

## CONTRASTACION DE ESQUEMAS NUMERICOS 1D RECURRIENDO AL ANALISIS DE LA CONVERGENCIA DE REGIMENES ESTACIONARIOS EN UNA TOBERA DE LAVAL

Ezequiel López<sup>\*</sup>, Jorge Toth<sup>\*</sup> y Norberto Nigro<sup>†</sup>

<sup>\*</sup> Departamento de Mecánica Aplicada  
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue  
Buenos Aires 1400, 8300 Neuquén, Argentina  
e-mail: ezequiellopez@hotmail.com , e-mail: jtoth@uncoma.edu.ar

<sup>†</sup> Grupo de Tecnología Mecánica del INTEC  
Universidad Nacional del Litoral, CONICET  
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina  
e-mail: nnigro@intec.unl.edu.ar, web page: <http://venus.ceride.gov.ar/cimec>

**Key words:** Flujo en ductos, Dinámica de gases, Euler 1D, Choque no estacionario, Método de las Características.

**Resumen.** *Basado en la aplicación del Método de las Características al flujo compresible, este trabajo propone un código numérico hábil para capturar y seguir la evolución temporal de choques y discontinuidades de contacto. La contrastación más simple consiste en chequear los resultados numéricos del problema de Riemann con la solución exacta correspondiente. Asimismo, el código soportó un test más exigente, la simulación del flujo transitorio, adiabático e invíscido en una tobera de Laval prolongada desde la descarga mediante un conducto de idéntica sección a la propia de descarga. El escurrimiento en la condición de diseño se obtuvo numéricamente, siendo satisfactorio el ajuste de los resultados con la respectiva predicción exacta. Asumiendo desarrollado el régimen de diseño, en el extremo de salida de esa extensión se impuso la formación de un choque, el cual, conforme su intensidad, progresa a favor o en contra del flujo. Fueron analizadas varias situaciones comprendidas en el último caso considerando que, al momento de aparecer el choque y sobre su lado corriente abajo, es establecida una presión intermedia entre las de entrada y de descarga en régimen de diseño. En consecuencia, a la formación del choque le sucede un flujo transiente que deriva hacia un régimen permanente accesible analíticamente. El excelente acuerdo entre estas soluciones exactas y los correspondientes campos numéricos convergidos corrobora la validez del código.*

## 1 INTRODUCCION

El presente trabajo está contextualizado en el proyecto Motor Rotativo de Combustión a Volumen Constante, el cual incluye el desarrollo de un compresor volumétrico no valvulado y de un motor de encendido chispa. En dicho marco, mediante una metodología recursiva, combinando la experimentación y el uso de herramientas computacionales modernas para simular motores de combustión interna, serán contrastadas las técnicas numéricas utilizadas con fines predictivos. Por consiguiente, el proyecto contempla además del uso de software, una efectiva participación en la generación de algunos códigos computacionales; contribuyendo por una parte a facilitar la tarea del diseñador motorista y, por otra, a proveer material didáctico adecuado a la enseñanza de las Máquinas Térmicas.

El pronóstico de potencias y performances en motores de combustión interna exige conocer el comportamiento del flujo impermanente de los gases que escurren por los conductos de admisión y escape. Actualmente, la modelación numérica 1D provee una descripción aceptable del flujo en esos conductos<sup>1,3,4</sup>. La física del problema puede aproximarse mediante las ecuaciones de Euler del flujo invíscido *cuasi*-unidimensional<sup>1,2</sup>. La resolución de estas ecuaciones suele acometerse utilizando el Método de las Características<sup>1</sup>, tanto en sus versiones directas como en sus variantes en Diferencias Finitas<sup>3</sup>, todas explícitas.

Frecuentemente, en los flujos de gases aparecen discontinuidades tales como ondas de choque y discontinuidades de contacto. Procurando simplificar el tratamiento numérico de estos casos, en cada nivel de tiempo, el sistema de ecuaciones de gobierno es resuelto aplicando un esquema en Diferencias Finitas tipo full upwind<sup>2,3</sup> en las regiones del dominio donde el campo de flujo es continuo. Este esquema está complementado por otro fundado también en el Método de las Características, que se concibió para detectar la formación de cada discontinuidad y estudiar su progreso ulterior.

En el presente trabajo es resuelto un test, consistente en analizar la evolución de una onda de choque móvil hasta alcanzar la posición e intensidad del régimen permanente. Concretamente, fue estudiado el flujo en una tobera de Laval extendida desde la descarga mediante un conducto cuya sección es uniforme e idéntica a la propia de la descarga. Admitiendo establecido el régimen de diseño, en el extremo de la extensión se asume la aparición de un choque que eleva el nivel de presión hasta un valor comprendido entre el de la entrada a la tobera y el de su descarga para la operación en la condición de diseño. Luego, según la cuantía de ese incremento de presión, surge un transitorio al cual sucede alguno de los siguientes estados permanentes: a) Barrido del choque; b) Choque estacionario en la región divergente, incluyendo los casos límite: b<sub>1</sub>) Choque de intensidad nula en la garganta (Venturi) y b<sub>2</sub>) Choque en la salida. Como la totalidad de los patrones típicos puntualizados precedentemente admiten predicción analítica, la validez del código numérico empleado fue corroborada por el excelente acuerdo entre los valores convergidos del campo de flujo y las respectivas soluciones exactas.

Para un sistema, inicialmente cerrado, reservorio–conducto–tobera extendida fue estudiada la convergencia de los campos numéricos establecidos al cabo del transitorio que desencadena la súbita comunicación entre la extensión y la atmósfera, obteniéndose resultados muy bien ajustados con los campos exactos asociados a la operación de diseño de la tobera<sup>2,3,4</sup>.

## 2 RESOLUCION POR CARACTERISTICAS CON DIFERENCIAS FINITAS

El flujo compresible, invíscido, *cuasi*-unidimensional y adiabático de un gas perfecto está gobernado por el sistema de ecuaciones siguiente<sup>1,2</sup>:

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{u}{\delta} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{a}{k R_p} \left( \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) + a \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{au}{F} \frac{dF}{dx} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{\delta} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{a^2}{k R_p} \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1),$$

donde  $R_p$  interpreta la constante particular,  $k$  es la relación de calores específicos, las velocidades del fluido y del sonido son respectivamente designadas  $u$  y  $a$ , siendo  $s$  la entropía específica y  $\delta = (k-1)/2$ . Una combinación lineal de las dos primeras ecuaciones del sistema anterior lo transforma en otro equivalente<sup>2,3</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial t} - \frac{a}{k R_p} \frac{\partial s}{\partial t} + \lambda_1 \left( \frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{a}{k R_p} \frac{\partial s}{\partial x} \right) = - \frac{au}{F} \frac{dF}{dx} \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} - \frac{a}{k R_p} \frac{\partial s}{\partial t} + \lambda_2 \left( \frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{a}{k R_p} \frac{\partial s}{\partial x} \right) = - \frac{au}{F} \frac{dF}{dx} \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2),$$

en el cual  $R_1 = a/\delta - u$  y  $R_2 = a/\delta + u$  constituyen las denominadas variables de Riemann; cuyas correspondientes velocidades de propagación están dadas por  $\lambda_1 = u - a$  y  $\lambda_2 = u + a$ . Evidentemente, la última ecuación del sistema precedente establece que la entropía es transportada con la velocidad del fluido ( $u$ ).

En el Método de las Características, las ecuaciones de gobierno (2) son expresadas sobre las direcciones características, obteniéndose una formulación más compacta en diferenciales totales<sup>1,2,3</sup>; según:

$$\begin{cases} dR_1 = - \frac{au}{F} \frac{dF}{dx} dt + \frac{a}{k R_p} ds & C_1 : \frac{dx}{dt} = \lambda_1 = u - a \\ dR_2 = - \frac{au}{F} \frac{dF}{dx} dt + \frac{a}{k R_p} ds & C_2 : \frac{dx}{dt} = \lambda_2 = u + a \\ ds = 0 & C_3 : \frac{dx}{dt} = \lambda_3 = u \end{cases} \quad (3).$$

En razón de las interpolaciones necesarias, la integración aproximada del sistema anterior se traduce en un esquema en Diferencias Finitas. Para simplificar el análisis, considerando el flujo homentrópico<sup>1</sup> ( $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$ ) en un conducto de sección constante ( $\frac{dF}{dx} = 0$ ), el sistema de ecuaciones características (3) queda reducido a:

$$\begin{cases} dR_1 = 0 & C_1 : \frac{dx}{dt} = \lambda_1 \\ dR_2 = 0 & C_2 : \frac{dx}{dt} = \lambda_2 \end{cases} \quad (4).$$

Para una aproximación de primer orden de las características ( $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ) y suponiendo flujo subsónico, la Figura 1 expone las direcciones que, al tiempo  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ , se intersecan en la posición nodal  $x_{(i)}$ . Requiriéndose las condiciones del fluido en los puntos *A* y *B* a fin de integrar (4); sin embargo, tratándose de un problema discreto, las variables al instante  $t^n$  sólo están definidas en los nodos de la grilla; lo cual impone interpolar para estimarlas en los puntos de interés (*A* y *B*). Así, una interpolación lineal de  $R_{2A}$  y  $R_{1B}$  arroja:

$$R_{2A}^n \cong R_{2(i)}^n - \frac{x_{(i)} - x_A}{\Delta x} [R_{2(i)}^n - R_{2(i-1)}^n]$$

$$R_{1B}^n \cong R_{1(i)}^n + \frac{x_B - x_{(i)}}{\Delta x} [R_{1(i+1)}^n - R_{1(i)}^n]$$

De la Figura 1 surgen  $x_{(i)} - x_A = \Delta t \lambda_{2A}$  y  $x_B - x_{(i)} = -\Delta t \lambda_{1B}$ ; y, además, integrando las ecuaciones de (4) sobre sus correspondientes características, resulta:

$$\begin{cases} R_{2(i)}^{n+1} = R_{2(i)}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_{2A} [R_{2(i)}^n - R_{2(i-1)}^n] \\ R_{1(i)}^{n+1} = R_{1(i)}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_{1B} [R_{1(i+1)}^n - R_{1(i)}^n] \end{cases} \quad (5).$$

Las ecuaciones del sistema precedente contienen expresiones en diferencias de primer orden de las derivadas parciales de las variables de Riemann:

$$\left. \frac{\partial R_2}{\partial t} \right|_{(i)} \cong \frac{R_{2(i)}^{n+1} - R_{2(i)}^n}{\Delta t}, \quad \left. \frac{\partial R_1}{\partial t} \right|_{(i)} \cong \frac{R_{1(i)}^{n+1} - R_{1(i)}^n}{\Delta t},$$

$$\left. \frac{\partial R_2}{\partial x} \right|_{(i)}^n \cong \frac{R_{2(i)}^n - R_{2(i-1)}^n}{\Delta x} \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial R_1}{\partial x} \right|_{(i)}^n \cong \frac{R_{1(i+1)}^n - R_{1(i)}^n}{\Delta x}.$$

Entonces, se verifica que al implementar el Método de las Características, considerando  $\lambda_{2A}^n \cong \lambda_{2(i)}^n$  y  $\lambda_{1B}^n \cong \lambda_{1(i)}^n$ , el esquema resultante queda expresado en Diferencias Finitas.

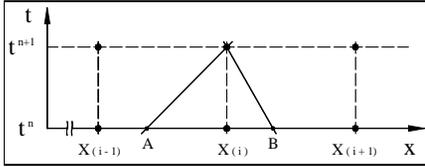


Figura 1

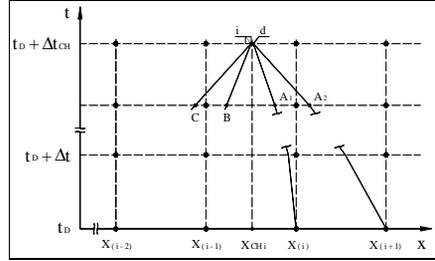


Figura 2

El empleo de diferencias espacialmente atrasadas o adelantadas, conforme sea el sentido de la propagación de las perturbaciones (esquema full upwind), responde a la necesidad de estabilizar las soluciones a través de tiempo; restringiendo la amplitud del paso temporal, de acuerdo con la condición de Courant, Friedrich y Levy (CFL)<sup>2,3</sup>:

$$\Delta t \leq \Delta x / \text{Max} (|\lambda_{1(i)}|, |\lambda_{2(i)}|) \quad (6).$$

La formulación en Diferencias Finitas, deducida para una corriente homentrópica en un conducto de sección constante, admite extenderse a flujos más generales; en particular, abarcando al caso isoentrópico. Luego, adoptando una grilla fija y uniforme y una discretización temporal regida por (6), con aproximación de primer orden en el espacio y en el tiempo, el flujo isoentrópico es resuelto numéricamente mediante el esquema<sup>3</sup>:

$$\begin{cases} R_{1(i)}^{n+1} = R_{1(i)}^n + \Delta t \left[ f_{1(i)}^n + \frac{a_{(i)}^n}{k R_p} f_{3(i)}^n + f_{4(i)}^n \right] \\ R_{2(i)}^{n+1} = R_{2(i)}^n + \Delta t \left[ f_{2(i)}^n + \frac{a_{(i)}^n}{k R_p} f_{3(i)}^n + f_{4(i)}^n \right] \\ s_{(i)}^{n+1} = s_{(i)}^n + \Delta t f_{3(i)}^n \end{cases} \quad (7);$$

donde aparecen los siguientes términos fuente:

$$f_{1(i)}^n = -\lambda_{1(i)}^n \left\{ \left[ \frac{R_{1(i+1)}^n - R_{1(i)}^n}{\Delta x} - \frac{a_{(i)}^n}{k R_p} \frac{[s_{(i+1)}^n - s_{(i)}^n]}{\Delta x} \right] \right\} \quad \text{si } \lambda_{1(i)}^n < 0$$

$$f_{1(i)}^n = -\lambda_{1(i)}^n \left\{ \left[ \frac{R_{1(i)}^n - R_{1(i-1)}^n}{\Delta x} - \frac{a_{(i)}^n}{k R_p} \frac{[s_{(i)}^n - s_{(i-1)}^n]}{\Delta x} \right] \right\} \quad \text{si } \lambda_{1(i)}^n > 0$$

$$f_{2(i)}^n = -\lambda_{2(i)}^n \left\{ \frac{[R_{2(i+1)}^n - R_{2(i)}^n]}{\Delta x} - \frac{a_{(i)}^n [s_{(i+1)}^n - s_{(i)}^n]}{kR_p \Delta x} \right\} \quad \text{si } \lambda_{2(i)}^n < 0$$

$$f_{2(i)}^n = -\lambda_{2(i)}^n \left\{ \frac{[R_{2(i)}^n - R_{2(i-1)}^n]}{\Delta x} - \frac{a_{(i)}^n [s_{(i)}^n - s_{(i-1)}^n]}{kR_p \Delta x} \right\} \quad \text{si } \lambda_{2(i)}^n > 0$$

$$f_{3(i)}^n = -u_{(i)}^n \frac{[s_{(i)}^n - s_{(i-1)}^n]}{\Delta x} \quad \text{si } u_{(i)}^n > 0$$

$$f_{3(i)}^n = -u_{(i)}^n \frac{[s_{(i+1)}^n - s_{(i)}^n]}{\Delta x} \quad \text{si } u_{(i)}^n < 0$$

$$f_{4(i)}^n = -\frac{a_{(i)}^n u_{(i)}^n}{F_{(i)}} \left( \frac{dF}{dx} \right)_{(i)}.$$

## 2.1 Formación de una onda de choque normal

Las ondas de compresión débiles son supuestas isoentrópicas pues las originan incrementos infinitesimales de la presión; propagándose la información a favor y en contra de la corriente con las respectivas velocidades características. En las ondas de compresión, a los sucesivos incrementos de la presión (y velocidad) se asocian crecientes celeridades de propagación, pues cada una está definida por el nivel de presión y la velocidad del fluido vigentes al generarse el correspondiente incremento. Luego, establecida una onda de compresión en cierto campo de flujo puede formarse un choque. Esta brusca transición ocurre cuando y donde se vuelve infinita la derivada espacial de alguno de los campos del flujo. Justamente, tal concepto sirve de fundamento a los esquemas numéricos explicados más adelante para detectar la formación del choque.

Considerando que  $A$  y  $B$  son los estados del gas inmediatamente a los lados de una onda normal de choque estacionaria y suponiendo que el salto de la presión, al atravesarla con el sentido de la corriente, es  $\Delta p_{CH} = p_B - p_A > 0$ ; surgen implicadas las relaciones  $M_A = u_A / a_A > 1$ ,  $M_B = u_B / a_B < 1$  y  $\left| \frac{\partial R_1}{\partial x} \right|_A \rightarrow +\infty$ . Aclarando esto, vale recordar desde la definición de las variables de Riemann que:

$$\left( \frac{\partial R_1}{\partial x} \right)_{(x,t)} \Delta x = \left[ \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial a}{\partial x} \right)_{(x,t)} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(x,t)} \right] \Delta x \cong \frac{1}{\delta} \Delta a - \Delta u \quad (8)$$

y abreviando, para un flujo homentrópico en un conducto de sección uniforme, la relación lineal entre las velocidades del fluido y sónica sobre la característica  $\lambda_1$  es  $\Delta a / \delta - \Delta u = 0$ ; que sustituida en (8), conduce a:  $dR_1|_{\lambda_1} = 0$ . Por lo tanto, si generalizamos esta idea a los

campos continuos de flujo, concluimos:  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t = \Delta x / \lambda_1}} \left[ \left( \frac{\partial R_1}{\partial x} \right)_{(x,t)} \Delta x \right] = 0$  y, en consecuencia:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t = \Delta x / \lambda_1}} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial R_1}{\partial x} \right)_{(x,t)} \Delta x \right] / a_{(x,t)} \right\} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t = \Delta x / \lambda_1}} [\Delta R_1 / a_{(x,t)}] = 0 \quad (9).$$

El estricto cumplimiento de la anterior se verifica en las regiones donde el campo de flujo permanece continuo; en cambio, si aparece una discontinuidad por intersección de las características de la familia  $\lambda_1$ , la (9) sobreviene no nula. Semejante comportamiento sugiere la conveniencia de introducir las funciones<sup>3</sup>:

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t = \Delta x / \lambda_1}} [\Delta R_1 / a_{(x,t)}] \\ \Sigma_2 = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t = \Delta x / \lambda_2}} [\Delta R_2 / a_{(x,t)}] \end{cases} \quad (10).$$

En razón de lo expuesto, la simultánea nulidad de las funciones de (10) constituye la condición necesaria para la continuidad del campo de flujo; y, en contrario, cuando cualquiera de esas funciones deja de ser nula, el campo presenta una discontinuidad; por ejemplo un choque. Entonces, planteando el correlato numérico de (10) respecto de aquel choque, que anticipamos flanqueado por los estados  $A$  y  $B$ , vale proponer:

$$\Sigma_1 = \Delta R_1 / a_A = (R_{1B} - R_{1A}) / a_A \quad (11).$$

Para el caso  $\Delta p_{CH} = p_B - p_A < 0$ , con  $M_A < 1$  y  $M_B > 1$ , debe atenderse el incremento en la variable de Riemann  $R_2$ , de acuerdo con:

$$\Sigma_2 = \Delta R_2 / a_B = (R_{2A} - R_{2B}) / a_B \quad (12).$$

Introduciendo las expresiones de  $R_1$  y la definición del número de Mach para los puntos  $A$  y  $B$ , la (11) se reescribe como:

$$\Sigma_1 = \frac{a_B}{a_A} \left( \frac{1}{\delta} - M_B \right) + M_A - \frac{1}{\delta} \quad (13).$$

Las condiciones del fluido a los lados del choque satisfacen las relaciones de Rankine – Hugoniot, que, para una onda estacionaria, pueden expresarse según:

$$M_B = \frac{\sqrt{1 + \delta(M_A)^2}}{\sqrt{k(M_A)^2 - \delta}} \quad (14),$$

$$\frac{a_B}{a_A} = \frac{\sqrt{[k(M_A)^2 - \delta][1 + \delta(M_A)^2]}}{(1 + \delta)M_A} \quad (15).$$

Reemplazando las equivalencias (14) y (15) en (13) y operando, se obtiene:

$$\Sigma_1 = \frac{\sqrt{[k(M_A)^2 - \delta][1 + \delta(M_A)^2] + \delta[(M_A)^2 - 1]}}{\delta(1 + \delta)M_A} - \frac{1}{\delta} \quad (16).$$

Luego, valuando  $\Sigma_1$  en los nodos interiores del dominio mediante la expresión (11), la ecuación (16) permite estimar el número de Mach en el punto  $A$  empleando una técnica iterativa, dada la no linealidad de dicha relación. No obstante, para eludir ese cálculo tan costoso computacionalmente, es preferible, alrededor de  $M_A = 1$ , aproximar al primer orden el desarrollo de Taylor de (16); al arreglar la aproximación, dentro del rango  $1 \leq M_A \leq M_{max}$ , se tiene, para el flanco supersónico del choque y al momento de su ocurrencia, la siguiente estimación del Mach<sup>3</sup>:

$$M_A \cong 1 + \left[ (M_{max} - 1) / \Sigma_{1(M_{max})} \right] \Sigma_1 \quad (17).$$

Una vez determinado el valor de  $\Sigma_1$  en los nodos interiores de la grilla, se aplica la (17) para estimar el número de Mach de cada nodo; si en alguno de éstos el valor del estimado supera la unidad (el límite utilizado en el presente trabajo fue 1.05), interpretamos que aconteció la aparición de un choque en la vecindad de dicho nodo. Ejemplificando con referencia a la Figura 2, para el nodo  $i$  al instante  $t_D$  (completados  $n_D$  pasos temporales), admitimos formada una onda normal de choque a causa del cruce de un par de curvas características de la familia  $\lambda_1$ ; o sea,  $\lambda_{1(i)}^{n_D}$  y  $\lambda_{1(i+1)}^{n_D}$ , siendo determinado el tiempo correspondiente conforme:

$$t_{CHi} = t_D + \Delta t_{CH} = t_D + \Delta x / \left[ \lambda_{1(i)}^{n_D} - \lambda_{1(i+1)}^{n_D} \right] \quad (18).$$

En general, entre el instante de la detección provisional del choque ( $t_D$ ) y el de su “efectiva ocurrencia” (a los fines numéricos)  $t_{CHi}$  media un lapso de tiempo  $\Delta t_{CH}$  varias veces superior al  $\Delta t$  de cálculo que fija la condición CFL del problema. En consecuencia, mejorar la detección impone extender las curvas características cuya concurrencia fuera pronosticada al tiempo  $t_D$ ; determinándose, en los instantes sucesivos, las respectivas pendientes interpolando linealmente entre nodos adyacentes a las posiciones que, al cabo de cada paso de tiempo, escalan las “marchas características”. La estrategia de captura recién descrita supone una sofisticación innecesaria en el caso homentrópico; empero, ese tipo de refinamiento surge

ineludible cuando pretendemos una cuidada detección de choques en flujos isoentrópicos y no isoentrópicos desarrollados en conductos de sección variable.

Entendiendo que, al tiempo  $t > t_{CHi}$ , ya está formado el choque por el encuentro del par de características  $\lambda_1$ ; obviamente, el procedimiento “de captura” explicado sólo demanda reiterar la aplicación de (18) hasta tanto se verifique  $t_{CHi} - t \geq \Delta t$ . Para el primer tiempo de cálculo ( $t$ ) que incumpla la última desigualdad, se rectifica la amplitud del paso temporal (6), adoptando  $\Delta t = t_{CHi} - t$ . La posición inicial de la onda de choque,  $x_{CHi}$ , queda determinada cual la intersección de aquellas características extendidas. Por supuesto, hasta el instante  $t_{CHi}^-$ , inmediatamente antes de establecerse el choque en  $t = t_{CHi}$ , los campos del flujo son continuos.

Al tiempo  $t_{CHi}^-$ , el gas inmediatamente a los lados de la posición  $x_{CHi}$ , según se ubique en el flanco  $x_{CHi}^-$  o en  $x_{CHi}^+$ , posee distintos estados denominados, respectivamente,  $d$  e  $i$  en la Figura 2. Tales estados constituyen las condiciones a los lados de la discontinuidad que da origen al choque; determinándose las a seguir:

– Estado  $d$ :

Con relación a la Figura 2, en el instante  $t_{CHi}^-$  convergen a la posición  $x_{CHi}$  las curvas características  $\lambda_{1A_2}$ ,  $\lambda_{2C}$  y  $\lambda_{3B}$  definiendo, para una aproximación de primer orden, el sistema de relaciones cinemáticas siguiente:

$$\begin{cases} (x_{CHi} - x_B) / \Delta t = u_B \\ (x_{CHi} - x_C) / \Delta t = u_C + a_C \end{cases} \quad (19);$$

que, sustituido por la simple interpolación lineal de las velocidades entre nodos vecinos, se convierte en un sistema equivalente sólo en las variables de posición; cuya resolución arroja  $x_B$  y  $x_C$  y, después, retomando (19) las velocidades  $u_B$ ,  $u_C$  y  $a_C$ .

Las tres características consideradas ( $\lambda_{1A_2}$ ,  $\lambda_{2C}$  y  $\lambda_{3B}$ ) transportan la información que permite calcular el estado  $d$  al resolver el sistema:

$$\begin{cases} \frac{(a_d - a_C)}{\delta} + (u_d - u_C) = -\frac{a_C u_C}{F_C} \left( \frac{dF}{dx} \right)_C \Delta t + \frac{a_C}{k R_p} (s_d - s_C) \\ \frac{(a_d - a_{A_2})}{\delta} + (u_d - u_{A_2}) = -\frac{a_{A_2} u_{A_2}}{F_{A_2}} \left( \frac{dF}{dx} \right)_{A_2} \Delta t + \frac{a_{A_2}}{k R_p} (s_d - s_{A_2}) \\ s_d - s_B = 0 \end{cases} \quad (20).$$

– Estado  $i$ :

No habiéndose formado el choque (Véanse la Figuras 2 y 3), también vale el cálculo de las condiciones del gas en la posición  $x_{CHi}^-$ , al tiempo  $t_{CHi}^-$ , reuniendo en un único sistema las ecuaciones de propagación:  $\lambda_{1A_i}$  con las que también son comunes al sistema (19)  $\lambda_{2C}$  y  $\lambda_{3B}$ ; estableciéndose análogamente:

$$\begin{cases} \frac{(a_i - a_{A_i})}{\delta} - (u_i - u_{A_i}) = -\frac{a_{A_i} u_{A_i}}{F_{A_i}} \left( \frac{dF}{dx} \right)_{A_i} \Delta t + \frac{a_{A_i}}{k R_p} (s_i - s_{A_i}) \\ \frac{(a_i - a_C)}{\delta} + (u_i - u_C) = -\frac{a_C u_C}{F_C} \left( \frac{dF}{dx} \right)_C \Delta t + \frac{a_C}{k R_p} (s_i - s_C) \\ s_i - s_B = 0 \end{cases} \quad (21).$$

Con simultaneidad a la formación del choque y en la posición de ese evento son engendrados una discontinuidad de contacto y un abanico de expansión<sup>2,3</sup>. Tal y tan drástica alteración del régimen de flujo se acepta que ocurre en la posición  $x_{CHi}$ , flanqueada con antelación inmediata ( $t_{CHi}^-$ ), por los estados  $d$  e  $i$  ahora conocidos.

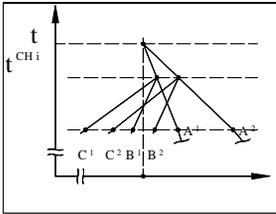


Figura 3

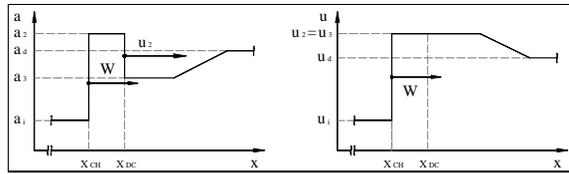


Figura 4

De manera instantánea, al tiempo  $t = t_{CHi}$  y en la posición  $x = x_{CHi}$ , los estados  $d$  e  $i$  son relevados por la solución del sistema que, junto a las relaciones (14) y (15) expresadas en función de los índices de Mach relativos al choque (referencia inercial animada de la velocidad instantánea del choque), también agrupa otras propias del choque, de la discontinuidad de contacto y del abanico de expansión; resumiendo (Véase Figura 4):

$$\begin{cases} M_i^* = |M_i - W / a_i|; \quad M_2^* = |M_2 - W / a_2| \\ a_3 / a_d = [1 - \delta \operatorname{sgn}(\Delta p_{CH}) M_d] / [1 - \delta \operatorname{sgn}(\Delta p_{CH}) M_3] \\ M_2 a_2 = M_3 a_3; \quad (a_3 / a_i)^{k/\delta} = [1 + k (M_i^*)^2] / [1 + k (M_2^*)^2] \end{cases} \quad (22).$$

Para abreviar, el análisis fue planteado respecto del caso en el cual el choque proviene de la discontinuidad que ocasiona el cruce de las características  $\lambda_1$ ; no obstante, el estudio sería

totalmente análogo si la discontinuidad, en cambio, fuese debida a la intersección entre direcciones de la familia  $\lambda_2$ . Sin embargo, a pesar de la salvedad observada, las soluciones del sistema que reúne las relaciones (14) y (15) con el sistema (22), merced a la inclusión del signo de  $\Delta p_{CH}$ , constituyen en general las condiciones del gas a los lados del choque inmediatamente después de su ocurrencia ( $t=t_{CHi}$ ). Enfatizándose que el signo de  $\Delta p_{CH}$  configura un aspecto crucial de la estrategia de captura propuesta. Asimismo, si la formación del choque origina un aumento de entropía muy pequeño, es apropiado obviar la discontinuidad de contacto y tratar el campo entrópico como una distribución continua.

## 2.2 Condiciones en los flancos de una onda de choque

Procurando simplificar y generalizar el esquema de seguimiento del choque, describimos su evolución según una referencia inercial móvil animada, en cada paso de tiempo, con la propia celeridad del choque. Esta exacta coincidencia entre la velocidad del referencial y la del choque significa que, al tiempo  $t^n$ , la onda de choque es estacionaria; implicando para el sentido del flujo que resulte determinado sólo por la diferencia entre las presiones reinantes corriente abajo y arriba de dicha discontinuidad. Concretando, si  $\text{sgn}(\Delta p_{CH}) > 0$  también, relativo al choque, es positivo el flujo, supersónico su régimen sobre el flanco corriente arriba de la discontinuidad y subsónico del lado corriente abajo.

Las coordenadas de posición absolutas y las relativas están conectadas mediante la simple transformación galileana:

$$\begin{cases} x_{(t)}^* = x - x_{CH(t)} \\ x_{(t+\Delta t)}^* = x - x_{CH(t)} - W_{(t)}\Delta t \\ u^* = u - W_{(t)} \end{cases} \quad (23).$$

Por tanto, expresadas en la referencia móvil, las velocidades características resultan:

$$\begin{cases} \lambda_1^* = \lambda_1 - W_{(t)} = u - a - W_{(t)} \\ \lambda_2^* = \lambda_2 - W_{(t)} = u + a - W_{(t)} \\ \lambda_3^* = \lambda_3 - W_{(t)} = u - W_{(t)} \end{cases}$$

El análisis que sigue está sustentado en la hipótesis  $\Delta p_{CH} > 0$ , valiendo un abordaje totalmente análogo para la el caso  $\Delta p_{CH} < 0$ .

Considerando la Figura 5, en la región supersónica del flujo relativo, al tiempo  $t^{n+1}$ , concurren a la posición del choque tres direcciones características cuyas pendientes son positivas; es decir, la información únicamente proviene del lado corriente arriba de la discontinuidad; estableciéndose, para una aproximación de primer orden, las relaciones cinemáticas siguientes:

$$\begin{cases} [x_{CH}^{*n+1} - x_A^{*n}] / \Delta t = u_A^* + a_A \\ [x_{CH}^{*n+1} - x_B^{*n}] / \Delta t = u_B^* - a_B \\ [x_{CH}^{*n+1} - x_D^{*n}] / \Delta t = u_D^* \end{cases} \quad (24).$$

Interpolando linealmente los valores de  $u$  y  $a$  en el sistema anterior, queda reducido a otro formulado en las variables de posición; determinándose en éstas las características del flujo ( $u$ ,  $a$  y  $s$ ) y la geometría del conducto ( $F$  y  $\frac{dF}{dx}$ ). La integración de primer orden de las ecuaciones características sobre sus respectivas direcciones características conduce a:

$$\begin{cases} \frac{(a_E - a_A)}{\delta} + (u_E - u_A) = -\frac{a_A u_A^*}{F_A} \left( \frac{dF}{dx} \right)_A \Delta t + \frac{a_A}{k R_p} (s_E - s_A) \\ \frac{(a_E - a_B)}{\delta} - (u_E - u_B) = -\frac{a_B u_B^*}{F_B} \left( \frac{dF}{dx} \right)_B \Delta t + \frac{a_B}{k R_p} (s_E - s_B) \\ s_E - s_D = 0 \end{cases} \quad (25).$$

Relativo a la Figura 5, desde la zona del flujo subsónico apenas puede alcanzar la posición del choque, al instante  $t^{n+1}$ , sólo una característica de la familia  $\lambda_1^*$ ; las restantes parten de la región supersónica; entonces, apelando al primer orden de aproximación para la característica  $\lambda_{1C}^*$ , son formuladas una relación cinemática y una de conservación:

$$\begin{cases} [x_{CH}^{*n+1} - x_C^{*n}] / \Delta t = u_C^* - a_C \\ \frac{(a_F - a_C)}{\delta} - (u_F - u_C) = -\frac{a_C u_C^*}{F_C} \left( \frac{dF}{dx} \right)_C \Delta t + \frac{a_C}{k R_p} (s_F - s_C) \end{cases} \quad (26).$$

Dos relaciones de Rankine – Hugoniot, vinculando las condiciones del flujo a los lados de la onda de choque, son reescritas a continuación:

$$\begin{cases} M_F^* = \sqrt{[1 + \delta (M_E^*)^2] / [k(M_E^*)^2 - \delta]} \\ a_F / a_E = \left\{ \sqrt{[k(M_E^*)^2 - \delta] [1 + \delta (M_E^*)^2]} \right\} / [(1 + \delta) M_E^*] \end{cases} \quad (27);$$

donde:

$$\begin{cases} M_E^* = |u_E - W_{(t+\Delta t)}| / a_E \\ M_F^* = |u_F - W_{(t+\Delta t)}| / a_F \end{cases} \quad (28).$$

El gas que atraviesa el choque sufre un aumento de la entropía específica dado por:

$$s_F - s_E = \left[ R_p / (2\delta) \right] \left[ \ln(p_F / p_E) - k \ln(\rho_F / \rho_E) \right].$$

Introduciendo en la última las relaciones de Rankine – Hugoniot para las razones entre las presiones y las densidades a los lados del choque, surge una expresión alternativa para calcular el incremento entrópico, precisando:

$$s_F - s_E = \frac{R_p}{2\delta} \left\{ \ln \left[ \frac{k(M_E^*)^2 - \delta}{1 + \delta} \right] - k \ln \left[ \frac{(1 + \delta)(M_E^*)^2}{1 + \delta(M_E^*)^2} \right] \right\} \quad (29).$$

Los sistemas (24) a (28) y la expresión (29) son agrupados en un único sistema para la resolución de las trece incógnitas simultáneas:  $x_A, x_B, x_C, x_D, a_E, u_E, s_E, M_E^*, a_F, u_F, s_F, M_F^*$  y  $W_{(t+\Delta t)}$ ; las cuales interpretan, por una parte: las posiciones de partida al tiempo  $t^n$  de las ‘marchas características’; y, al tiempo  $t^{n+1}$ , las condiciones termodinámicas y de movimiento del gas sobre los flancos del choque y su propia celeridad. A seguir, resumimos una metodología para resolver el sistema resultante, desacoplándolo mediante una estimación de la solución de (24); sustituyendo en ésta la coordenada de posición por la aproximación  $x_{CH}^{n+1} \equiv x_{CH}^n + W_{(t)} \Delta t$ . Luego, operada la sustitución del estimado, la resolución de (24) define las posiciones aproximadas de los puntos  $A, B, C$  y  $D$ ; la resolución del sistema (25) arroja las aproximaciones de las condiciones del gas en el flanco supersónico del choque ( $a_E, u_E$  y  $s_E$ ). La segunda ecuación de (25) y la última de (26), sirven a la estimación del incremento  $\Delta R_1$ ; el cual, conforme (16), queda expresado en función de  $M_E^*$ , índice que, con el auxilio de (29), permite aproximar la entropía específica del lado corriente abajo del choque ( $s_F$ ). Cuanto dijimos acerca del procedimiento de estimación, significa reducir el problema a una sola ecuación no lineal en la incógnita  $M_E^*$ ; o sea:

$$a_E \left\{ \frac{\sqrt{[k(M_E^*)^2 - \delta][1 + \delta(M_E^*)^2]} + \delta[(M_E^*)^2 - 1]}{\delta(1 + \delta)M_E^*} - \frac{1}{\delta} \right\} = \left( \frac{a_C}{\delta} - u_C \right) - \left( \frac{a_B}{\delta} - u_B \right) +$$

$$+ \frac{a_B u_B^*}{F_B} \left( \frac{dF}{dx} \right)_B \Delta t - \frac{a_C u_C^*}{F_C} \left( \frac{dF}{dx} \right)_C \Delta t + \quad (30);$$

$$\frac{a_C}{kR_p} \left| s_D + \frac{R_p}{2\delta} \left\{ \ln \left[ \frac{k(M_E^*)^2 - \delta}{1 + \delta} \right] - k \ln \left[ \frac{(1 + \delta)(M_E^*)^2}{1 + \delta(M_E^*)^2} \right] \right\} - s_C \right| - \frac{a_B}{kR_p} (s_D - s_B)$$

que puede aproximarse mediante un método iterativo de la familia Newton – Raphson.

El estimado de  $M_E^*$  provisto por (30), por simple sustitución, aproxima las restantes variables. La posición del choque, al tiempo  $t^{n+1}$ , se aproxima según:

$$x_{CH}^{n+1} = x_{CH}^n + \int_t^{t+\Delta t} W dt \equiv x_{CH}^n + [W_{(t)} + W_{(t+\Delta t)}] \Delta t / 2 \quad (31);$$

que será recalculada iterativamente hasta la convergencia de (24).

### 2.3 Actualización en los nodos vecinos al choque

Conocida en el instante  $t^n$  la corriente, mediante el esquema numérico explícito adoptado (7), vale actualizarla al tiempo  $t^{n+1}$  sólo en las regiones del dominio que excluyen discontinuidades del campo de flujo. Por el contrario, ese esquema es en general incorrecto a propósito de actualizar la solución en aquellos nodos de la grilla entre los cuales queda comprendida una discontinuidad en  $t^{n+1}$ ; sencillamente, porque las características que la atraviesan, al hacerlo, pueden no sólo modificar sus celeridades de propagación, sino también los valores de las magnitudes transportadas. Esta dificultad puede salvarse, si aquellos nodos que en  $t^{n+1}$  flanquean el arribo de la discontinuidad, son sometidos al especial tratamiento que explicamos a continuación. Por ejemplo, coherente con los análisis previos, el estudio acerca del choque se funda en la hipótesis  $\Delta p_{CH} > 0$  y la evolución del campo de flujo es descripta desde una referencia inercial que, escoltando instantáneamente a esa discontinuidad, sostiene su misma velocidad de marcha (choque estacionario).

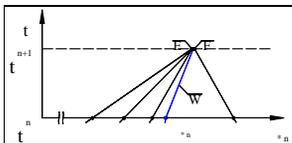


Figura 5

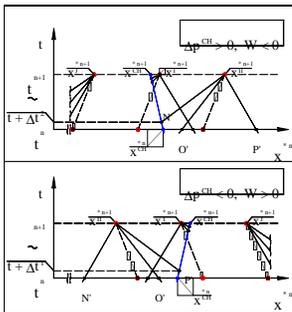


Figura 7

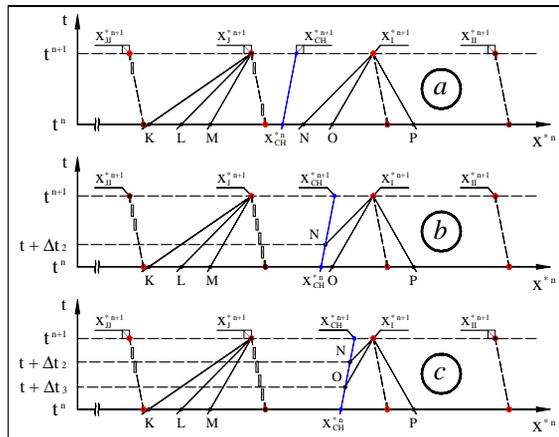


Figura 6

De acuerdo con la Figura 6, en la región donde el flujo relativo es supersónico y al tiempo  $t^{n+1}$ , concurren a la posición del nodo más cercano al choque tres características procedentes de su lado corriente arriba; lo cual habilita la actualización del nodo mediante el esquema válido para el caso genérico; pero destacando que para este cálculo deben emplearse las coordenadas y velocidades determinadas con respecto de la referencia animada con la celeridad  $W_{(t)}$ . Concretando, resumimos lo anterior en el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_J^{*n+1} - x_K^*) / \Delta t = u_K^* + a_K \\ (x_J^{*n+1} - x_L^*) / \Delta t = u_L^* \\ (x_J^{*n+1} - x_M^*) / \Delta t = u_M^* - a_M \\ \frac{(a_J - a_K)}{\delta} + (u_J - u_K) = -\frac{a_K u_K^*}{F_K} \left( \frac{dF}{dx} \right)_K \Delta t + \frac{a_K}{k R_p} (s_J - s_K) \\ \frac{(a_J - a_M)}{\delta} - (u_J - u_M) = -\frac{a_M u_M^*}{F_M} \left( \frac{dF}{dx} \right)_M \Delta t + \frac{a_M}{k R_p} (s_J - s_M) \\ s_J - s_L = 0 \end{array} \right. \quad (32).$$

La Figura 6 ilustra que, en la región donde del flujo relativo subsónico y al tiempo  $t^{n+1}$ , también concurren tres características a la posición del nodo vecino al choque; dos procedentes del lado corriente arriba y una desplegada desde el lado corriente abajo ( $\lambda_1^*$ ); aportando esta última, para una aproximación de primer orden, la relación cinemática:

$$(x_I^{*n+1} - x_p^*) / \Delta t = u_p^* - a_p$$

Las otras características surgen desde la región en la cual se encuentra el choque; siendo factible que una o, incluso, ambas lo atraviesen dentro del intervalo de amplitud  $\Delta t$ .

A estas alturas de la discusión, conocidas las condiciones a los lados del choque tanto en el instante  $t^n$  como en el  $t^{n+1}$  es razonable, durante el lapso  $\Delta t$ , asumir una variación lineal de tales condiciones y, entonces, predecir el momento del encuentro entre el choque y la característica considerada. Con referencia a las Figuras 6 b y 6 c, la ecuación de alcance entre el choque y la característica  $\lambda_2^*$  resulta:

$$\left[ x_I^{*n+1} - x_{CH(t+\Delta t_2)}^* \right] / (\Delta t - \Delta t_2) = u_N^* + a_N \quad (33),$$

donde las velocidades  $u_N$  y  $a_N$  son las interpoladas linealmente. La (33) se convierte en una ecuación cuadrática en la incógnita  $\Delta t_2$ , cuya solución está comprendida en alguno de los casos siguientes:

- Si  $0 \leq \Delta t_2 \leq \Delta t$ , la característica  $\lambda_2^*$  traspone el choque en el instante  $t+\Delta t_2$  (Véanse Figuras 6 b y c).

- Si  $\Delta t_2 < 0$  o  $\Delta t_2 > \Delta t$ , la característica y la onda de choque no se encuentran durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . La semblanza  $a$  de la Figura 6 ejemplifica un caso.

Para la curva característica  $\lambda_{3O}^*$  realizamos similar análisis, obteniéndose:

$$\left[ x_I^{*n+1} - x_{CH(t+\Delta t_3)}^* \right] / (\Delta t - \Delta t_3) = u_O^* \quad (34);$$

en cuanto a la solución  $\Delta t_3$ , las conclusiones son análogas a las de la discusión preliminar sobre la característica  $\lambda_{2N}^*$ .

Reuniendo las ecuaciones características integradas, se establece el sistema que, al tiempo  $t^{n+1}$  y en la posición  $x_I$ , resuelve las variables del flujo:

$$\begin{cases} \left( \frac{a_I - a_N}{\delta} + (u_I - u_N) = - \frac{a_N u_N^*}{F_N} \left( \frac{dF}{dx} \right)_N (\Delta t - \Delta t) + \frac{a}{k R_p} (s_I - s_N) \right. \\ \left. \frac{a_I - a_p}{\delta} - (u_I - u_p) = - \frac{a_p u_p^*}{F_p} \left( \frac{dF}{dx} \right)_p \Delta t + \frac{a}{k R_p} (s_I - s_p) \right. \\ \left. s_I - s_O = 0 \right. \end{cases} \quad (35);$$

$$\text{donde } \Delta t = \begin{cases} \Delta t_2 & \text{si } 0 \leq \Delta t_2 \leq \Delta t \\ 0 & \text{si } \Delta t_2 < 0 \wedge \Delta t_2 > 0 \end{cases}.$$

La corrección propuesta para actualizar al instante  $t^{n+1}$  la solución en los nodos inmediatamente adyacentes al choque, denominados  $J$  e  $I$  en la Figura 6, es suficiente cuando son empleados esquemas de primer orden y se aplicará a todos los flujos que incluyan un choque.

Además, son posibles dos casos en los cuales un nodo adicional de la malla requiere un tratamiento diferenciado, distinguiéndolos por la relación entre los signos de la velocidad del choque y del salto de la presión a sus lados. Discriminando así, obtenemos:

1.-  $\Delta p_{CH} > 0$  y  $W < 0$ .

Siendo  $\Delta p_{CH} > 0$ , la región del flujo subsónico relativo se extiende corriente abajo del choque; sin embargo, para  $W < 0$  puede ocurrir el encuentro de la discontinuidad y la característica  $\lambda_{2N}^*$ , la cual alcanza la posición  $x_{II}$  en  $t^{n+1}$ , cruzándose mientras transcurre el paso temporal de la actualización (Véase Figura 7). El esquema empleado para actualizar el flujo en la posición del nodo  $x_{II}^{*n+1}$  resulta análogo al que corrige las variables del nodo en  $x_I^{*n+1}$ . Entonces, de acuerdo con la Figura 7, determinamos el tiempo del encuentro de  $\lambda_{2N}^*$  y el choque,  $t + \tilde{\Delta}t_2$ , resolviendo la siguiente relación cinemática:

$$\left[ x_{II}^{*n+1} - x_{CH(t+\tilde{\Delta}t_2)}^* \right] / (\Delta t - \tilde{\Delta}t_2) = u_{N'}^* + a_{N'} \quad (36).$$

Acerca del valor  $\tilde{\Delta}t_2$  de la solución corresponde análogo análisis a aquel aplicado a  $\Delta t_2$ .  
 2.-  $\Delta p_{CH} < 0$  y  $W > 0$ .

Como en el caso anterior, puede imponerse corregir las variables del nodo  $x_H^{*n+1}$ . Según expone la Figura 7, extendiéndose la región del flujo subsónico relativo (al choque) a izquierda del choque, es probable el encuentro de éste y la característica  $\lambda_{1p}^*$ . En consecuencia, resolviendo la relación:

$$\left[ x_H^{*n+1} - x_{CH(t+\tilde{\Delta}t_1)}^* \right] / (\Delta t - \tilde{\Delta}t_1) = u_p^* - a_p \quad (37),$$

se obtiene el instante del encuentro entre la marcha característica y la onda de choque, es decir,  $t + \tilde{\Delta}t_1$ .

### 3 RESOLUCION NUMERICA

El test propuesto fue resuelto numéricamente recurriendo a esquemas en Diferencias Finitas tipo full upwind de primer y segundo orden, conforme derivaciones del Método de las Características por vía de las interpolaciones necesarias. Una estrategia que reúne contribuciones de sendas técnicas fue empleada para captar el choque y describir su ulterior comportamiento; similar enfoque se aplicó al estudio de la discontinuidad de contacto.

En este problema se adoptó una discretización espacial fija y uniforme de 100 elementos sobre la longitud total de la conducción, incluyendo una tobera, cuya sección transversal varía con su alejamiento ( $x_F$ ) de la sección de entrada ( $F_0 = 2.5$ ) conforme la ley<sup>2</sup>:

$$F(x) = \begin{cases} 1 + 1.5(1 - x/5)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 1 + 0.5(1 - x/5)^2 & \text{si } 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

La estabilidad de la solución se asegura ajustando la amplitud del paso temporal con arreglo a la condición (6).

Las características que franquean tanto el choque como la discontinuidad de contacto, fueron modelizadas imponiendo nodos adicionales móviles: un par por cada singularidad, en su correspondiente posición instantánea. Por ejemplo, un nodo inmediatamente a cada lado del choque, soportando las condiciones locales del gas sobre ese flanco de la discontinuidad y, además, su propio ritmo de marcha. Con tal opción quedan habilitadas múltiples y variadas alternativas para refinar el progreso temporal de cada singularidad.

El esquema que implementa el código contrastado incorpora en una fuente la variabilidad espacial de la sección de pasaje<sup>1,2,3,4</sup>. Asimismo, para tratar con flujos no isoentrópicos, el programa admite el agregado de otras fuentes que toman en cuenta la transferencia de calor desde o hacia la pared del conducto y la fricción contra éstas<sup>1,3,4</sup>.

Fijadas las condiciones de estancamiento del gas (Aire:  $R_p = 287$  J/K Kg y  $k = 1.4$ ) en el reservorio en  $p_0 = 4.25 \times 10^4$  Pa y  $T_0 = 300$  K, aplicando un esquema de primer orden han sido obtenidos los distintos resultados gráficos mostrados; debiendo atenderse, respecto de tales figuras, las consideraciones enumeradas a continuación: 1) En Figuras 8 a 11 inclusive: los centros de los círculos representan los valores nodales de los campos numéricos; y las líneas

lneas interpretan las respectivas soluciones analíticas; 2) En las Figuras 12 a 17 inclusive: los colores de las líneas connotan la presión de descarga impuesta (atmosférica) según: en verde:  $p_a = 3.7224 \times 10^4$  Pa; en rojo:  $p_a = 3.6114 \times 10^4$  Pa; en azul:  $p_a = 3.3806 \times 10^4$  Pa; en negro:  $p_a = 3.0421 \times 10^4$  Pa, y en magenta:  $p_a = 2.6169 \times 10^4$  Pa; y 3) En las figuras 12 a 15 inclusive, en las cercanías del choque, respecto de la correspondiente solución exacta, los errores porcentuales de cada campo numérico exhiben un incremento significativo, atribuible a la conjunción adversa de dos contribuciones: a) En forma recíproca a la variación espacial de la sección en la posición del choque estacionario, está asociada la mayor sensibilidad del flujo permanente (convergado), frente a alteraciones leves de la presión de descarga; b) Los nodos adicionales que, flanqueando al choque, registran su evolución numérica, convergen una vez sucedido el transitorio a una posición desfasada, respecto del resultado analítico, apenas una fracción de longitud de la discretización espacial  $\Delta x$ . Sin embargo, con tan pequeño desfasaje surge localizado un aumento importante del error; pero, no relevante físicamente a la luz del significado expuesto. Obviamente, los dos efectos se combinan en los mayores "errores" para los choques estacionarios en la vecindad corriente abajo de la garganta.

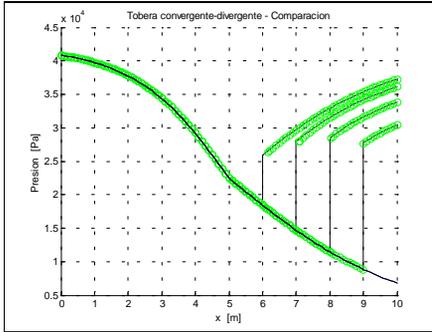


Figura 8

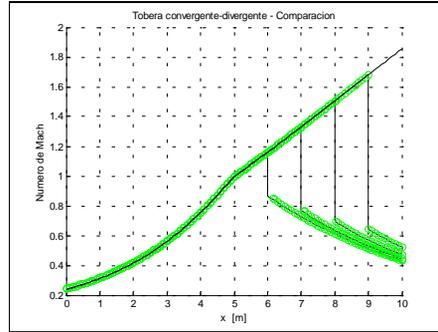


Figura 9

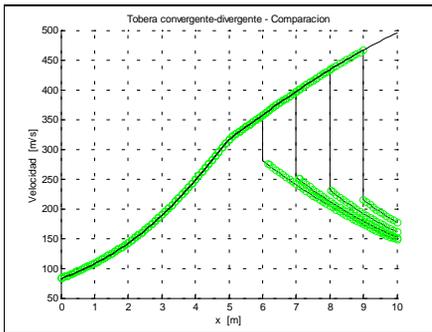


Figura 10

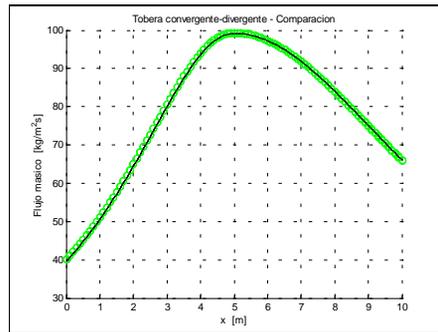


Figura 11

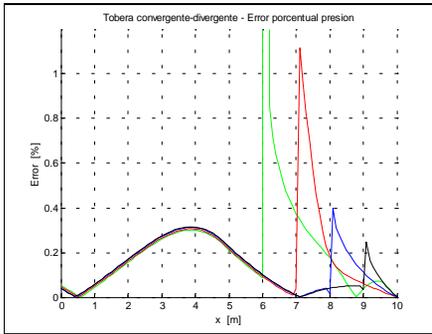


Figura 12

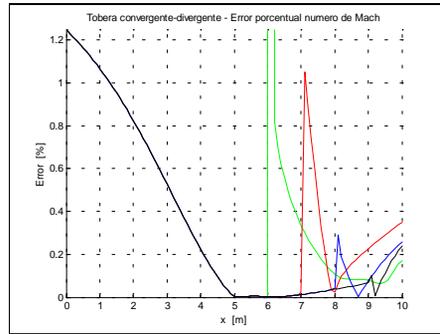


Figura 13

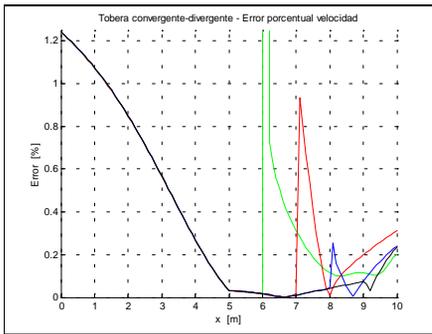


Figura 14

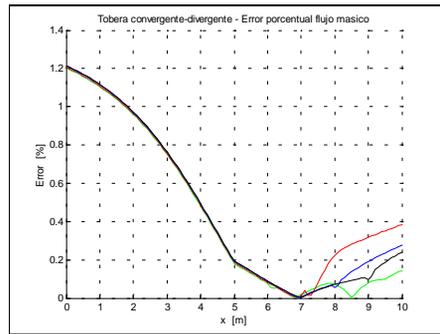


Figura 15

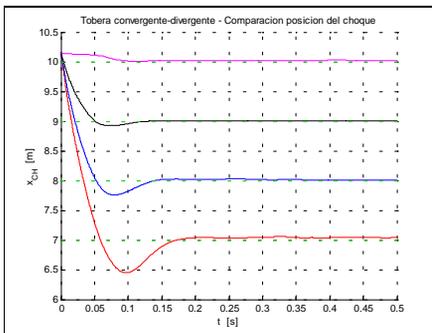


Figura 16

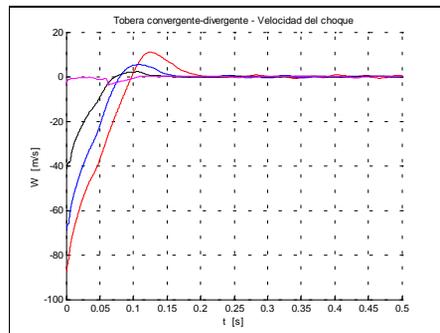


Figura 17

#### 4 CONCLUSIONES

Este trabajo propuso un código computacional, basado en la aplicación al flujo compresible del Método de las Características, que resulta hábil para capturar y seguir con elevado detalle la evolución temporal de choques y discontinuidades de contacto.

Partiendo de adecuadas condiciones iniciales, fue simulado un flujo gaseoso transiente en una tobera de Laval, comprobando que los campos numéricos convergidos reproducen fielmente los predichos por las soluciones analíticas que obedece el escurrimiento en el régimen de diseño. Asimismo, asumiendo totalmente desarrollado este régimen, se impuso una perturbación del flujo en la región de descarga de la tobera para provocar un choque móvil de intensidad acotada que prospera en contra del flujo. El transiente inducido por uno de tales choques deriva hacia un régimen permanente cuyos campos también admiten predicción analítica; habiendo sido excelente el acuerdo entre los resultados numéricos convergidos y las soluciones exactas correspondientes.

La descripción numérica del movimiento del choque exhibió un comportamiento físicamente consistente, con un "carácter sobrearmortiguado" previsible: la onda proveniente de la descarga de la tobera penetró su tramo divergente hasta estabilizarse, después de invertir su marcha, en una posición que, respecto de la solución exacta correspondiente, arroja errores de menor cuantía que la amplitud de la discretización espacial (Figura 16). Esta convergencia hace presumir satisfactoria la performance del esquema para resolver el transitorio que media entre la perturbación del régimen de diseño y el estado permanente contrastado al chequearlo con la respectiva solución analítica. Luego, en virtud de los resultados obtenidos, surge razonable aceptar validada la aptitud del código a los fines de simular flujos transitorios compresibles que incluyen discontinuidades.

La contrastación exitosa del código afianza su confiabilidad y sugiere conveniente incorporarlo a un programa para la simulación 1D de motores.

#### 5 REFERENCIAS

- [1] R. Benson, *The thermodynamics and gas dynamics of internal combustion engines*, Clarendon Press, Vol. I., (1982).
- [2] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows*, John Wiley & Sons, Vol. II., (1989).
- [3] G. Bella, *Modelación numérica de motores*, Notas Curso U.N. La Plata, (2001).
- [4] N. Nigro, *Dinámica de gases en ductos y toberas*, Informe 0796 - INTEC , (1996).