puede calcularse según:

$$d = a_0 t_M - (1 + \delta) V_{P(t_M)} t + (1 + \delta) V_{P(t_M)} t_M \quad (13).$$

La misma Figura revela la relación de semejanza:  $V_{P(t_M)} / d = V_{P(t)} / (a_0 t_M)$ ; que, sustituida por la equivalencia (13) y operada, proporciona la igualdad:

$$[a_0 / V_{P(t)} + (\delta + 1)] t = [a_0 / V_{P(t_M)} + (\delta + 1)] t_M \quad (14);$$

cuya discusión, arrojará una solución importante. Al efecto, advertimos que el primer miembro de la igualdad anterior es sólo función de  $t$ , siendo el segundo idéntica función aunque particularizada en el valor  $t_M$  del argumento. En consecuencia, tratándose  $t$  y  $t_M$  de variables independientes, la (14) debe ser una constante; arribándose, sencillamente, a:  $[a_0 / V_{P(t)} + (\delta + 1)] t = \alpha$ ; la cual, transposición mediante, provee la ley temporal que regula la velocidad del gas en el extremo del conducto:

$$V_{P(t)} = a_0 t / [\alpha - (\delta + 1) t] \quad (15).$$

La constante  $\alpha$  puede calcularse pues, al tiempo  $t_A$ , la velocidad del gas asume el valor  $V_{PF}$ ; en síntesis,  $V_{P(t_A)} = V_{PF}$ ; que implica:  $\alpha = [a_0 / V_{PF} + (\delta + 1)] t_A$ . Con este valor de  $\alpha$ , la (15) constituye la definición explícita de la condición de contorno del extremo del conducto, para  $0 \leq t \leq t_A$ ; asimismo, para  $t > t_A$  y también en el extremo, imponemos que la velocidad del fluido permanezca uniforme en el valor  $V_{PF}$  (Véanse las Figuras 4 y 6). En consecuencia, si se cumple la condición de borde descrita, obtenemos el patrón de flujo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(x, 0 \leq t \leq t_A)} \\ u_{(x, t_A < t < t_{CH})} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} V_{PF} \frac{(a_0 t - x)}{(\delta + 1)V_{PF}(t_A - t) + a_0 t_A} \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{l} V_{PF} \\ V_{PF} \frac{(a_0 t - x)}{(\delta + 1)V_{PF}(t_A - t) + a_0 t_A} \\ 0 \end{array} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{si } [(\delta + 1)V_{PF} + a_0](t - t_A) < x \leq a_0 t \\ \text{si } x > a_0 t \\ \text{si } 0 \leq x \leq [(\delta + 1)V_{PF} + a_0](t - t_A) \\ \text{si } [(\delta + 1)V_{PF} + a_0](t - t_A) < x \leq a_0 t \\ \text{si } x > a_0 t \end{array} \quad (16).$$

En la definición precedente de  $u_{(x,t)}$ ,  $t_{CH}$  representa el tiempo en el cual aparece el choque. Atendiendo la Figura 6, ese instante y la posición correspondiente son determinados resolviendo la intersección entre las características que, al tiempo  $t=t_A$ , parten desde las posiciones  $x=0$  y  $x=a_0 t_A$ , con velocidades de propagación:  $a_{PF} + V_{PF} = (\delta + 1)V_{PF} + a_0$ , para la primera, y  $a_0$  para la segunda; o sea:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{CH} = [(\delta + 1)V_{PF} + a_0] t_A / [(\delta + 1)V_{PF}] \\ X_{CHi} = a_0 t_{CH} \end{array} \right. \quad (17).$$

Las expresiones anteriores dan cuenta del instante y la posición del "nacimiento" del choque; además, simultáneamente a este evento, son engendrados el abanico de expansión y la discontinuidad de contacto.

## 5 CHOQUE, DISCONTINUIDAD DE CONTACTO Y ABANICO DE EXPANSIÓN

Aplicando el Teorema del ímpetu, el balance de la energía y la ecuación de continuidad, encontraremos la celeridad del choque y, entre las consecuencias de este fenómeno, la velocidad de la discontinuidad de contacto y la cinemática del abanico de expansión. Abreviando el análisis, coherente con la instancia  $c$  de la Figura 4, inmediatamente antes de establecerse el choque la velocidad y la presión en la región del flujo  $x < X_{CHi}$  son mayores a aquellas de la región aún imperturbada,  $x > X_{CHi}$ ; por tanto, si asumimos, en la posición  $x = X_{CHi}$ , una laminilla perfectamente rígida, adiabática, desprovista de masa, libre de desplazarse en la dirección del flujo y abarcando toda la sección del conducto, la fuerza debida a la diferencia entre las presiones obrantes sobre los lados de dicha lámina provocará su aceleración instantánea, imponiéndole la velocidad  $u_1 > V_{PF}$  (Véase semblanza  $a$  de la Figura 7). Consecuentemente, la porción de gas inmediatamente adyacente a la lámina en  $x \rightarrow X_{CHi}^-$  y sometida, hasta el instante  $t \rightarrow t_{CH}^-$ , a la presión  $p_i$  sufrirá una súbita expansión reversible ( $t = t_{CH}$ ), alcanzando la presión  $p_1$ . Esta expansión ocasiona, por mediación de la laminilla idealizada, la repentina compresión adiabática e irreversible de la porción de gas situada en  $x \rightarrow X_{CHi}^+$ ; elevándole la presión al nivel  $p = p_1 = p_2$ . Entonces, con la lámina

animada de la velocidad  $u_1$ , resultan a la vez estabilizadas a sus lados tanto las celeridades como las presiones del fluido; adquiriendo valores respectivos  $u_1 = u_2$  y  $p_1 = p_2$ . Por el contrario, a causa de la compresión irreversible del gas contenido entre la discontinuidad de contacto (laminilla) y el choque, la entropía sufre un incremento finito  $\Delta S_{CH}$  respecto del valor de referencia  $s_0$ ; correspondiente al gas inmóvil delante del choque [ $x > X_{CH}(t)$ ] y al confinado entre la sección situada en  $x = X_{DC}(t)$  y el extremo del conducto. No obstante la equivalencia de presiones y velocidades a los lados de la discontinuidad de contacto; a su través, el salto entrópico determina diferentes temperaturas y, por consiguiente, distintas densidades y velocidades sónicas flanqueando la discontinuidad.

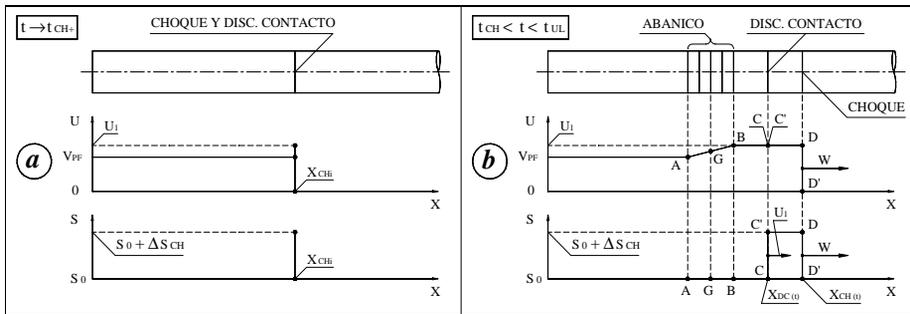


Figura 7

A fin de conectar las velocidades del flujo y las sónicas a lo largo del abanico con las del extremo, apelamos a las relaciones (4). Las velocidades del gas y sónicas y las presiones delante y detrás del choque están enlazadas mediante las relaciones de Rankine – Hugoniot. Luego, estamos en condiciones de hallar la solución exacta para el flujo isoentrópico provocado por la corriente que, en el extremo del conducto, obedece la ley temporal (15).

El intervalo de tiempo válido para contrastar una solución numérica con la exacta se prolonga desde el instante  $t=0$  hasta  $t=t_{UL}$ , cuando, en el caso subsónico ( $V_{PF} / a_{PF} < 1$ , con  $a_{PF} = a_0 + \delta V_{PF}$ ), el abanico alcanza el extremo del conducto; en cambio, no valen restricciones para ese límite superior si el régimen del flujo es sónico o supersónico,  $V_{PF} / a_{PF} \geq 1$ ; porque, simplemente, en estos casos el abanico no retrocede hacia el extremo; concretando:

$$\begin{cases} t_{UL} = \frac{3 [(\delta + 1) V_{PF} + a_0] a_0 t_A}{(\delta + 1) V_{PF} [(k - 1) V_{PF} + 3 a_0]} & \text{si } M_{PF} = V_{PF} / a_i < 1 \\ t_{UL} \rightarrow +\infty & \text{si } M_{PF} = V_{PF} / a_i \geq 1 \end{cases} \quad (18).$$

Especificando el comportamiento de la corriente mediante una referencia solidarizada al conducto, el gas en reposo delante del choque ( $M_0 = 0$ ), poseerá según una referencia inercial

que instantáneamente lo acompaña, la celeridad ( $-W$ ), correspondiéndole, en consecuencia, el índice de Mach  $M_{0R} = |W - u_0| / a_0 = W / a_0 - M_0$ ; asimismo, relativo a esa referencia “escolta del choque”, el número de Mach del gas emergente resulta  $M_{2R} = |W - u_2| / a_2 = W / a_2 - M_2$ , con  $M_2 = u_2 / a_2$ . La elección de la referencia móvil se justifica por la sencillez que, en la misma, adoptan las relaciones de Rankine – Hugoniot; a saber:

$$\begin{cases} M_{2R} = \sqrt{(1 + \delta M_{0R}^2) / (k M_{0R}^2 - \delta)} \\ a_2 / a_0 = (1 + \delta)^{-1} \sqrt{(k M_{0R}^2 - \delta)(1 + \delta M_{0R}^2)} / M_{0R} \\ p_2 / p_0 = (1 + k M_{0R}^2) / (1 + k M_{2R}^2) \end{cases} \quad (19).$$

En el extremo del abanico de expansión más próximo a la discontinuidad de contacto (punto B en la instancia  $b$  de la Figura 7), la velocidad del gas y la sónica respectiva deben evaluarse acudiendo a las equivalencias que reglan al flujo homentrópico; obteniéndose las relaciones:

$$\begin{cases} M_1 = \delta^{-1} (a_i / a_1 - 1) + M_i a_i / a_1 \\ p_1 / p_0 = (a_1 / a_0)^{k/\delta} \end{cases} \quad (20).$$

Conforme anticipamos, franqueando la discontinuidad de contacto persisten continuos los campos de velocidad y presión; es decir:

$$\begin{cases} u_1 = M_1 a_1 = M_2 a_2 = u_2 \\ p_1 = p_2 \end{cases} \quad (21).$$

Reunidas y arregladas las relaciones (19), (20) y (21) en un único sistema de ecuaciones y, aplicándole un método numérico iterativo del tipo Newton – Raphson, hallamos su solución:  $M_1, a_1, M_{2R}, M_{0R}, M_2, a_2$  y  $W$ . Luego, reemplazando estos resultados en (21), son evaluadas la velocidad de la discontinuidad de contacto y la presión del gas a sus lados.

Recordando  $s - s_0 = R_p [k\delta^{-1} \ln(a/a_0) - \ln(p/p_0)]$ , si asumimos  $s_0 = 0$  convencionalmente, con el auxilio de las relaciones (20) y (21), el salto entrópico  $\Delta s_{CH} = s_2 - s_0$  resulta:

$$\Delta s_{CH} = s_2 = k \delta^{-1} R_p \ln(a_2 / a_1) \quad (22);$$

cuya magnitud, para este problema, equivale a la diferencia de entropía entre las porciones del fluido que, corriente abajo y corriente arriba, son contiguas a la discontinuidad de contacto.

Relativo a la Figura 7, a fin de describir el flujo cual una ley temporal, válida dentro del intervalo  $t_{CH} \leq t < t_{UL}$ , basta establecer las posiciones instantáneas, velocidades y propiedades termodinámicas en los puntos A, B, C, C', D y D'. En tal sentido, atendiendo que A y B

constituyen los límites del abanico, para cualquier posición  $G$  intermedia ( $x_A \leq x_G \leq x_B$ ), hallamos:

$$\begin{cases} a_{GPROP} = V_{PF} + \delta^{-1} a_{PF} - \delta^{-1} (\delta + 1) a_G; & x_G = X_{CHi} + a_{GPROP} (t - t_{CH}); \\ u_G = V_{PF} + \delta^{-1} (\delta + 1) (a_{PF} - a_G); & p_G = (a_G / a_{PF})^{k/\delta} p_0; \\ \rho_G = k p_0 a_G^{-2} (a_G / a_0)^2; & s_G = 0 \end{cases} \quad (23);$$

donde  $t_{CH}$  y  $X_{CHi}$  son valuados según (17); adoptándose además como parámetro la velocidad local del sonido  $a_G$ ; cuyo rango de variación está extendido entre los límites del abanico, precisando:  $a_1 \leq a_G \leq a_{PF}$ , siendo  $a_B = a_1$  y  $a_A = a_{PF}$ ;  $a_{GPROP}$  denota la velocidad característica ( $u - a$ ) o de propagación en contracorriente de las perturbaciones débiles. Por ejemplo, para el punto  $A$ , dicha celeridad resulta:  $a_{GPROP}|_A = u_A - a_A = V_{PF} - a_{PF}$ ; entonces, la condición de no retroceso de  $A$  significa apenas  $a_{GPROP}|_A \geq 0$  y, por tanto,  $M_{PF} = V_{PF} / a_{PF} \geq 1$ .

Durante la totalidad del intervalo de análisis, la discontinuidad de contacto y el choque conservan fijas sus celeridades respectivas; siendo  $u_1 = u_2$  la de la discontinuidad y  $W$  la del choque, de forma que:

$$\begin{cases} x_C = x_{C'} = X_{CHi} + u_1 (t - t_{CH}); & x_D = x_{D'} = X_{CHi} + W (t - t_{CH}); \\ a_C = a_1; & u_C = u_1; & a_{C'} = a_2; & p_C = p_{C'} = p_1 = p_2 = (a_1 / a_0)^{k/\delta} p_0; & s_C = 0; \\ s_D = s_{C'} = s_2 = \Delta s_{CH} = k \delta^{-1} R_p \ln (a_2 / a_1); & \rho_C = (a_1 / a_0)^{1/\delta} \rho_0; \end{cases} \quad (24);$$

con  $t_{CH} \leq t < t_{UL}$ .

## 6 LA CINEMATICA DEL EMBOLO

La curva de la Figura 8 ilustra la primer etapa del desplazamiento positivo de un émbolo que, partiendo del reposo y al cumplir cierta ley cinemática  $X_E = X_{E(t)}$ , provocará una distribución lineal de la velocidad del gas (inicialmente inmóvil) en las proximidades del pistón. Para simplificar, aceptamos establecido aquel patrón de flujo originado por la corriente forzada en el extremo del conducto; entonces, soportando la analogía, imaginamos un “dominio fluido” ficticio que, allende el pistón [ $x \geq X_{E(t)}$ ], extiende el ocupado verdaderamente por el gas, incluyendo la trayectoria recorrida por el émbolo desde el inicio de su marcha; o sea, suponemos dilatado el dominio físico hasta el extremo del conducto y lleno de gas en las condiciones termodinámicas y de movimiento del caso preliminar; el cual también da cuenta de esas condiciones en la región a derechas del émbolo. De acuerdo con esta línea especulativa, la cabeza del pistón suplanta al “frente” gaseoso que, en el mismo instante, transita la posición  $X_{E(t)}$  del dominio extendido, sobre el cual la distribución de velocidad del gas exhibe la característica de consigna.

La semejanza ente los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C$  (Véase Figura 8) conduce a la razón  $U_{E(t)}/d = V_{P(t)}/a_0 t$ ; que, sustituida por la equivalencia  $d = a_0 t - X_{E(t)}$ , con  $V_{P(t)}$  dado en (15) y operando, queda reducida a:  $U_{E(t)} = -[X_{E(t)} - a_0 t] / [\alpha - (\delta + 1)t]$ . Luego, reemplazando en la última  $U_{E(t)} = d X_E / dt$ , obtenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{d[X_{E(t)}]}{dt} = \frac{a_0 t - X_{E(t)}}{\alpha - (\delta + 1)t} \quad (25);$$

con la condición inicial  $X_{E(0)} = 0$ . Además, aceptando prescripta la velocidad máxima que alcanza el émbolo al cabo de  $t = t_A$ ; o sea  $\left\{ d[X_{E(t)}] / dt \right\}_{t=t_A} = U_{EF}$ , será factible evaluar la constante  $\alpha$  de la expresión (25); cuya entidad en este problema no es asimilable a la del estudio precedente. Asimismo, exigimos a la marcha del pistón que, una vez alcanzada la velocidad  $U_{EF}$ ; la mantenga invariable. El esquema de la Figura 9 interpreta la situación; discriminándose dos tramos de la línea  $ABC$  (a trazos): el curvo  $AB$  corresponde al movimiento acelerado del émbolo, que se desarrolla dentro del intervalo  $0 \leq t \leq t_A$ ; en cambio, el segmento recto  $BC$  describe la cinemática del pistón en tanto surca el conducto con ritmo uniforme  $U_{E(t > t_A)} = U_{EF}$ ; además, la línea llena representa el campo de velocidad del gas,  $U = U_{(x,t)}$ .

Adoptando cambios apropiados de las variables, la ecuación diferencial que gobierna el movimiento acelerado del émbolo (25) admite una formulación equivalente en variables separables y de resolución exacta asequible; por tanto, integrando, concluimos:

$$\text{si } 0 \leq t \leq t_A : X_{E(t)} = a_0 \alpha \delta^{-1} \left\{ 1 - \alpha^{-1} t - [1 - \alpha^{-1} (\delta + 1)t]^{1/(\delta + 1)} \right\} \quad (26);$$

cuya derivada temporal constituye la velocidad del émbolo; o sea:

$$\text{si } 0 \leq t \leq t_A : U_{E(t)} = d[X_{E(t)}] / dt = a_0 \delta^{-1} \left\{ [1 - \alpha^{-1} (\delta + 1)t]^{-\delta/(\delta + 1)} - 1 \right\} \quad (27).$$

Conforme adelantamos, con la transposición de (27) particularizada en  $t = t_A$ , queda:

$$\alpha = \left\{ (\delta + 1) / \left[ 1 - (\delta U_{EF} / a_0 + 1)^{-(\delta + 1)/\delta} \right] \right\} t_A \quad (28).$$

Para el caso en estudio, de modo análogo al preliminar, en  $x = X_{CHi}$  al instante  $t = t_{CH}$ , sobrevienen la onda de choque, la discontinuidad de contacto y el abanico de expansión. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, sin importar el número de Mach del gas "adherido" al émbolo cuando éste uniforma su celeridad, siempre será finito el límite superior de la validez temporal del flujo exactamente ajustado por la solución analfítica; siendo determinado dicho límite por el instante en el cual el émbolo atrapa al abanico de expansión. En la Figura 9, las posiciones de los puntos  $B$  y  $D$ , respectivamente, están dadas por  $X_B = X_{E(t_A)}$  y  $X_D = a_0 t_A$ ; entonces, tomando en cuenta que la velocidad de propagación de  $B$ , es

$a_{BPROP} = (\delta + 1)U_{EF} + a_0$  y  $a_{DPROP} = a_0$  la del punto  $D$ , calcularemos el instante y la posición correspondientes al “nacimiento” del choque.

Resumiendo, para hallar el instante  $t_{CH}$  que satisface  $x_{B'(t_{CH})} = x_{D'(t_{CH})}$ , resolvemos la ecuación:  $a_0 t_{CH} = X_{E(t_A)} + [(\delta + 1)U_{EF} + a_0](t_{CH} - t_A)$ ; cuya solución, expresando  $X_{E(t_A)}$  con el auxilio de (26) y sustituyendo  $\alpha$  por (28), determina el tiempo del surgimiento del choque:

$$t_{CH} = \left\{ (1 + \delta U_{EF}/a_0)^{(\delta+1)/\delta} / [(1 + \delta U_{EF}/a_0)^{(\delta+1)/\delta} - 1] \right\} t_A \quad (29),$$

y, como antes, claramente:  $X_{CHi} = a_0 t_{CH}$ .

Valuados que han sido  $t_{CH}$  y  $X_{CHi}$ , estableceremos el tiempo  $t_{UL}$ , límite superior para la validez del flujo distribuido conforme una solución exacta. Calcularemos  $t_{UL}$  atendiendo la cinemática del émbolo y la de propagación de las perturbaciones leves de presión que, partiendo de la posición  $x = X_{CHi}$  en  $t = t_{CH}$ , transitan por el fluido a ritmo  $a_{APROP} = (1 - \delta)U_{EF} - a_0$  (Véase Figura 7). En consecuencia, equiparando la posición de  $A$  y la del émbolo, practicadas las sustituciones oportunas y operando, queda:

$$t_{UL} = \left\{ [(1 + \delta U_{EF}/a_0)^{(\delta+1)/\delta} + 1] / [(1 + \delta U_{EF}/a_0)^{(\delta+1)/\delta} - 1] \right\} t_A \quad (30).$$

Ahora disponemos de toda la información necesaria a fin de describir en forma exacta tanto el movimiento del émbolo como, asimismo, los campos de velocidades y propiedades termodinámicas del gas a lo largo del conducto, dentro del intervalo de tiempo válido para la contrastación de resultados numéricos,  $0 \leq t < t_{UL}$ .

Concretando, la (26) dicta la cinemática del émbolo dentro del intervalo  $0 \leq t \leq t_A$ ; completándose, para  $t_A \leq t \leq t_{UL}$ , mediante la ley:

$$\begin{cases} X_{E(t)} = a_0 \alpha \delta^{-1} \left\{ 1 - \alpha^{-1} t_A - [1 - (\delta + 1) \alpha^{-1} t_A]^{1/(\delta+1)} \right\} + U_{EF} (t - t_A) \\ d[X_{E(t)}] / dt = U_{EF} \end{cases} \quad (31).$$

Refiriéndonos a las Figuras 7 y 8, con similar análisis al caso preliminar, estableceremos cómo se distribuyen la velocidad del fluido y algunas propiedades termodinámicas de interés. Estas distribuciones existen sólo en la región definida por la intersección de las regiones  $0 \leq t < t_{UL}$  y  $x \geq X_{E(t)}$ . Consecuentemente, detallaremos las soluciones analíticas aplicables al objeto de contrastar resultados numéricos, dentro de ese dominio; que incluye tres subdominios discriminados, para cada nivel del tiempo, a juzgar por el intervalo de la pertenencia de dicho instante y, para cada uno, cubriendo todo el rango espacial  $X_{E(t)} \leq x < \infty$ ; a saber: etapa de aceleración del pistón:  $0 \leq t \leq t_A$ ; el lapso de velocidad uniforme del émbolo previo a la formación del choque:  $t_A \leq t < t_{CH}$  y la etapa que media entre

la aparición del choque y el comienzo de la reflexión del abanico contra el émbolo:  $t_{CH} \leq t < t_{UL}$ . Entonces, con arreglo a la descripción recién expuesta, obtenemos:

- Si  $0 \leq t \leq t_A$ :

$$\begin{cases} \text{si } X_{E(t)} \leq x \leq a_0 t : U_{(x,t)} = \left\{ (a_0 t - x) / [a_0 t - X_{E(t)}] \right\} U_{E(t)} \\ \text{si } X_{E(t)} < x : s_{(x,t)} = 0; \quad \text{si } a_0 t < x : U_{(x,t)} = 0 \end{cases} \quad (32);$$

- Si  $t_A \leq t < t_{CH}$ :

$$\begin{cases} \text{si } X_{E(t)} \leq x < [(\delta + 1)U_{EF} + a_0](t - t_A) + X_{E(t_A)} : U_{(x,t)} = U_{EF} \\ \text{si } [(\delta + 1)U_{EF} + a_0](t - t_A) + X_{E(t_A)} \leq x \leq a_0 t : \\ \qquad \qquad \qquad U_{(x,t)} = \frac{(a_0 t - x)U_{EF}}{a_0 t_A - (\delta + 1)U_{EF}(t - t_A) - X_{E(t_A)}} \\ \text{si } x > a_0 t : U_{(x,t)} = 0; \quad \text{si } X_{E(t)} < x : s_{(x,t)} = 0 \end{cases} \quad (33);$$

evaluando en la anterior  $X_{E(t)}$  y  $t_{CH}$ , respectivamente, conforme (26) y (29).

- Si  $t_{CH} \leq t < t_{UL}$ :

$$\begin{cases} \text{si } X_{E(t)} \leq x < X_A : U_{(x,t)} = U_{EF}; \\ \text{si } X_A \leq x \leq X_B : U_{(x,t)} = \frac{(a_{EF} + \delta U_{EF})(t - t_{CH}) - (X_{CHi} - x)}{(\delta + 1)(t - t_{CH})}; \\ \text{si } X_B < x \leq X_{CH} : U_{(x,t)} = u_1; \quad \text{si } x > X_{CH} : U_{(x,t)} = 0; \\ \text{si } X_{E(t)} \leq x \leq X_{DC} : s_{(x,t)} = 0; \quad \text{si } X_{DC} \leq x \leq X_{CH} : s_{(x,t)} = s_2; \\ \text{si } x > X_{CH} : s_{(x,t)} = 0; \end{cases} \quad (34);$$

donde  $a_{EF}$  denota la velocidad del sonido del gas adyacente al émbolo, cuando éste uniforma su marcha;  $a_1$  es la celeridad sónica del lado izquierdo de la discontinuidad y  $u_1$  es la propia velocidad del flujo;  $W$  interpreta la velocidad del choque; el extremo izquierdo del abanico (Véase instancia  $b$  de la Figura 7) está dado por  $X_A = X_{CHi} + (U_{EF} - a_{EF})(t - t_{CH})$  y la posición instantánea del derecho mediante  $X_B = X_{CHi} + [U_{EF} + a_i \delta^{-1} - \delta^{-1}(\delta + 1)a_1](t - t_{CH})$ ; la posición de la discontinuidad y la del choque, respectivamente, según:  $X_{DC} = X_{CHi} + u_1(t - t_{CH})$  y  $X_{CH} = X_{CHi} + W(t - t_{CH})$ . Las magnitudes  $W$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $u_1 = u_2$ ,  $p_1$  y  $p_2$  son idénticas a las del estudio preliminar y, entonces, deben ser resueltas conforme (19), (20) y (21), tomando  $a_0 = \sqrt{k R_p T_0}$  y  $a_{PF} = a_{EF}$ .

En conjunto (32), (33) y (34), cubriendo el dominio temporal  $0 \leq t < t_{UL}$ , definen exactamente los campos de velocidad y entropía del gas; cuyo movimiento a partir del reposo,

es impulsado por un émbolo que obedece la cinemática fijada por (26) y (31). Consiguientemente, está configurado un patrón de flujo conveniente al efecto de contrastar códigos computacionales 1D; la medida de las aproximaciones logradas calificará la performance del programa, particularmente, en cuanto a la detección y posterior evolución temporal tanto del choque, como de la discontinuidad de contacto involucradas.

El problema sólo admite solución exacta dentro de un intervalo acotado de la variable temporal pero, haciéndola tender al infinito suponiendo válida la (31) para  $t > t_{UL}$ , en razón de que el choque habrá disipado completamente las reflexiones del abanico contra el émbolo, de nuevo estamos autorizados a determinar en forma exacta los límites correspondientes de las velocidades del fluido, de las sonoras y del choque y, asociado con este, del salto entrópico. Por ejemplo, reconociendo que, inmediatamente corriente arriba del choque, la velocidad del gas se estabilizará en el valor límite obvio  $U_{EF}$ , la celeridad del émbolo, y que, corriente abajo de dicha singularidad, reinan las condiciones de estancamiento  $u_0$ ,  $p_0$  y  $s_0$ ; acudiendo a las relaciones de Rankine – Hugoniot, se deduce la velocidad límite del choque, obteniéndose:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [W_{(t)}] = [(\delta + 1) / 2] U_{EF} + \sqrt{[(\delta + 1) / 2]^2 U_{EF}^2 + a_0^2} \quad (35);$$

el cual, a través de estas relaciones, deja expedito el cálculo de los límites restantes.

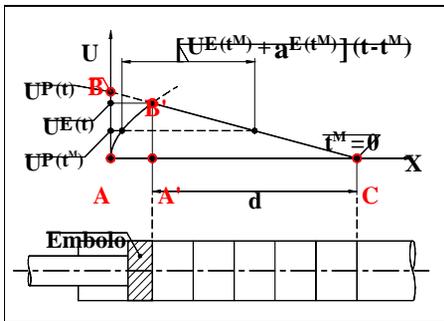


Figura 8

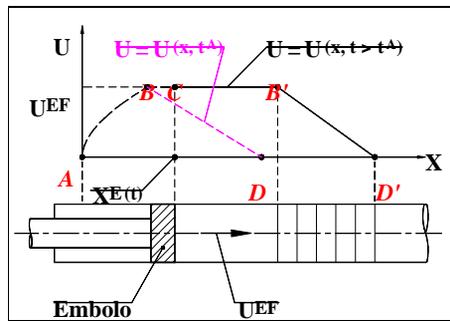


Figura 9

## 7 RESOLUCION NUMERICA

El test propuesto fue resuelto numéricamente recurriendo a esquemas en Diferencias Finitas tipo full upwind de primer y segundo orden, conforme variantes derivadas del Método de las Características por vía de las interpolaciones necesarias<sup>3</sup>. Una estrategia que reúne contribuciones de sendas técnicas fue empleada para captar el choque y describir su ulterior comportamiento; similar enfoque se aplicó al estudio de la discontinuidad de contacto.

Con el objeto de modelar las características que atraviesan tanto el choque como la discontinuidad, se impusieron nodos adicionales móviles: un par por cada singularidad en su propia posición instantánea. Por ejemplo, un nodo inmediatamente a cada lado del choque con

las condiciones locales respectivas, habilitándose con tal opción múltiples y variadas alternativas para refinar el progreso temporal de dicha singularidad.

El movimiento del choque fue estudiado según una referencia inercial móvil, animada de la celeridad instantánea del frente de la onda, a propósito de ganar generalidad y resumir las condiciones de Rankine – Hugoniot. Las variables involucradas en estas relaciones fueron calculadas mediante un algoritmo iterativo de la familia Newton – Raphson que, con la asistencia de un esquema predictor, ajusta la inicialización al instante de aparecer el choque.

Si en este problema se adoptara una malla fija, a través del tiempo, los nodos que queden incluidos en la trayectoria del émbolo, serán excluidos del dominio físico y, en consecuencia, las interpolaciones asociadas a esa contracción del rango añadirán difusión numérica. Por tanto, a efectos de eludir ese exceso de difusividad, fue introducido un cambio conveniente de las variables tiempo y posición, el cual, mientras transcurre el desplazamiento del pistón, redistribuye con regularidad el número total de nodos (preestablecido) a través del dominio físico. Por supuesto, en razón de la referida transformación, el problema debió ser resuelto en las variables transformadas; obteniéndose después, antitransformada mediante, los resultados de interés. En consonancia con este enfoque, vale señalar el agregado de una característica de propagación: la del movimiento del nodo. Para concretar, adoptamos la siguiente transformación: para el tiempo:  $\tau = t$  y para la posición:  $X = \left[ x - X_{E(t)} \right] / \left[ X_0 - X_{E(t)} \right]$  con  $X_0 = 1.3 a_0 t_{UL}$  y una discretización espacial de 200 elementos.

Con la implementación del Método de las Características o de cualquiera de sus derivaciones alternativas<sup>3</sup>, la estabilidad de los esquemas numéricos empleados para la simulación computacional del flujo test está regida por la condición CFL dada por (6).

Fijadas las condiciones de estancamiento del gas (Aire:  $R_p = 287$  J/K Kg y  $k = 1.4$ ) dentro del conducto en  $p_0 = 1 \times 10^5$  Pa y  $T_0 = 300$  K, aplicando un esquema de primer orden han sido obtenidos los distintos resultados gráficos mostrados; debiendo atenderse, respecto de tales figuras, las consideraciones enumeradas a continuación: 1) En las figuras dedicadas a comparar resultados numéricos con sus soluciones exactas correspondientes: los centros de los círculos representan los valores nodales de los campos numéricos; y las líneas llenas interpretan las respectivas soluciones analíticas; 2) En la Figura 13: la abscisa normaliza el tiempo transcurrido entre la formación del choque y la cota superior para la validez de la comparación ( $t_{UL}$ ); 3) En las Figuras 13 a 15 inclusive: los colores de las líneas connotan el índice de Mach del gas adyacente al émbolo al cesar su aceleración,  $M_{EF} = U_{EF} / a_{EF}$ , según: en azul:  $M_{EF} = 0.5$ ; en rojo:  $M_{EF} = 1$ , y en magenta:  $M_{EF} = 2$ ; y 4) En las figuras 20 y 21, en las cercanías del choque, respecto de la correspondiente solución exacta, los errores porcentuales de cada campo numérico exhiben un incremento significativo, porque los nodos adicionales que, flanqueando al choque, registran su evolución numérica, poseen una velocidad desfasada alrededor del 1% del resultado analítico, con tiempos de cálculo superiores al los de contrastación válida ( $t \approx 4t_{UL}$ ). No obstante, tan pequeño desfasaje, aún dentro del intervalo de contrastación ( $t_A < t < t_{UL}$ ), localiza un aumento importante del error; mas, no relevante físicamente a la luz del significado expuesto. Los errores distribuidos en la región del abanico son atribuibles a la difusión numérica.

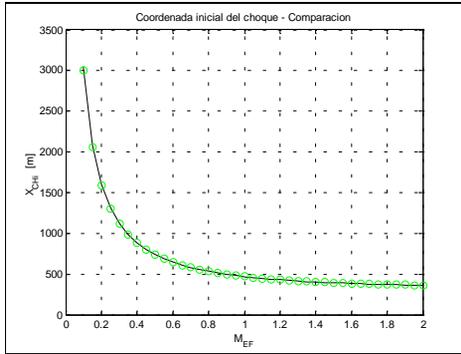


Figura 10

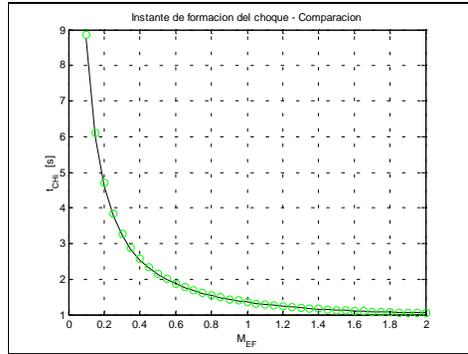


Figura 11

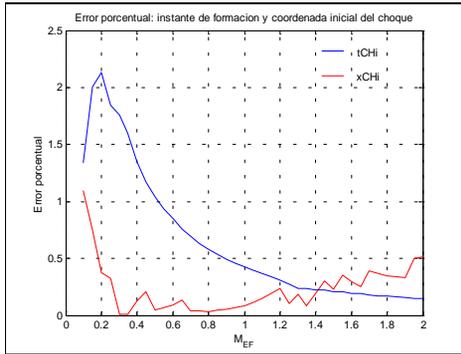


Figura 12

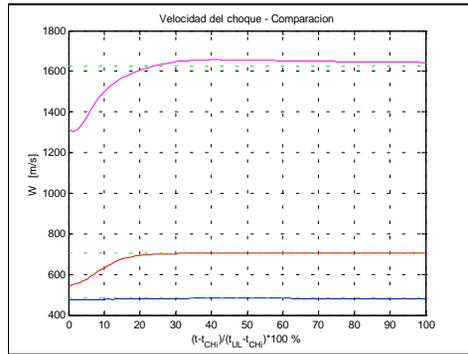


Figura 13

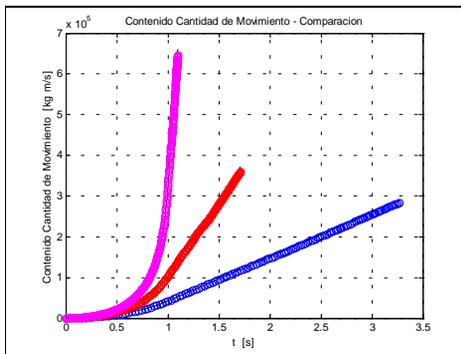


Figura 14

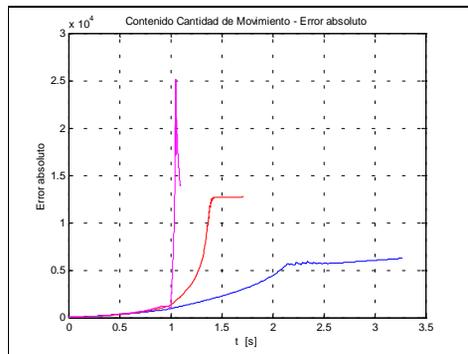


Figura 15

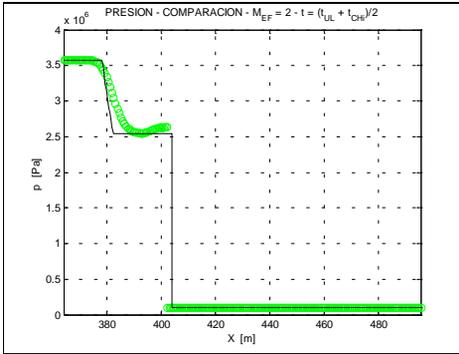


Figura 16

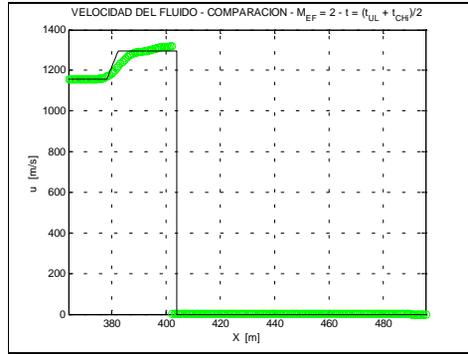


Figura 17

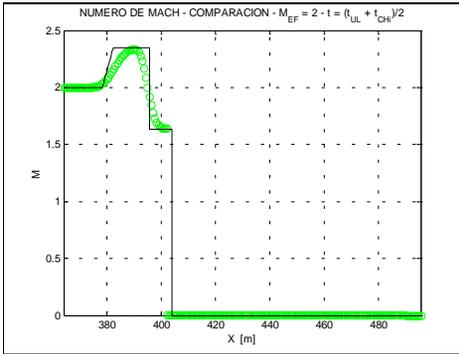


Figura 18

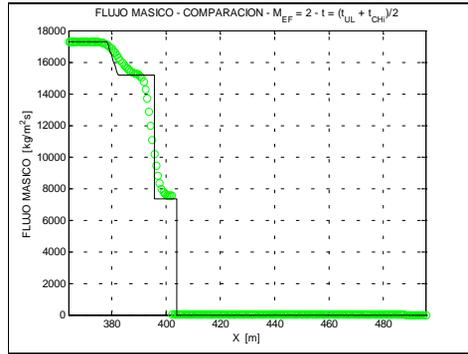


Figura 19

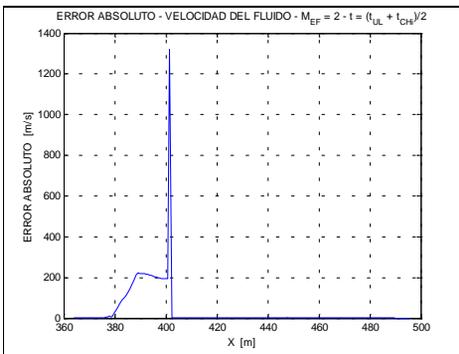


Figura 20

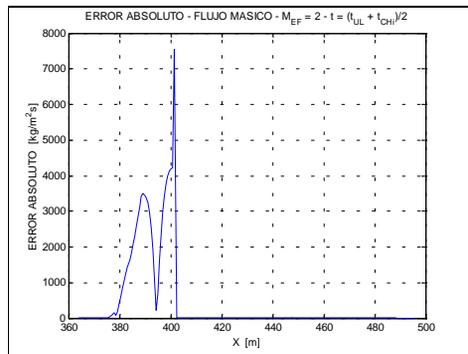


Figura 21

## 8 CONCLUSIONES

Las leyes exactas de la cinemática del émbolo deducidas en este trabajo, dentro de un intervalo de tiempo acotado, establecen las condiciones de borde del test propuesto y determinan, en la totalidad del dominio físico, distribuciones también analíticas de los campos de velocidad, entropía específica, presión, etc. Entonces, estas soluciones constituyen una apropiada herramienta para chequear códigos de simulación computacional del flujo Complementados con estas técnicas, el Método de las Características y sus variantes alternativas en Diferencias Finitas<sup>3</sup> fueron aplicados al tratamiento numérico del problema test; arribándose a resultados que exhiben excelente acuerdo con las soluciones exactas correspondientes<sup>3</sup>.

El problema del tubo de Riemann y el test propuesto comparten el carácter transiente, diferenciándose en cuanto al instante y las condiciones de movimiento del gas al originarse el choque. Puesto que, con el émbolo forzando una corriente totalmente desarrollada en un tramo del conducto, aquellas singularidades del flujo aparecen simultáneamente en la posición donde se tornan discontinuas tanto la distribución de la velocidad del fluido, como la de la presión (densidad y celeridad sonora). Esta situación facilita la fundamentación física y numérica del diseño de esquemas con capacidad de capturar y seguir la evolución temporal de un choque.

En el ‘problema del émbolo’, si la variable temporal tiende al infinito el choque habrá disipado las perturbaciones ocasionadas por las reflexiones del abanico, determinándose exactamente los límites de las velocidades del fluido, sonoras y del choque y, asociado con este, del salto entrópico. Contribuyendo a validar el código ensayado, esos límites ajustan muy bien con los resultados numéricos obtenidos para  $t \approx 4 t_{UL}$ .

## 9 REFERENCIAS

- [1] R. Benson, *The thermodynamics and gas dynamics of internal combustion engines*, Clarendon Press, Vol. I., (1982).
- [2] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows*, John Wiley & Sons, Vol. II., (1989).
- [3] G. Bella, *Modelación numérica de motores*, Curso U.N. La Plata, (2001).
- [4] N. Nigro, *Dinámica de gases en ductos y toberas*, Informe 0796 - INTEC , (1996).