Mecánica Computacional Vol. XXI, pp. 1161–1175
S. R. Idelsohn, V. E. Sonzogni and A. Cardona (Eds.)
Santa Fe–Paraná, Argentina, October 2002

FORMULACIÓN MIXTA DE EF COMPATIBLE CON TEORÍAS CONSTITUTIVAS DE GRADIENTES

Sonia Mariel Vrech*y José Guillermo Etse*

*Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería (CEMNCI)
Universidad Nacional de Tucumán
Avda. Independencia 1800, 4000 Tucumán, Argentina
e-mail: cemnci@herrera.unt.edu.ar

Key Words: Gradientes, Formulación Mixta.

Abstract. *En el presente trabajo se presenta primeramente una formulación constitutiva no lineal basada en la Teoría de Gradientes de Deformaciones para el análisis de procesos de falla de campos bidimensionales. Complementariamente se discuten las técnicas numéricas desarrolladas para la implementación eficiente del modelo constitutivo. Seguidamente se recrea la formulación mixta de elementos finitos, la cuál es usada comparativamente con elementos conformes y en conjunción con modelos constitutivos de gradientes para analizar las predicciones de falla de sólidos bidimensionales. El trabajo conduce a conclusiones relevantes en cuanto a la influencia de las formulaciones mixtas de elementos finitos para el análisis de procesos de falla mediante modelos constitutivos no lineales basados en la Teoría de Gradiente de Deformaciones.*

1. INTRODUCTION

El análisis del comportamiento de falla de materiales y sistemas estructurales requiere de formulaciones constitutivas no lineales. En el marco del concepto de *fisura difusa* la respuesta no lineal global o estructural es controlada por la relación constitutiva tensión-deformación a nivel de modelo material. Es decir, la descripción del proceso cinemático que se desarrolla a nivel de desplazamientos absolutos y relativos durante el comportamiento de falla del sistema estructural es modelado en el campo de deformaciones o de gradientes de desplazamientos. Esta metodología o concepto conlleva a la supresión de la escala geométrica que define la región o dominio donde se desarrollan los procesos cinemáticos. Como consecuencia, el espacio o región del elemento finito se convierte en la magnitud geométrica distintiva del proceso de disipación energética en virtud de la continuidad C^0 de las funciones de forma. En otras palabras, la modelación numérica de la falla estructural adolece de objetividad respecto del tamaño de la malla de elementos finitos lo cuál se manifiesta en predicciones completamente dependientes del grado de discretización del espacio o dominio donde se desarrolla el proceso de disipación energética.

Una de las teorías más eficientes y novedosas para solucionar este serio deficit del concepto de fisura difusa es la teoría de gradientes de deformación. La misma está asociada con descripciones por lo menos C^1 del campo de deformaciones aunque dicho enriquecimiento del mismo está limitado a un espacio definido mediante una longitud característica del problema de valores de borde, que se define externamente. Si bien el concepto fundamental de la teoría de gradientes es simple, su aplicación en modelos materiales no lineales y más aún, su implementación en códigos computacionales de elementos finitos es realmente compleja.

Desde su reciente propuesta, la teoría de gradientes ha logrado un fuerte eco y aceptación en la comunidad científica internacional lo cuál ha contribuido a un vertiginoso desarrollo de la misma en el análisis de procesos de falla en campos uni, bi y tridimensionales y en el marco de formulaciones no lineales elastoplásticas y de daño continuo.

Si bien los progresos hasta el presente son notables, quedan aún una serie de temas sin solución que consitan actualmente la atención de investigadores. Entre ellos se destaca el análisis y verificación de la eficiencia de la Teoría de Gradientes cuando se la usa conjuntamente con formulaciones mixtas de elementos finitos. Como es sabido, las formulaciones mixtas de elementos incluyen campos de deformaciones enriquecidos, no compatibles con el campo cinemático o de desplazamientos. Como consecuencia la energía de deformación del elemento finito mixto es menor que la del elemento finito compatible correspondiente en virtud de que nuevas formas propias se originan, algunas de ellas asociadas con energía de deformación nula. Desde el punto de vista de la mecánica no lineal de sólidos, las formulaciones mixtas de elementos finitos introducen una fuerte alteración (reducción) de las longitudes características de los procesos de falla ya que eliminan eventuales bloqueos que caracterizan a los elementos finitos compatibles.

El uso combinado de Teorías de Gradiente de Deformaciones y de formulaciones de elementos mixtos es aún un campo no investigado así como la influencia que dichas formulaciones traen en las longitudes características que se definen explícitamente en el caso de la Teorías de Gradientes.

Luego de una presentación de la Teoría Constitutiva de Gradientes se discute en el presente trabajo la implementación de la misma en campos bidimensionales. En este sentido se presenta un modelo constitutivo conjuntamente con los algoritmos numéricos para la implementación computacional.

Finalmente se presenta la formulación de elementos mixtos para discretizaciones de campos bidimensionales y se analiza la coexistencia de tales formulaciones con las Teorías locales y no locales de Gradientes.

2. MODELO DE ELASTOPLASTICIDAD DE GRADIENTES

En este paper trabajaremos bajo las siguientes hipótesis generales:

- Teoría de pequeñas deformaciones con restricción a deformaciones planas
- Elasticidad lineal isotrópica
- Hardening local isotrópico
- Hardening de gradiente lineal anisotrópico
- Criterio de fluencia de Von Mises

Para el caso de endureciminento/ablandamiento isotrópico, la función de fluencia viene dada por

$$F = \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma^*(\kappa) = 0 \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones y σ^* la tensión de fluencia dependiente del parámetro κ , que representa una magnitud equivalente a las deformaciones plásticas. Siendo $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ el tensor de deformaciones plásticas, la ley evolutiva de las deformaciones plásticas queda definida mediante la Ley del Flujo de la Plasticidad[1,2]

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\boldsymbol{m} \tag{2}$$

El multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ da el módulo y el tensor $\boldsymbol{m}$ la dirección del flujo plástico, que se obtiene como la derivada del potencial plástico G respecto del tensor de tensiones

$$\boldsymbol{m} = \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{3}$$

Definiendo al parámetro κ igual a la deformación plástica equivalente $\widetilde{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}$, su ley evolutiva está dada por

$$\dot{\kappa} = \widetilde{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \tag{4}$$

con la deformación plástica equivalente

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^p = |\dot{\varepsilon}^p| = \dot{\lambda}|\boldsymbol{m}| = \eta\dot{\lambda} \tag{5}$$

Con lo que

$$\dot{\kappa} = \eta\dot{\lambda} \tag{6}$$

Por lo general se elige $\boldsymbol{m}$ con módulo unitario, con lo que resulta $\eta = 1$.

2.1. Deformación no local

Los modelos continuos no locales se basan en promedios espaciales de variables de estado (tensoriales o escalares), en una cierta vecindad de un punto dado $\boldsymbol{x}$[3]. Se elige como variable de estado un valor representativo del estado de deformación, por ejemplo el parámetro plástico λ. Bajo hipótesis de no localidad, el comportamiento de un punto está gobernado por la deformación promedio en el volumen Ω_e ocupado por el elemento microestructural [4].

El parámetro plástico no local $\overline{\lambda}$ está dado por

$$\overline{\lambda}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\Omega_e}\int_{\Omega_e(x)} \lambda(x) d\Omega \tag{7}$$

Desarrollando $\lambda(\boldsymbol{x})$ en Serie de Taylor e integrando ec.(7), se obtiene la expresión del parámetro plástico no local

$$\overline{\lambda} = \lambda + c\nabla^2\lambda \tag{8}$$

La longitud interna del modelo no local está incluida en el coeficiente de gradiente c, que tiene la dimensión del cuadrado de una longitud. Para el caso unidimensional, el coeficiente de gradiente c resulta[14]:

$$c = \frac{a^2}{24} \tag{9}$$

siendo a la longitud de la localización. El tensor de deformación plástica no local resulta

$$\overline{\dot{\varepsilon}^p} = \dot{\overline{\lambda}}\boldsymbol{m} = (\lambda + c\nabla^2\lambda)\boldsymbol{m} \tag{10}$$

De acuerdo a ecs.(5) y (9), la deformación plástica equivalente queda expresada como

$$\overline{\dot{\tilde{\varepsilon}}^p} = |\dot{\varepsilon}^p| = \eta(\lambda + c\nabla^2\lambda) = \overline{\dot{\varepsilon}^p} + \eta c\nabla^2\lambda \tag{11}$$

por lo tanto, el parámetro plástico no local $\overline{\dot{\kappa}}$, como

$$\overline{\dot{\kappa}} = \dot{\kappa} + \eta c\nabla^2\lambda \tag{12}$$

La expresión de la función de fluencia para el modelo no local resulta

$$F = \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma^*(\overline{\kappa}) = 0 \tag{13}$$

con

$$\overline{\kappa} = \eta\lambda + \eta c\nabla^2\lambda \tag{14}$$

siendo

$$\lambda = \int_0^t \dot{\lambda} dt; \quad \nabla^2\lambda = \int_0^t \nabla^2\dot{\lambda} dt \tag{15}$$

El criterio de fluencia y las condiciones de carga/descarga se expresan en la forma complementaria de Khun-Tucker

$$\dot{\lambda} \geq 0; \quad F \leq 0; \quad \dot{\lambda}F = 0 \tag{16}$$

y el flujo plástico está gobernado por la condición de consistencia elastoplástica $\dot{F} = 0$. La dependencia de la función de fluencia respecto del gradiente, hace que la condición de consistencia se convierta en una ecuación diferencial parcial no homogénea, de tipo Helmholz

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial(\eta\lambda)}\eta\dot{\lambda} + \frac{\partial F}{\partial(c\eta\nabla^2\lambda)}c\eta\dot{\nabla}^2\lambda = 0 \tag{17}$$

La ecuación anterior puede escribirse como

$$\dot{F} = \boldsymbol{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\dot{\lambda} + \frac{\partial F}{\partial(\nabla^2\lambda)}\nabla^2\lambda = 0 \tag{18}$$

llamando

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{19}$$

al gradiente de la función de fluencia,

$$h = -\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -\frac{\partial \sigma^*}{\partial \lambda} \tag{20}$$

al módulo de endureciminento/ablandamiento, y

$$g = \frac{\partial F}{\partial(\nabla^2\lambda)} = \frac{\partial \sigma^*}{\partial(\nabla^2\lambda)} \tag{21}$$

al módulo del gradiente, la ec.(17) resulta

$$\dot{F} = \boldsymbol{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - h\dot{\lambda} + g\nabla^2\dot{\lambda} = 0 \tag{22}$$

Uno de los algoritmos desarrollados para su solución, consiste en la formulación mixta del método de los EF[3] basado en las ecuaciones de equilibrio o Trabajo Virtual y de fluencia plástica. Utilizando una misma malla para ambas discretizaciones, ambos problemas se resuelven simultáneamente.

Otros algoritmos, como el desarrollado por Runesson y Svedberg[5], se basan en la regularización de gradientes y la Teoría de Daño Continuo, a partir de la consistencia termodinámica, utilizándose también la formulación mixta .

En este trabajo se analiza la solución basada en la Formulación Mixta de EF compatible con Teorías Constitutivas de Gradientes.

3. PLASTICIDAD DE GRADIENTES

3.1. Formulación mixta[3]

El objetivo es formular un algoritmo iterativo incremental que satisfaga las condiciones de equilibrio y de fluencia al final de cada paso de carga $(j+1)$[11].

Para toda variación admisible del vector desplazamiento, la satisfacción de la condición de equilibrio en sentido débil requiere (despreciando términos de fuerzas volumétricas)

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{u}^T (L^T \boldsymbol{\sigma}_{j+1}) d\Omega \tag{23}$$

Integrando por partes, descomponiendo $\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}_j + d\boldsymbol{\sigma}$ y considerando

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E_e}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \boldsymbol{m}) \tag{24}$$

siendo $\boldsymbol{E_e}$ la Matriz de rigidez Elástica. La ec.(23) resulta

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{E_e} d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T d\lambda \boldsymbol{m} d\Omega = -\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T d\boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{t}_{j+1} d\Gamma \tag{25}$$

Para toda variación admisible del parámetro plástico, igual a cero en el borde plástico, la condición de consistencia en sentido débil debe verificar

$$\int_{\Omega_\lambda} \delta\lambda F(\boldsymbol{\sigma}_{j+1}, \kappa_{j+1}, \nabla^2 \kappa_{j+1}) d\Omega = 0 \tag{26}$$

Desarrollando la función de fluencia en Serie de Taylor alrededor de $(\boldsymbol{\sigma}_j, \kappa_j, \nabla^2\kappa_j)$ y despreciando términos no lineales

$$F(\boldsymbol{\sigma}_{j+1}, \kappa_{j+1}, \nabla^2 \kappa_{j+1}) = F(\boldsymbol{\sigma}_j, \kappa_j, \nabla^2\kappa_j) + \dot{F}(\boldsymbol{\sigma}_j, \kappa_j, \nabla^2\kappa_j) \tag{27}$$

con

$$\dot{F}(\boldsymbol{\sigma}_j, \kappa_j, \nabla^2\kappa_j) = \boldsymbol{n}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - h\dot{\lambda} + g\nabla^2\dot{\lambda} \tag{28}$$

Integrando por partes el término del gradiente y con las condiciones para el borde plástico $\delta\lambda$

$$\delta d\lambda = 0 \quad o \quad (\nabla d\lambda)^T \boldsymbol{v}_\lambda = 0 \tag{29}$$

resulta

$$\int_{\Omega_\lambda} \delta\lambda[-\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{E_e} d\boldsymbol{\varepsilon} + (h + \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{E_e} \boldsymbol{m})] d\Omega + \int_{\Omega_\lambda} g(\nabla d\lambda)^T (\nabla d\lambda) d\Omega = \int_{\Omega_\lambda} \delta\lambda F_j d\Omega \tag{30}$$

3.2. Formulación de elementos de continuidad C^1

En esta formulación propuesta por de Borst y Mühlhaus[12] aparecen derivadas primeras del campo de desplazamientos y derivadas de segundo orden del multiplicador plástico. En consecuencia, la discretización del campo $\boldsymbol{u}$ requiere funciones de interpolación $\boldsymbol{N}$ de continuidad C^0, y la discretización del campo de deformaciones, funciones $\boldsymbol{B}$ derivadas de $\boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\overline{\boldsymbol{d}} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{d}} \tag{31}$$

La discretización del gradiente del multiplicador plástico resulta

$$\nabla\lambda = \boldsymbol{Q}^T\overline{\boldsymbol{\lambda}} \quad , \quad \boldsymbol{Q}^T = \nabla\boldsymbol{H}^T \tag{32}$$

y la discretización correspondiente al Laplaciano de multiplicador plástico

$$\nabla^2\lambda = \boldsymbol{P}^T\overline{\boldsymbol{\lambda}} \quad , \quad \boldsymbol{P}^T = \nabla^2\boldsymbol{H}^T \tag{33}$$

Sustituyendo las discretizaciones anteriores en las ecs. (25) y (30), se obtiene el set de ecuaciones algebraicas[13]

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K_{aa}} & \boldsymbol{K_{a\lambda}} \\ \boldsymbol{K_{\lambda a}} & \boldsymbol{K_{\lambda\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle\overline{\boldsymbol{d}} \\ \triangle\overline{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_e} - \boldsymbol{f_i} \\ \boldsymbol{f_\lambda} \end{pmatrix} \tag{34}$$

Con las matrices

$$\boldsymbol{K_{aa}} = \int_\Omega \boldsymbol{B^T D^e B} d\Omega, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{K_{a\lambda}} = \int_\Omega \boldsymbol{B E_e m H}^T d\Omega \quad , \quad \boldsymbol{K_{\lambda a}} = -\int_\Omega \boldsymbol{H n}^T \boldsymbol{E_e B} d\Omega, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{K_{\lambda\lambda}} = \int_\Omega [(h + \boldsymbol{n}^T \boldsymbol{E_e m})\boldsymbol{H H}^T - g\boldsymbol{H P}^T] d\Omega, \tag{37}$$

los vectores de fuerzas nodales externas y de esfuerzos internos

$$\boldsymbol{f_e} = \int_\Gamma \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{t}_{j+1} d\Gamma \quad , \quad \boldsymbol{f_i} = -\int_\Omega \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma}_j d\Omega \tag{38}$$

y el vector de fluencia

$$\boldsymbol{f_\lambda} = \int_\Omega \boldsymbol{H} F_j d\Omega \tag{39}$$

3.3. Formulación de elementos de continuidad C^0

Para permitir el uso de funciones de interpolación de continuidad C^0 para el campo del multiplicador plástico, se introducen nuevas variables[3]

$$\varphi_x = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad , \quad \varphi_y = \frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad , \quad \varphi_z = \frac{\partial \lambda}{\partial z} \tag{40}$$

reunidas en el vector $\boldsymbol{\Phi} = [\frac{\partial \lambda}{\partial x}, \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \frac{\partial \lambda}{\partial z}]$. De este modo el gradiente del multiplicador plástico es

$$\nabla \lambda = \boldsymbol{\Phi} \tag{41}$$

y el Laplaciano de λ

$$\nabla^2 \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \nabla^T \boldsymbol{\Phi}, \tag{42}$$

El producto escalar entre el operador ∇^T y el vector $\boldsymbol{\Phi}$ equivale al operador divergencia.

Los tres campos incógnita son $\boldsymbol{u}$, λ y $\boldsymbol{\Phi}$. Utilizando el procedimiento de penalización, se formula la ecuación variacional

$$\int_\Omega k(\nabla \lambda - \boldsymbol{\Phi})^T [\nabla(\delta\lambda) - \delta\boldsymbol{\Phi}] d\Omega = 0, \tag{43}$$

donde $k = E^3$ es el factor de penalización, con E igual al módulo de Young. En forma incremental la ec.(43) queda expresada como

$$k \int_\Omega \delta\lambda \nabla^T [\nabla(d\lambda) - d\boldsymbol{\Phi}] d\Omega - k \int_\Omega \delta\boldsymbol{\Phi}^T [\nabla(d\lambda) - d\boldsymbol{\Phi}] d\Omega = 0 \tag{44}$$

Las funciones de interpolación $\boldsymbol{H}$ son ahora de continuidad C^0, y la interpolación del campo de variables $\boldsymbol{\Phi}$ es

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{\Phi}} \tag{45}$$

donde el vector $\overline{\boldsymbol{\Phi}}$ contiene valores nodales y la matriz $\boldsymbol{P}$ es similar a $\boldsymbol{N}$. En esta formulación todas las funciones de interpolación de $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{P}$ son de continuidad C^0.

Discretizando las tres ecuaciones fundamentales ecs. (25), (30) y (44) resultan el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K_{aa}} & \boldsymbol{K_{a\lambda}} & 0 \\ \boldsymbol{K_{\lambda a}} & \boldsymbol{K_{\lambda\lambda}} & \boldsymbol{K_{\lambda\varphi}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K^c_{\lambda\lambda}} & \boldsymbol{K^c_{\lambda\varphi}} \\ 0 & \boldsymbol{K^c_{\lambda\varphi}}^T & \boldsymbol{K^c_{\varphi\varphi}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \triangle\overline{\boldsymbol{d}} \\ \triangle\overline{\boldsymbol{\lambda}} \\ \triangle\overline{\boldsymbol{\Phi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_e} - \boldsymbol{f_i} \\ \boldsymbol{f_\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

con las submatrices $\boldsymbol{K_{aa}}$, $\boldsymbol{K_{a\lambda}}$ y $\boldsymbol{K_{\lambda a}}$ dadas por ecs. (35) y (36), y las submatrices $\boldsymbol{K_{\lambda\lambda}}$ y $\boldsymbol{K_{\lambda\varphi}}$ definidas como

$$\boldsymbol{K_{\lambda\lambda}} = \int_\Omega (h + \boldsymbol{n}^T \boldsymbol{E_e} \boldsymbol{m}) \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T d\Omega \quad , \quad \boldsymbol{K_{\lambda\varphi}} = -\int_\Omega g \boldsymbol{H} \nabla^T \boldsymbol{P} d\Omega \tag{47}$$

Las submatrices $\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{\lambda\lambda}}$, $\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{\varphi\varphi}}$ y $\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{\lambda\varphi}}$ se definen como

$$\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{\lambda\lambda}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T d\Omega \quad , \quad \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{\varphi\varphi}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{P} d\Omega \quad , \quad \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{\lambda\varphi}} = \int_{\Omega} -\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P} d\Omega \tag{48}$$

En esta formulación todas las funciones de interpolación incluidas en $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{P}$ son de continuidad C^0.

3.4. Caso bidimensional

En la aproximación de elementos finitos el campo de desplazamientos bidimensional $\boldsymbol{u} = (u, v)$ se interpola en cada elemento de acuerdo a

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\overline{\boldsymbol{d}} = \sum_{i=1:n} \boldsymbol{N}_i(\xi, \eta)\overline{\boldsymbol{d}}_i, \tag{49}$$

siendo la matriz de funciones de forma y el vector de desplazamientos nodales

$$\boldsymbol{N}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_i & 0 \\ 0 & \boldsymbol{N}_i \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{d}_i = \begin{pmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \end{pmatrix} \tag{50}$$

y n el número de nodos por elemento.

En estado de deformaciones planas $\epsilon_z = 0$, se utiliza el vector de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \epsilon_z]$ y el de tensiones $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_z]$. En el estado de tensiones planas $\boldsymbol{\sigma}_z = 0$, el vector de deformaciones $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]$ y el de tensiones $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}]$.

Las relaciones de plasticidad dependientes de gradientes pueden obtenerse directamente a partir del caso continuo general, omitiendo los componenetes de corte fuera del plano y haciendo $\epsilon_z = 0$.[3]

3.5. Plasticidad de gradientes de Huber-Von Mises

La función de fluencia dependiente de gradientes de Huber- Von Mises puede escribirse

$$F = \sqrt{3J_2} - \sigma^*(\kappa, \nabla^2\kappa) \tag{51}$$

donde J_2 es el segundo invariante del tensor deviatórico de tensiones y σ^* la tensión de fluencia. Incorporando la matriz simétrica $\boldsymbol{P}$, que para el estado de deformaciones planas resulta

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \tag{52}$$

la función de fluencia puede expresarse

$$F = (\frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{\sigma})^2 - \boldsymbol{\sigma}^*(\kappa, \nabla^2\kappa) \tag{53}$$

El gradiente de la función de fluencia es

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\boldsymbol{P}\boldsymbol{\sigma}}{2(\frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\sigma})^{\frac{1}{2}}} \tag{54}$$

Para determinar el valor de la constante η se adopta la siguiente hipótesis de ablandamiento

$$\dot{\kappa} = [\frac{2}{3}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^T\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p]^{\frac{1}{2}} \tag{55}$$

con $\boldsymbol{Q} = diag[1, 1, \frac{1}{2}, 1]$ para el estado plano de deformaciones. Sustituyendo la tasa del vector de flujo plástico $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\boldsymbol{n}$ en la definición de $\dot{\kappa}$ y considerando que $\boldsymbol{PQP} = \boldsymbol{P}$ se obtiene

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \tag{56}$$

resultando $\eta = 1$.

4. MÉTODO MIXTO DE DEFORMACIONES ENRIQUECIDAS

4.1. Teorema variacional de Hu-Washizu para Elasticidad

El método de deformaciones enriquecidas es una alternativa del método mixto de elementos finitos[6]. Tiene sus orígenes en los primeros trabajos que utilizaron modos de desplazamientos incompatibles, sin embargo no presenta las deficiencias que los caracterizaba. En el siguiente trabajo se utilizará el Principio Variacional de Hu-Washizu (HW), basado en la formulación mixta. El fin de la misma es disminuir los requerimientos de las funciones de interpolación de las variables del problema y al mismo tiempo, elevar el número de éstas últimas: desplazamientos, deformación y tensiones. El Principio Variacional de Hu-Washizu, fue desarrollado simultáneamente por Hu[7] y Washizu[8], siendo el principio general de la Teoría de la Elasticidad

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathcal{E} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathcal{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T \cdot (\nabla^s \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega \\ - \int_\Omega \boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{b}_v d\Omega - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{u}^T \cdot \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u}^T - \overline{\boldsymbol{u}}) d\Gamma = Estacionario \end{aligned} \tag{57}$$

Siendo $\boldsymbol{u}$ el vector desplazamiento, $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones, $\boldsymbol{\varepsilon}$ el tensor de deformaciones totales, $\mathcal{E}$ el operador material elástico, $\boldsymbol{b}_v$ el vector de fuerzas volumétrica y $\bar{\boldsymbol{t}}$ el vector de fuerzas externas. Por simplicidad, se ignorarán de ahora en más los términos dependientes de deformaciones iniciales $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, de fuezas internas volumétricas y las condiciones de borde impuestas para desplazamientos $\overline{\boldsymbol{u}}$. Se denominará con $W_{ext}(\boldsymbol{u})$ al trabajo de las fuerzas externas. La expresión simplificada resulta

$$\Pi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathcal{E} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T \cdot (\nabla^s \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega - W_{ext}(\boldsymbol{u}) = Estacionario \tag{58}$$

Sobre la base del Principio Variacional H-W ec.(58) fueron formulados varios elementos; otros fueron formulados matemáticamente a partir del mismo, pero considerando modos incompatibles[9].

Por ejemplo, el elemento $QM6$ fue desarrollado por Taylor, Beresford y Wilson[10] para mejorar el comportamiento bajo solicitaciones de flexión del elemento bilineal compatible $Q4$; y el elemento $Q1E4$, fue formulado por Simo y Rifai[6] en el marco de la Formulación Mixta de desplazamientos y deformaciones.

El tensor deformación se expresa en forma aditiva como la suma del gradiente simétrico del vector desplazamiento $\nabla^s \boldsymbol{u}$ y el tensor de deformaciones enriquecidas $\boldsymbol{\varepsilon}^*$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^*) = \nabla^s \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{59}$$

El Principio Variacional de Hu-Washizu resulta

$$\Pi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^*) = \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla^s \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}^*)^T : \mathcal{E} : (\nabla^s \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}^*)] d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega - W_{ext}(\boldsymbol{u}) \tag{60}$$

La estacionaridad de ec.(60) está dada por

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \eta} = \int_\Omega (\nabla^s \delta \boldsymbol{u})^T : \mathcal{E} : (\nabla^s \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}^*)] d\Omega + \int_\Omega \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot [\mathcal{E} : (\nabla^s \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}^*) - \boldsymbol{\sigma}] d\Omega - \int_\Omega \delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega - W_{ext}(\delta \boldsymbol{u}) = 0 \tag{61}$$

Las ecuaciones de Euler del Principio HW son:

1) Ecuación de Equilibrio

$$\int_\Omega (L \delta \boldsymbol{u})^T \cdot [\mathcal{E} : (\nabla^s \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}^*)] d\Omega - W_{ext}(\delta \boldsymbol{u}) = 0 \tag{62}$$

2) Ecuación de Compatibilidad

$$\int_\Omega \delta \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega = 0 \tag{63}$$

3) Ecuación Constitutiva

$$\int_\Omega \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \cdot [\mathcal{E} : (\nabla^s \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}^*) - \boldsymbol{\sigma}] d\Omega = 0 \tag{64}$$

La ec.(63) implica que el campo de deformaciones enriquecido, en sentido integral en cada elemento, debe desaparecer en la solución, al igual que el equilibrio y las ecuaciones constitutivas. Por lo tanto no será necesario forzar la continuidad de $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ entre elementos.

4.2. Aproximación de elementos finitos

El campo de desplazamientos aparece derivado (primer orden) mientras que los campos de tensiones y de deformaciones enriquecidas aparecen sin derivar. De acuerdo a esto, el campo de desplazamientos se aproximará con funciones $\boldsymbol{N}$ de continuidad C^0 , y el de deformaciones standard con funciones $\boldsymbol{B}$, derivadas primeras de $\boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\xi})\overline{\boldsymbol{d}} \quad , \quad \nabla^s \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi})\overline{\boldsymbol{d}} \tag{65}$$

donde $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$ representa el sistema coordenado isoparamétrico.

Los campos de tensiones y de deformaciones enriquecidas se interpolan con funciones $\boldsymbol{G}_\sigma$ y $\boldsymbol{G}$
respectivamente, ambas de continuidad C^{-1}

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{G}_\sigma(\boldsymbol{\zeta})\overline{\boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\zeta})\overline{\boldsymbol{\alpha}} \tag{66}$$

La elección de funciones de interpolación $\boldsymbol{G}_\sigma$ apropiadas dependerá de la elección de las funciones de interpolación $\boldsymbol{G}$. Las condiciones de dichas funciones fueron establecidas por Simo y Rifai[6].

4.3. Procedimiento de solución para Elastoplasticidad

Una vez realizada la discretización de elementos finitos, el Teorema Variacional de Hu-Washizu se aproxima sumando las integrales sobre cada elemento

$$\Pi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^*) = \Pi_h(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^*) \approx \sum_e \Pi_e(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^*) \tag{67}$$

La estacionaridad de HW para cada elemento coincide con ec.(61).

Las ecuaciones de Euler del Principio HW quedan expresadas en la forma

1) Ecuación de Equilibrio

$$\int_\Omega (L\delta\boldsymbol{u})^T \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})d\Omega - W_{ext}(\delta\boldsymbol{u}) = 0 \tag{68}$$

2) Ecuación de Compatibilidad

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega = 0 \tag{69}$$

3) Ecuación Constitutiva

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{*}} \cdot [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}]d\Omega = 0 \tag{70}$$

Con la elección del campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^h$ ortogonal al de deformaciones enriquecidas $\boldsymbol{\varepsilon}^{h^*}$, el primero resulta eliminado en la aproximación de elementos finitos. El problema variacional discretizado conduce al siguiente sistema de ecuaciones nolineales[9]:

$$\begin{aligned} \sum_e [\boldsymbol{f_{int}} - \boldsymbol{f_{ext}}] &= 0 \\ \boldsymbol{h}_e &= 0 \end{aligned} \tag{71}$$

Siendo:

$$\boldsymbol{f_{int}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}^h) d\Omega, \tag{72}$$

$$\boldsymbol{h}_e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}^h) d\Omega \tag{73}$$

y $\boldsymbol{f_{ext}}$ el vector de fuerzas nodales externas.

La solución de este sistema de ecuaciones se encuentra mediante el Método de Newton y la condensación de los grados de libertad $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ a nivel de elementos.

El algoritmo solución, en el marco de la Elastoplasticidad es:

1) Actualización del vector de desplazamientos nodales en la iteración $i+1$

$$\overline{\boldsymbol{d}}^{i+1} = \overline{\boldsymbol{d}}^i + \Delta \overline{\boldsymbol{d}}^i \tag{74}$$

2) Actualización del parámetro $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ en el elemento.

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{i+1} = \overline{\boldsymbol{\alpha}}^i - \frac{\boldsymbol{k_{21}}^i \Delta \boldsymbol{d}^i - \boldsymbol{h}^i}{\boldsymbol{k_{22}}^i}, \tag{75}$$

   donde el residuo de elementos $\boldsymbol{h}^i$ y las matrices de elementos $\boldsymbol{k_{22}}^i$ y $\boldsymbol{k_{21}}^i$ son calculados en la iteración i con el parámetro $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^i$

3) Cálculo del vector deformación total

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1} = \boldsymbol{B}^{i+1} \overline{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{G}^{i+1} \overline{\boldsymbol{\alpha}} \tag{76}$$

4) Cálculo de $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$ y la Matriz elastoplástica consistente $\boldsymbol{E_{ep}}^{i+1}$.

   Actualización de parámetros de estado internos.

5) Integración de las matrices de elementos

$$\boldsymbol{k_{11}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{E_{ep}}^{i+1} \boldsymbol{B} d\Omega \tag{77}$$

$$\boldsymbol{k_{22}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{E_{ep}}^{i+1} \boldsymbol{B} d\Omega, \tag{78}$$

$$\boldsymbol{k_{21}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{E_{ep}}^{i+1} \boldsymbol{B} d\Omega \quad , \quad \boldsymbol{k_{12}} = \boldsymbol{k_{21}}^T \tag{79}$$

y vectores residuos pertenecientes a elementos

$$\boldsymbol{h}^{i+1} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{\sigma}^{i+1} d\Omega \tag{80}$$

$$\boldsymbol{f_{int}}^{i+1} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{i+1} d\Omega \tag{81}$$

6) Cálculo de la matriz de rigidez tangente y fuerza interna modificadas

$$\boldsymbol{k_0}^{i+1} = \boldsymbol{k}^{i+1} - \frac{(\boldsymbol{k_{21}}^{i+1})^T \boldsymbol{k_{21}}^{i+1}}{\boldsymbol{k_{22}}^{i+1}} \tag{82}$$

$$\boldsymbol{f_{int0}}^{i+1} = \boldsymbol{f_{int}}^{i+1} - \frac{\boldsymbol{k_{21}}^{i+1} \boldsymbol{h}^{i+1}}{\boldsymbol{k_{22}}^{i+1}} \tag{83}$$

7) Cálculo de la solución para un nuevo incremento del vector desplazamiento.

$$\boldsymbol{R_0}^{i+1} = \sum_e [\boldsymbol{f}_{ext} - \boldsymbol{f_{int}}^{i+1}] \tag{84}$$

$$\boldsymbol{K_0}^{i+1} = \sum_e \boldsymbol{k_0}^{i+1} \tag{85}$$

$$\Delta \boldsymbol{d}^{i+1} = [\boldsymbol{K_0}^{i+1}]^{-1} \boldsymbol{R_0}^{i+1} \tag{86}$$

8) $i = i + 1$, continúa en 1

La convergencia se alcanza cuando $\mid \boldsymbol{R_0}^{i+1} \mid < tol$. El procedimiento de condensación exige que la matriz de elementos $\boldsymbol{k_{22}}$ sea no singular.

5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se presentó un modelo constitutivo elastoplástico para campos bidimensionales basado en la Teoría de Gradientes. Los desarrollos incluyen las soluciones algebraicas de gradientes superiores de deformaciones en sistemas planos, lo cuál constituye un hecho no trivial. La aplicación de dicho modelo en discretizaciones de elementos finitos basados en formulaciones compatibles demuestran en este trabajo la viabilidad y eficiencia del modelo y algoritmos desarrollados. Asímismo, la consideración de campos discretizados mediante elementos finitos mixtos plantea interrogantes de importancia, cuyo análisis constituye el objetivo de los trabajos aquí abordados.

REFERENCIAS

[1] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*, volume II. Oxford University Press, (1950).

[2] Oliver J. Oller S. Lubliner, J. and Oñate. A plastic-damage model for concrete. *Int. J. Solids Struct.*, **25**, 299–326 (1989).

[3] J. Pamin. *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena.* TU-Delft, The Netherlands, (1994).

[4] R.H.J. Peerlings. *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue.* CIP-Data Library Technische Universiteit Eindhoven, (1999).

[5] T. Svedberg. *On the Modelling and Numerics of Gradient-Regularized Plasticity Coupled to Damage.* U. Göteborg, Sweden, (1999).

[6] J.C Simo and M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **29**, 1595–1638 (1990).

[7] H. Hu. On variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity. *SCI Sinica, Peking*, **4**, 33–54 (1955).

[8] K. Washizu. On variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity. *Massachusets Institute of Technology, USA*, **25** (1955).

[9] G. Etse. *Theoretische und numerische Untersuchung zum difussen und lokalisierten Versagen in Beton.* TU, Karlsruhe, (1992).

[10] R. Beresford P. Taylor and Wilson E. Non-conforming element for stress analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **6**, 1211–1219 (1976).

[11] R. de Borst and H.B. Mühlhaus. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **35**, 521–539 (1992).

[12] R. de Borst and H.B. Mühlhaus. *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena.* TU-Delft, The Netherlands, (1991).

[13] S. Vrech and G. Etse. Teoría constitutiva de gradientes para modelos materiales elastoplásticos. *MECOM 2001*, (2001).

[14] S. Vrech. *Teoría constitutiva viscoplástica de Gradientes.* Universidad Nacional de Rosario, (2002).