

## IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS PARA TRANSFERENCIA DE CALOR

Carlos A. Labra, y Ramón Frederick

Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Mecánica  
Santiago, Chile

e-mail: clabra@ing.uchile.cl

e-mail: rfrederi@cec.uchile.cl

**Palabras Clave:** Transferencia de Calor, Método amallado, Método de Puntos Finitos, Problema de Graetz.

**Abstract.** *En el presente trabajo se hace un estudio del comportamiento del método sin malla de puntos finitos, el cual utiliza una interpolación local para definir el campo de aproximación alrededor de un punto, en términos de los valores de sus puntos adyacentes, donde el sistema de ecuaciones discretizadas es obtenida típicamente de la forma variacional de Galerkin. Se analiza el problema de Graetz, consistente en encontrar el campo de temperaturas, conociendo el perfil de velocidades en un ducto de placas paralelas en los casos de temperatura impuesta y de flujo impuesto. Los resultados son comparados con los obtenidos mediante el método de diferencias finitas y con soluciones analíticas, caracterizando las soluciones en cuanto a precisión y sensibilidad a la densidad de las nubes.*

## 1. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas complejos de ingeniería y, particularmente, de mecánica de fluidos, ha significado un gran desafío para los especialistas. Los métodos más utilizados para estos efectos son el método de elementos finitos, el método de diferencias finitas y el método de volúmenes finitos. Estos métodos tienen cierta facilidad para tratar dominios complejos de una forma simple, tratándolos con aproximaciones locales, consistiendo en la división del dominio en un número finito de subdominios, que cumplen condiciones geométricas regulares.

En el último tiempo se han desarrollado una serie de métodos libres malla o amallados, los cuales se han vuelto muy populares en la mecánica computacional<sup>1</sup>. Estos métodos buscan un modelo discreto completamente definido por nodos, por lo que solo se utilizan las coordenadas de estos para definir el dominio, además de la información necesaria para definir su contorno.

Existen distintas clases de métodos sin malla, principalmente diferenciadas por la forma de realizar la interpolación local de la función aproximada y la forma de obtener el sistema de ecuaciones discretas para cada problema<sup>1</sup>.

El método de Puntos Finitos<sup>2-5</sup> usa una interpolación local para definir el campo de aproximación alrededor de un punto, en términos de los valores de sus puntos adyacentes, donde el sistema de ecuaciones discretizadas es obtenido típicamente de la forma variacional de Galerkin, utilizando aproximaciones por la técnica de mínimos cuadrados ponderados. La base del éxito del MPF para aplicaciones de mecánica de sólidos y en mecánica de fluidos es la estabilización del sistema de ecuaciones discretizadas. La forma estable encontrada por el procedimiento de cálculo finitesimal corrige el error introducido por el procedimiento de colocación de puntos en el borde del dominio. En suma, se introduce la estabilización necesaria para tratar los efectos de convección alta y el igual orden de interpolación de velocidad-presión en problemas de flujo de fluidos.

En los siguientes apartados se presenta la implementación del método de puntos finitos para la resolución del problema de Graetz, tanto con paredes a temperatura impuesta como con flujo impuesto.

## 2. MÉTODO DE PUNTOS FINITOS ESTABILIZADOS

La discretización para el método de puntos finitos (MPF) para ecuaciones diferenciales parciales parte de la idea de realizar colocación puntual mediante la consideración de una función de ponderación de delta de Dirac al utilizar el método de residuos ponderados, lo cual nos permite trabajar directamente con los nodos y sus coordenadas.

Luego se considera un subdominio de interpolación  $\Omega_i$  para la función  $u(x)$ , con  $s_j$  como la colección de los  $n$  puntos con coordenadas  $x_j \in \Omega_i$ .

La función desconocida  $u$  puede ser aproximada en  $\Omega_i$  por

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = \sum_{l=1}^n p_l(x) \alpha_l = p(x)^T \alpha \quad (1)$$

donde el vector  $p(x)$  es conocido como *función de interpolación básica* y  $\alpha^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \dots \alpha_n]$

es un vector de coeficientes. El vector  $p(x)$  contiene típicamente monomios, donde una base cuadrática en 2-D tiene la forma

$$p(x)^T = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2] \quad \text{para } m = 6 \tag{2}$$

Producto que se utiliza  $n > m$ , no es posible ajustar todos los valores de la aproximación a los valores de  $u^h$ . Este problema puede ser resuelto al minimizar la suma del error al cuadrado ponderado por una función de peso  $\varphi(x)$ , en función de los parámetros  $\alpha$  de la forma

$$J = \sum_{j=1}^n \varphi(x)(u_j^h - \hat{u}(x_j))^2 = \sum_{j=1}^n \varphi(x)(u_j^h - p_j^T \alpha)^2 \tag{3}$$

Este tipo de aproximación se denomina mínimos cuadrados ponderados.

La función de peso se construye usualmente de forma que se distinto de cero en el interior de la nube y que desaparezca fuera de esta, considerándose generalmente la unidad para el nodo estrella o central. En el presente trabajo se utiliza una función polinomial, de forma semejante a una función de Gauss normalizada.

De la minimización efectuada de (3), con respecto a  $\alpha$ , se obtiene:

$$\alpha = \bar{C}^{-1} u^h \tag{4}$$

donde

$$\bar{C}^{-1} = A^{-1} B \tag{5}$$

siendo las matrices  $A$  y  $B$ , respectivamente:

$$A = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) p(x_j) p^T(x_j) \tag{6}$$

$$B = [\varphi(x_1) p(x_1), \varphi(x_2) p(x_2), \dots, \varphi(x_n) p(x_n)] \tag{7}$$

Sustituyendo  $\alpha$  en la ecuación (1), la aproximación queda de la forma:

$$u(x) \cong \hat{u}(x) = p(x)^T C^{-1} u^h = N^T u^h \tag{8}$$

Quedando las funciones de forma como

$$N_i^k(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) C_{ij}^{-1} \tag{9}$$

donde el superíndice  $k$  se utiliza para recalcar que la función de forma  $N_i^k$  puede ser diferente para cada subdominio  $\Omega_k$ . Esto quiere decir que como la ecuación (1) se define para cada dominio de interpolación, un nodo que pertenezca a dos o mas de estos dominios de interpolación o nubes tiene funciones de forma con distintos valores, es decir  $N_i^j \neq N_i^k$ .

Producto que la función de peso es fija, la matriz  $C^{-1}$  es constante sobre cada nube, las derivadas de las funciones de forma quedan dadas por

$$\frac{\partial N_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p^T(x)}{\partial x_k} C^{-1} \tag{10}$$

## 2.1. Estabilización del sistema de ecuaciones

A partir de la técnica de colocación puntual, se puede llegar a un sistema de ecuaciones de la forma

$$Ku^h = f \quad (11)$$

donde la matriz  $K$  no es necesariamente simétrica,  $u^h$  es el vector incognita y  $f$  es el vector de contribuciones externas. La no-simetría presentada  $K$  agrega algunos problemas a una buena aproximación de la solución. Para esto se han utilizado una serie de esquemas de estabilización de las soluciones. Estos esquemas requieren una modificación del sistema de ecuaciones para evitar el mal condicionamiento de la matriz. En el caso de MPF, se utiliza un esquema de estabilización basado en un procedimiento de calculo finitesimal<sup>3,5-7</sup>. La idea de éste procedimiento consiste en imponer un balance de las ecuaciones sobre un dominio finito. El campo desconocido es aproximado en el dominio utilizando una expansión en series de Taylor, reteniendo los términos de orden superior para su utilización como términos de estabilización. Esto produce una estabilización natural de las ecuaciones, donde el sistema queda como

$$A - \frac{1}{2}h_k \frac{\partial A}{\partial x_k} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (12a)$$

$$B - \frac{1}{2}h_k n_k A = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad (12b)$$

$$u - u_p = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (12c)$$

Este nuevo sistema de ecuaciones puede ser escrito en forma matricial, de la siguiente forma

$$(K + K_s(h_k))u^h = f \quad (13)$$

Donde  $K$  es la matriz del sistema inicial y  $K_s$  es la matriz que incorpora los términos de estabilización, en función del parámetro  $h_k$ , el cual representa la dimensión del dominio utilizado para hacer el balance de las ecuaciones.

## 3. MPF PARA EL PROBLEMA DE GRAETZ CARTESIANO

El problema de Graetz<sup>8</sup> busca establecer el campo de temperatura  $T(x, y)$  para el flujo en un ducto de placas paralelas a distancia  $H$  con un perfil de velocidad desarrollado, en el cual se estudiaran dos casos. En primera instancia se considerará la imposición de temperatura uniforme  $T_w$  en las paredes, con lo cual quedan solo condiciones de borde de tipo Dirichlet. En segundo lugar, se considerará un flujo constante de calor  $q_0$  en las paredes, donde se cambiaran las condiciones de borde a tipo Neumann.

Como el perfil de velocidad ya se ha desarrollado completamente, el problema se reduce a encontrar el campo de temperaturas a partir de la ecuación de energía.

Para generalizar el problema se consideraran valores adimensionales, con lo que la ecuación de la energía queda de la forma:

$$U \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) - \frac{E}{Re} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 = 0 \quad (14)$$

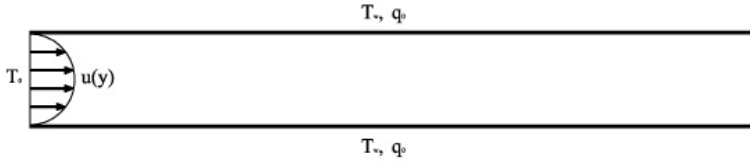


Figura 1: Esquema del problema de Graetz cartesiano.

La adimensionalización utilizada está dada por

$$X = \frac{x}{H} \quad Y = \frac{y}{H} \quad U = \frac{u_x}{V_0} \quad \Theta = \frac{T - T_0}{\Delta T} \quad (15)$$

donde  $V_0$  representa la velocidad media del flujo,  $T_0$  la temperatura de entrada, y  $\Delta T$  es  $\Delta T = T_w - T_0$  para el caso de temperatura impuesta y  $\Delta T = \frac{q_0 H}{k}$  para el caso de flujo impuesto. Utilizando los números adimensionales de Reynolds, Prandtl y Eckert

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad Re = \frac{V_0 L}{\nu} \quad E = \frac{V_0^2}{C_v \Delta T} \quad (16)$$

Finalmente, las condiciones de borde para el caso de la temperatura impuesta son:

$$\Theta = 0 \quad \text{para } X = 0 \quad (17a)$$

$$\Theta = 1 \quad \text{para } Y = 0 \quad (17b)$$

$$\Theta = 1 \quad \text{para } Y = 1 \quad (17c)$$

y para el flujo impuesto:

$$\Theta = 0 \quad \text{para } X = 0 \quad (18a)$$

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 1 \quad \text{para } Y = 0 \quad (18b)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 1 \quad \text{para } Y = 1 \quad (18c)$$

### 3.1. Número de Nusselt

Para mejorar la apreciación de la transferencia de calor en el dominio se utiliza el número adimensional de Nusselt, el cual representa el gradiente adimensional de temperatura sobre la superficie de transmisión de calor<sup>8,9</sup>. El número de Nusselt está definido como

$$Nu = \frac{q_0 H}{k(T_w - T_m)} \quad (19)$$

donde  $T_m$  la temperatura media del fluido, la cual se calcula de la forma

$$T_m = \frac{\int u(y)T(x, y)dy}{\int u(y)dy} \quad (20)$$

siendo  $u(y)$  el perfil de velocidad del fluido al interior del ducto.

Al utilizar la adimensionalización, se obtienen las siguientes funciones para el número de Nusselt

$$Nu = - \frac{\Theta_w - \Theta_0}{\Theta_w - \Theta_m} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0} \quad Nu = \frac{1}{\Theta_w - \Theta_m} \quad (21)$$

Temperatura Impuesta Flujo Impuesto

#### 4. RESULTADOS

Para ambos casos analizados se consideraron los siguientes valores:

$$Re = 50, \quad Pr = 1, \quad E = 0 \quad y \quad L = 8H$$

Las nubes utilizadas serán en primera instancia arreglos ordenados de nodos, como los mostrados en la Figura 2, para poder ser comparados con los resultados entregados por el método de diferencias finitas utilizando mallas equivalentes.

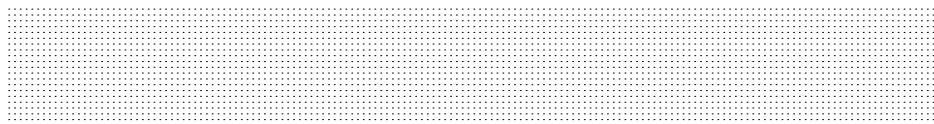


Figura 2: Arreglo ordenado de nodos en dominio rectangular, con arreglos de 161x21, 241x31, 321x41 y 401x51 nodos.

##### 4.1. Temperatura impuesta

En el caso de la temperatura impuesta, no se utiliza estabilización, producto de que solo se tienen condiciones de borde de tipo Dirichlet. Además, esta no mejora los resultados encontrados.

Los resultados obtenidos en el campo de temperatura son bastante buenos, como se puede apreciar en la Figura 3, donde se obtienen valores bastante semejantes a los entregados por diferencias finitas.

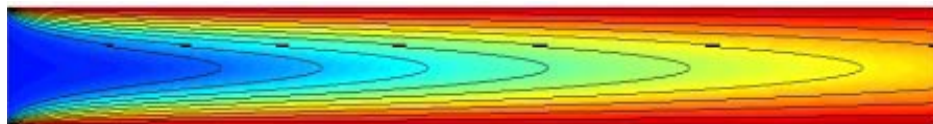


Figura 3: Campo de temperaturas para nube de 401x51 nodos.

Al comparar los números de Nusselt encontrados por ambos métodos se puede apreciar que MPF mejora el resultado en la entrada, donde teóricamente el número de Nusselt debiera tender a infinito, como se puede apreciar en la Figura 4a. En cuanto al valor asintótico, se aprecia que para arreglos homogéneos de nodos MPF no supera los resultados de DF, hecho mostrado en la figura 4b, además de ver un valor teórico<sup>10,11</sup> encontrado principalmente por valores propios y ampliamente discutido en la literatura.

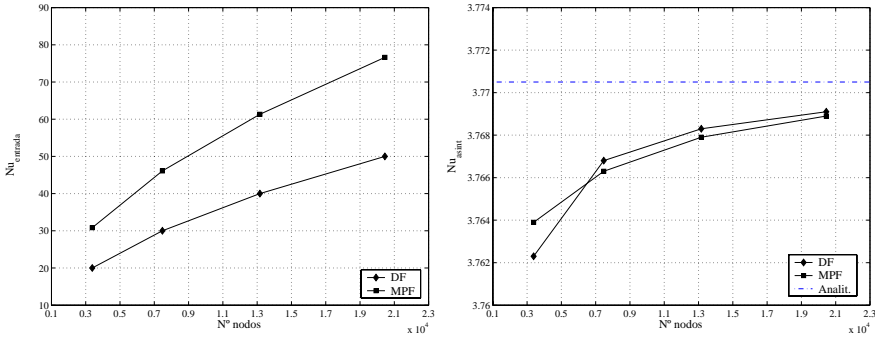


Figura 4: Comparación valores del número de Nusselt. a) Nusselt entrada. b) Nusselt asintótico.

Ahora se considerarán nubes irregulares, donde se utiliza un criterio de densificación hacia la entrada del ducto, como se aprecia en la figura 5.

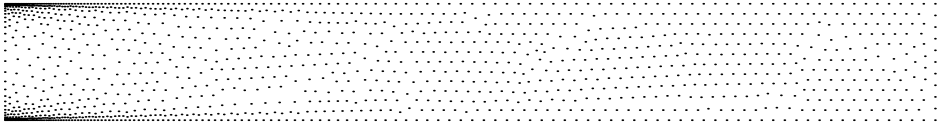


Figura 5: Ejemplo de nube con reordenamiento de nodos.

El campo de temperaturas se muestra en la figura 6.

En estos casos resulta imposible encontrar de buena manera la temperatura media local del flujo, producto que no se tiene una distribución homogénea de nodos a lo largo del eje  $Y$ , por lo que solo se pueden comparar los valores del gradiente de temperatura de la pared, arrojando como resultado. En el caso del Nusselt en la entrada, se puede suponer que es igual en módulo al gradiente, por lo que si se puede comparar. La comparación de este con respecto a los casos de nubes ordenadas y de diferencias finitas se puede apreciar en la figura 7, donde se aprecia una mejora sustancial en los resultados.

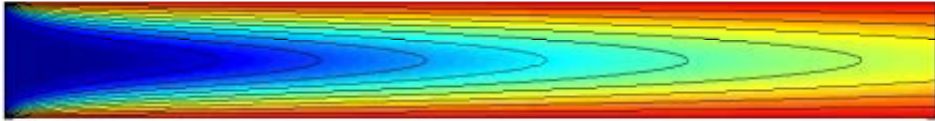


Figura 6: Campo de temperaturas para nube reordenada.

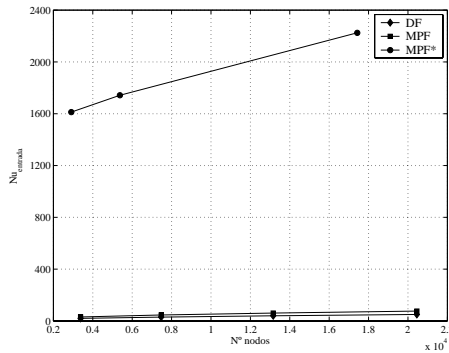


Figura 7: Nusselt de entrada con nubes redistribuidas (MPF\*).

El valor del número de Nusselt asintótico no puede ser calculado en forma directa a partir de una nube reordenada, producto que no se puede calcular la temperatura media del fluido  $\Theta_m$  sobre una línea del dominio por no tener una distribución homogénea de nodos sobre el eje  $Y$  para algún valor de  $X$ . Esto significa que tendría que recurrirse a algún tipo de aproximación extra, agregando un error externo al resultado.

<i>Nube</i>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
$Nu_{entrada}$	30.83	335.79	133.86
$Grad.salida$	-1.032	-1.042	-1.028

Cuadro 1: Resultados para nubes con distintos reordenamientos de 3381 nodos.

Se debe entender que los resultados mostrados varían según el reordenamiento de la nube, es decir, puede tenerse distintos resultados para una cantidad equivalente de nodos con distintos criterios para densificación en la entrada, como se muestra en el cuadro 1.

#### 4.2. Flujo de calor impuesto

En este caso si se utiliza estabilización, aunque solo sobre las condiciones de borde tipo Neumann debido a que por utilizar . Se compararán las mismas nubes anteriores para establecer las



condiciones bajo las cuales mejoran los resultados para el número de Nusselt y las temperaturas media y de pared.

En la figura 8 se presenta el campo de temperaturas para el caso de nubes ordenadas, donde se aprecian ciertas fluctuaciones en las temperaturas debido a la colocación puntual.

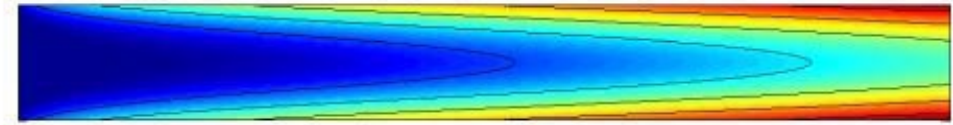


Figura 8: Campo de temperaturas para arreglo 161x21, sin estabilización.

Al utilizar estabilización estas fluctuaciones disminuyen considerablemente, pero no desaparecen completamente, como se aprecia en la figura 9, la cual presenta la temperatura de pared para los casos con y sin estabilización, respectivamente.

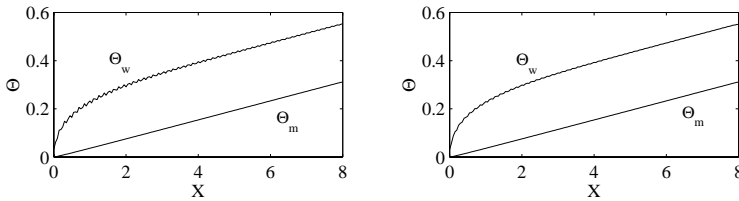


Figura 9: Temperatura de pared para arreglo de 161x21 nodos. a) MPF. b) MPFE.

Esto hace pensar que podría tratarse de un problema con la cantidad de nodos en las nubes de interpolación del contorno, debido a que el centro de gravedad de ésta queda alejado del nodo estrella.

En cuanto a la temperatura de entrada, no se producen fluctuaciones como en el caso de temperatura impuesta debido a que no existe la inestabilidad introducida por la gran diferencia de temperaturas entre la entrada y la pared, siendo pequeña para este caso.

El número de Nusselt también presenta fluctuaciones, debido a la participación directa del valor de la temperatura en la pared del ducto, lo que nos lleva a utilizar un promedio para encontrar el número de Nusselt asintótico.

En la figura 10 se aprecia la convergencia de dicho número al aumentar la cantidad de nodos en el dominio, comparando los casos de MPF con y sin estabilización, además de diferencias finitas y el valor analítico que puede ser calculado de forma directa a partir de las ecuaciones del fenómeno.

Se debe recalcar que los valores encontrados para la temperatura de pared y media son valores aproximados, resultantes del promedio de las curvas reales.

Arreglo	Error $\Theta_m$ %			Error $\Theta_w$ %		
	DF	MPF	MPFE	DF	MPF	MPFE
161x21	0.14	0.79	0.80	0.24	0.93	0.97
241x31	0.06	0.48	0.47	0.10	0.62	0.52
321x41	0.04	0.36	0.35	0.05	0.39	0.38
401x51	0.02	0.30	0.30	0.03	0.33	0.30

Cuadro 2: Error porcentual para  $\Theta_m$  y  $\Theta_w$ , para  $X = 8$ .

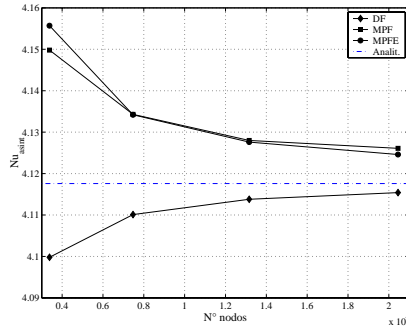


Figura 10: Convergencia número de Nusselt asintótico.

Finalmente, se presenta en la figura 11 los números de Nusselt para ambos casos estudiados y los valores asintóticos encontrados analíticamente.

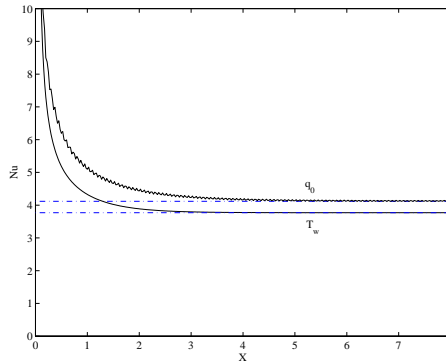


Figura 11: Número de Nusselt para los casos de temperatura y flujo impuesto, para un arreglo de 401x51 nodos.

## 5. CONCLUSIONES

El MPF es un método numérico prometedor para problemas fluidodinámicos y de transferencia de calor ya que compite en buenas condiciones con el método de diferencias finitas. Al ser estabilizado mejora considerablemente errores introducidos por la colocación puntual. La densificación local de nodos produce mejoras en los valores de temperatura en los bordes y en el Nusselt a la entrada. Para el mismo problema se obtuvieron mejores aproximaciones a los campos de temperatura con la condición de Dirichlet que con la de Neumann, a pesar de haber usado estabilización en este caso.

## REFERENCIAS

1. T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computational Meth. appl. Mech. Engrg.*, **139**, 3–47 (1996).
2. E. Oñate and S. Idelsohn. Mesh-free finite point method for advective-difusive transport and fluid flow problems. Technical report, CIMNE.
3. E. Oñate, J. García, and S. Idelsohn. Computation of the stabilization parameter for the finite element solution of advective-diffusive problems. *Computational Meth. appl. Mech. Engrg.*, **151**, 233–267 (1998).
4. E. Oñate, C. Sacco, and S. Idelsohn. Meshless analysis of incompressible flows using the finite point method. Technical report, CIMNE.
5. F. Perazzo, E. Oñate, and J. Miquel. El método de puntos finitos estabilizado en mecánica computacional. aplicaciones a problemas de mecánica de sólidos. Valparaiso, Chile, (2000). 9° Congreso Chile de Ingenieria Mecánica.
6. E. Oñate. On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems. Technical report, CIMNE.
7. E. Oñate, J. Rojek, R.L. Taylor, and O.C. Zienkiewicz. Linear triangles and tetrahedra for incompressible problems using a finite calculus formulation. Cracow, Poland, (2001). European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2001).
8. M. Jakob. *Heat Transfer*, volume I. Wiley, (1949).
9. R.B. Bird, W.E. Stewart, and E.N. Lightfoot. *Fenómenos de Transporte*. Editorial Reverté S.A., (1998).
10. M.Ñickolay and H. Martin. Improved approximation for the nusselt number for hydrodynamically developed laminar flow between parallel plates. *Int. J. of Heat and mass Transfer*, **45**, 3263–3266 (2002).
11. V.S. Arpaci. *Conduction Heat Transfer*. Addison-Wesley, (1966).