

POST-PANDEO DE VIGAS COMPUESTAS DE PARED DELGADA

Victor H. Cortínez^{*,†}, Sebastián P. Machado^{*,†}, Marcelo T. Piovan^{*,†}

^{*}Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos,
Universidad Tecnológica Nacional, FRBB,
11 de Abril 461, 8000, Bahía Blanca, Argentina.
email: vcortine@frbb.utn.edu.ar

[†]CONICET, Argentina

Palabras claves: Vigas Compuestas; Flexibilidad de Corte; Post-pandeo.

Resumen. *En el presente trabajo se desarrolla una teoría geoméricamente no-lineal para vigas compuestas de pared delgada con sección transversal arbitraria (abierta o cerrada) y teniendo en cuenta la incorporación de varios aspectos no convencionales tal como la flexibilidad de corte asociada a los movimientos flexionales y torsionales. Mediante la presente formulación se estudia el comportamiento de post-pandeo de una viga bisimétrica, simplemente apoyada, y sometida a una carga aplicada axialmente en el centroide.*

Abstract. *In the present article a geometrically non-linear theory for composite thin-walled beams is developed, which takes into account several non-classical effects such as shear flexibility associated to bending and torsional warping. The theory is applicable for beams of arbitrary cross-sections (open or closed). By means of the present formulation is used for analyzing the post-buckling behaviour of a simply supported, two-symmetric beam subjected to an axial load applied at the centroid.*

1 INTRODUCCION

En el diseño estructural moderno, la utilización de estructuras livianas y rígidas crece día a día. Consecuentemente las vigas de pared delgada se emplean muy frecuentemente. La introducción de materiales compuestos en la tecnología de construcción ha mostrado grandes ventajas desde el punto de vista de la relación entre la rigidez y el peso y también debido a otras propiedades mejoradas, como por ejemplo la alta resistencia a la corrosión. Muy frecuentemente las estructuras de material compuesto adquieren la forma de vigas de pared delgada. Por otra parte, este tipo de estructuras presenta problemas particulares en su análisis que están siendo investigados intensamente. En particular, el problema de inestabilidad es de interés corriente (Vlassov¹) y existen varios estudios concentrados en la determinación de cargas críticas de pandeo para diferentes configuraciones de uso habitual. Si bien estas magnitudes son de necesidad fundamental desde el punto de vista del diseño, no brindan información sobre la capacidad de carga adicional en el régimen de post-pandeo. Esta información debe obtenerse a partir de un análisis geométrico no lineal que ha sido el objeto de numerosos artículos en el caso de vigas construidas con materiales isotrópicos^{2,3}. Por otra parte, estudios similares para el caso de vigas de paredes delgadas de materiales compuestos son relativamente escasos⁴.

En el presente trabajo se orienta al desarrollo de una teoría geoméricamente no lineal para vigas compuestas de pared delgada con sección abiertas o cerradas, considerando la influencia de efectos de flexibilidad por corte. Como ejemplo preliminar de aplicación se estudia la capacidad de carga adicional en el régimen de post-pandeo para una viga I simplemente apoyada y cargada axialmente en el centroide, con una secuencia de laminación simétrica balanceada.

2 TEORÍA

2.1 Definiciones e hipótesis

Se considera una viga compuesta con sección transversal arbitraria (ver Figura 1). Los puntos del elemento estructural son referidos a un sistema de coordenadas cartesianas (x, \bar{y}, \bar{z}) , donde el eje x es paralelo al eje longitudinal de la viga, mientras que \bar{y} y \bar{z} son los ejes principales de la sección transversal. Los ejes y, z son paralelos a los principales pero tienen su origen en el centro de corte (definido de acuerdo a la teoría de Vlasov¹ de vigas isotrópicas). Las coordenadas correspondientes a los puntos que se encuentran sobre la línea media son denotados como Y y Z (o \bar{Y} y \bar{Z}). Además, una coordenada circunferencial s y una normal n son introducidas sobre la línea media de la sección transversal. Por otro lado y_0 y z_0 son las coordenadas del centroide medidas desde el centro de corte.

El presente modelo se basa en las siguientes hipótesis:

- 1) La sección es indeformable en su plano.
- 2) La distribución de alabeo está dada por la función de Saint-Venant para vigas isotrópicas.
- 3) Se desprecia las resultantes de tensión correspondientes a la tensión circunferencial σ_{ss} y el esfuerzo resultante correspondiente a γ_{ns} .
- 4) Los radios de curvatura de cualquier punto de la membrana son despreciados.

- 5) La curvatura torsional lineal se expresa de acuerdo a la teoría clásica de placas.
- 6) Se supone una secuencia de laminación simétrica y balanceada, o especialmente ortótropa⁵ (las ecuaciones constitutivas correspondientes a las resultantes de tensiones laminares se indican en el Apéndice I).

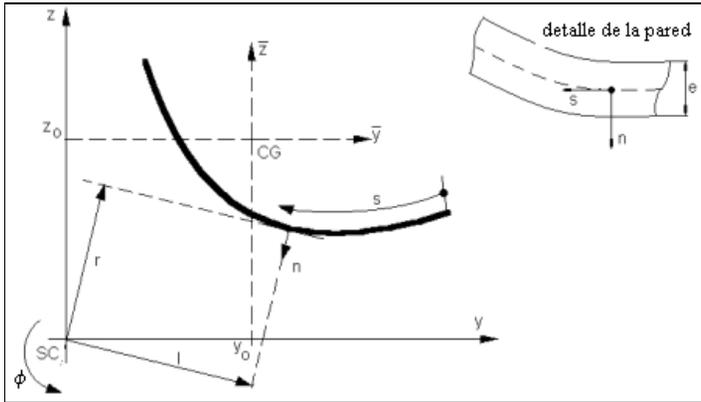


Figura 1: Sistema de coordenadas de la sección transversal

3 FORMULACIÓN VARIACIONAL

Teniendo en cuenta las hipótesis adoptadas, el principio de Trabajos Virtuales para una lámina compuesta puede ser expresada en la forma⁶:

$$\begin{aligned}
 & \iint (N_{xx} \delta \epsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \kappa_{xx}^{(1)} + N_{xs} \delta \gamma_{xs}^{(0)} + M_{xs} \delta \kappa_{xs}^{(1)} + N_{xn} \delta \gamma_{ns}^{(0)}) ds dx \\
 & - \iint (\bar{q}_x \delta \bar{u}_x + \bar{q}_y \delta \bar{u}_y + \bar{q}_z \delta \bar{u}_z) ds dx - \iint (\bar{p}_x \delta u_x + \bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z) \Big|_{x=0}^{x=L} ds dn \quad (1) \\
 & - \iint (\bar{f}_x \delta u_x + \bar{f}_y \delta u_y + \bar{f}_z \delta u_z) ds dn dx
 \end{aligned}$$

donde N_{xx} , N_{xs} , M_{xx} , M_{xs} and N_{xn} son las resultantes de tensión laminares, y se definen como sigue:

$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} dn \quad , \quad M_{xx} = \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xx} n) dn \quad , \quad M_{xs} = \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xs} n) dn \\
 N_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xs} dn \quad , \quad N_{xn} = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xn} dn
 \end{aligned} \quad (2)$$

además, se considera que la viga está sujeta a las fuerzas superficiales \bar{q}_x , \bar{q}_y y \bar{q}_z especificadas por unidad de área de la superficie media indeformada y actuando a lo largo de las direcciones x , y y z respectivamente. De la misma manera, \bar{p}_x , \bar{p}_y y \bar{p}_z son las fuerzas

aplicadas en los extremos en $x = 0$ y $x = L$, donde L es la longitud de la viga. Asimismo \bar{f}_x , \bar{f}_y y \bar{f}_z son las fuerzas por unidad de volumen. Cabe aclarar que \bar{u}_x , \bar{u}_y y \bar{u}_z corresponden a los desplazamientos de la línea media.

4 EXPRESIONES CINEMÁTICAS

El campo de desplazamientos⁷ (compatible con las hipótesis 1 y 2) se adopta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x^L + u_x^{NL} \\ u_y &= u_y^L + u_y^{NL} \\ u_z &= u_z^L + u_z^{NL} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_x^L = u_0(x) - \theta_z(x) \bar{y}(s, n) - \theta_y(x) \bar{z}(s, n) + \theta(x) \omega(s, n) \\ u_y^L = v(x) - \phi(x) z(s, n) \\ u_z^L = w(x) + \phi(x) y(s, n) \end{cases} \quad (4.a)$$

$$\begin{cases} u_x^{NL} = \frac{1}{2} (\phi(x) \theta_z(x) z(s, n) - \phi(x) \theta_y(x) y(s, n)) \\ u_y^{NL} = \frac{1}{2} (-\phi(x)^2 y(s, n) - \theta_z(x)^2 \bar{y}(s, n) - \theta_y(x) \theta_z(x) \bar{z}(s, n)) \\ u_z^{NL} = \frac{1}{2} (-\phi(x)^2 z(s, n) - \theta_y(x)^2 \bar{z}(s, n) - \theta_y(x) \theta_z(x) \bar{y}(s, n)) \end{cases} \quad (4.b)$$

donde, las componentes θ_z , θ_y , y ϕ pueden interpretarse como rotaciones semitangenciales. En las expresiones anteriores se han utilizado las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \bar{y}(s, n) &= y(s, n) - y_0 \\ \bar{z}(s, n) &= z(s, n) - z_0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{y}(s, n) = \bar{Y}(s) - n \frac{dZ}{ds}, \quad \bar{z}(s, n) = \bar{Z}(s) + n \frac{dY}{ds} \quad (6)$$

$$y(s, n) = Y(s) - n \frac{dZ}{ds}, \quad z(s, n) = Z(s) + n \frac{dY}{ds} \quad (7)$$

La función de alabeo de una sección transversal de pared delgada se define como:

$$\omega(s, n) = \omega_p(s) + \omega_s(s, n) \quad (8)$$

donde, ω_p y ω_s son la función de alabeo del contorno y la función de alabeo del espesor, respectivamente. Ellas son definidas en la forma^{8,9}:

$$\omega_p(s) = \frac{1}{S} \left[\int_0^s \left(\int_0^s [r(s) - \psi(s)] ds \right) ds \right] - \int_0^s [r(s) - \psi(s)] ds \quad (9)$$

$$\omega_s(s, n) = -n l(s)$$

donde

$$r(s) = -Z(s) \frac{dY}{ds} + Y(s) \frac{dZ}{ds} \quad (10)$$

$$l(s) = Y(s) \frac{dY}{ds} + Z(s) \frac{dZ}{ds}$$

La función Ψ es la deformación de corte en la línea media, obtenida a partir de la teoría de Saint-Venant de torsión pura para vigas isótropas¹⁰, y normalizadas con respecto a $d\phi/dx$. Siendo $\Psi = 0$ para el caso de secciones abiertas.

5 DEFORMACIONES

Los desplazamientos con respecto al sistema curvilíneo (x, s, n) se expresan de la siguiente manera:

$$\bar{U} = u_x(x, s, n) \quad (11)$$

$$\bar{V} = u_y(x, s, n) \frac{dY}{ds} + u_z(x, s, n) \frac{dZ}{ds} \quad (12)$$

$$\bar{W} = -u_y(x, s, n) \frac{dZ}{ds} + u_z(x, s, n) \frac{dY}{ds} \quad (13)$$

El tensor de deformaciones de Green-Lagrange se define como sigue:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (14)$$

$$\varepsilon_{xs} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial s} \right] \quad (15)$$

$$\varepsilon_{xn} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} \right] \quad (16)$$

En el mismo se desprecian las deformaciones correspondientes al término de segundo orden⁴ que involucran al movimiento axial. Sustituyendo las expresiones (3) en (11-13) y luego en (14-16), se obtiene

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^{(0)} + n\kappa_{xx}^{(1)}$$

$$\gamma_{xs} = 2\varepsilon_{xs} = \gamma_{xs}^{(0)} + n\kappa_{xs}^{(1)} \quad (17)$$

$$\gamma_{xn} = 2\varepsilon_{xn} = \gamma_{xn}^{(0)}$$

donde

$$\varepsilon_{xx}^{(0)} = u'_z - \theta'_z \bar{Y} - \theta'_y \bar{Z} + \theta'_p \omega_p + \frac{1}{2} \left[Y(-\theta_y \phi' - \theta'_y \phi) + Z(\theta_z \phi' + \theta'_z \phi) \right] + \frac{1}{2} \left[(v'^2 + w'^2) + \phi'^2 (Y^2 + Z^2) \right] + \phi' [-v'Z + w'Y] \quad (18)$$

$$\kappa_{xx}^{(1)} = \theta'_z \frac{dZ}{ds} - \theta'_y \frac{dY}{ds} - \theta' l + \frac{1}{2} \left[\frac{dY}{ds} (\theta_z \phi' + \theta'_z \phi) + \frac{dZ}{ds} (\theta_y \phi' + \theta'_y \phi) \right] - [\phi'^2 r] - \phi' \left[v' \left(\frac{dY}{ds} \right) + w' \left(\frac{dZ}{ds} \right) \right] \quad (19)$$

$$\gamma_{xs}^{(0)} = (v' - \theta_z) \frac{dY}{ds} + (w' - \theta_y) \frac{dZ}{ds} + (\phi' - \theta)(r - \psi) + \psi \phi' + \frac{dZ}{ds} \left(\frac{1}{2} \theta_z \phi - \bar{Z} \theta_y \theta'_y \right) + \frac{dY}{ds} \left(-\frac{1}{2} \theta_y \phi - \bar{Y} \theta_z \theta'_z \right) + \left(\frac{dZ}{ds} \bar{Y} + \frac{dY}{ds} \bar{Z} \right) \left(-\frac{1}{2} \theta_z \theta'_y - \frac{1}{2} \theta_y \theta'_z \right) + \phi \left(w' \frac{dY}{ds} - v' \frac{dZ}{ds} \right) \quad (20)$$

$$\kappa_{xs}^{(1)} = -2\phi' + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dZ}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dY}{ds} \right)^2 \right] \left(\theta_z \theta'_y + \theta_y \theta'_z \right) + \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} (\theta_z \theta'_z - \theta_y \theta'_y) \quad (21)$$

$$\gamma_{xs}^{(0)} = -(v' - \theta_z) \frac{dZ}{ds} + (w' - \theta_y) \frac{dY}{ds} + (\phi' - \theta) l + \frac{1}{2} \left(\bar{Z} \frac{dZ}{ds} - \bar{Y} \frac{dY}{ds} \right) (\theta_z \theta'_y + \theta_y \theta'_z) + \frac{dY}{ds} \left(\frac{1}{2} \phi \theta_z - \bar{Z} \theta_y \theta'_y \right) + \frac{dZ}{ds} \left(\frac{1}{2} \phi \theta_y + \bar{Y} \theta_z \theta'_z \right) - \phi \left(v' \frac{dY}{ds} + w' \frac{dZ}{ds} \right) \quad (22)$$

6 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Sustituyendo las expresiones (3) y (18-22) en (1) e integrando con respecto a s , se obtiene la siguiente expresión unidimensional para el trabajo virtual:

$$L_K + L_P = 0 \quad (23)$$

donde

$$\begin{aligned}
 L_K = \int_0^L & \left[\delta u'_0 N + \delta \theta'_z (-M_z + (M_y + N z_0) \phi / 2 + \theta_y T_2 + \theta_z T_3) \right. \\
 & + \delta \theta'_y (-M_y - (M_z + N y_0) \phi / 2 + \theta_y T_1 + \theta_z T_2) + \delta \theta' B \\
 & + \delta v' (Q_y - Q_z \phi + v' N - (M_y + N z_0) \phi') \\
 & + \delta \theta_z (-Q_y + Q_z \phi / 2 + (M_y + N z_0) \phi' / 2 + \theta'_y T_2 + \theta'_z T_3) \\
 & + \delta w' (Q_z + Q_y \phi + w' N + (M_z + N y_0) \phi') \\
 & + \delta \theta_y (-Q_z - Q_y \phi / 2 - (M_z + N y_0) \phi' / 2 + \theta'_y T_1 + \theta'_z T_2) \\
 & + \delta \phi (T_w + T_{sv} - (M_z + N y_0) \theta_y / 2 + (M_y + N z_0) \theta_z / 2 \\
 & - (M_y + N z_0) v' + (M_z + N y_0) w' + \phi' B_1) - \delta \theta T_w \\
 & + \delta \phi (-Q_y \theta_y / 2 + Q_z \theta_z / 2 - Q_z v' + Q_y w' - (M_z + N y_0) \theta'_y / 2 \\
 & \left. + (M_y + N z_0) \theta'_z / 2) \right] dx \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_P = \int_0^L & \left[-q_x \delta u_0 - q_y \delta v - q_z \delta w + \delta \theta_z (m_z - m_{y1} \phi / 2 + \lambda_y \theta_z + \lambda_{mx} \theta_y / 2) \right. \\
 & + \delta \theta_y (m_y + m_{z1} \phi / 2 + \lambda_z \theta_y + \lambda_{mx} \theta_z / 2) - b \delta \theta \\
 & + \delta \phi (-m_x - m_{y1} \theta_z / 2 + m_{z1} \theta_y / 2 + \lambda_{yz} \phi) \left. \right] dx \\
 & + \left[-\bar{N} \delta u_0 - \bar{Q}_y \delta v - \bar{Q}_z \delta w + \delta \theta_z (\bar{M}_z - \bar{C}_2 \phi + \bar{\lambda}_y \theta_z + \bar{\lambda}_{mx} \theta_y / 2) \right. \\
 & + \delta \theta_y (\bar{M}_y + \bar{C}_3 \phi + \bar{\lambda}_z \theta_y + \bar{\lambda}_{mx} \theta_z / 2) - \bar{B} \delta \theta \\
 & \left. + \delta \phi (-\bar{M}_x - \theta_z \bar{C}_2 + \theta_y \bar{C}_3 + \bar{B}_1 \phi) \right]_{x=0}^{x=L} \tag{25}
 \end{aligned}$$

donde se han definido los siguientes esfuerzos tipo viga:

$$\begin{aligned}
 N &= \int N_{xx} ds, \quad M_Y = \int \left(N_{xx} \bar{Z} + M_{xx} \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad M_Z = \int \left(N_{xx} \bar{Y} - M_{xx} \frac{dZ}{ds} \right) ds \\
 Q_Z &= \int \left(N_{xs} \frac{dZ}{ds} + N_{xn} \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad Q_Y = \int \left(N_{xs} \frac{dY}{ds} - N_{xn} \frac{dZ}{ds} \right) ds \\
 B &= \int (N_{xx} \omega_p - M_{xx} l) ds, \quad T_W = \int [N_{xs} (r - \psi) + N_{xn} l] ds, \quad T_{SV} = \int (N_{xs} \psi - 2M_{xs}) ds
 \end{aligned} \tag{26}$$

Los parámetros que se encuentran en las ecuaciones (24) y (25) tienen el siguiente significado: el esfuerzo normal (N), los esfuerzos de corte (Q_y y Q_z), los momentos flectores (M_y y M_z), el bimomento (B), el momento torsor de Saint-Venant (T_{sv}), el momento flexotorsor (T_w), ($q_x, q_y, q_z, m_x, m_y, m_z, m_{y1}, m_{z1}, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_{mx}, \lambda_{yz}$) son las resultantes de las fuerzas aplicadas en la viga, y se encuentran definidas en el Apéndice II. De igual forma ($\bar{N}, \bar{Q}_y, \bar{Q}_z, \bar{M}_z, \bar{M}_y, \bar{B}, \bar{M}_x, \bar{\lambda}_y, \bar{\lambda}_z, \bar{\lambda}_{mx}, \bar{B}_1$) se encuentran definidos en el Apéndice II y representan las resultantes de las fuerzas aplicadas en los extremos de la viga. También han surgido otras resultantes generalizadas, aunque carentes de significado físico simple. Estas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \int \left[N_{xx} (l(s)^2 + r^2) - 2M_{xx}r \right] ds \\
 T_1 &= \int \left[-N_{xn} \bar{Z} \frac{dY}{ds} - N_{xs} \bar{Z} \frac{dY}{ds} - M_{xs} \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} \right] ds \\
 T_2 &= \int \left[-\frac{1}{2} N_{xs} \left(\bar{Z} \frac{dY}{ds} + \bar{Y} \frac{dZ}{ds} \right) + \frac{1}{2} N_{xn} \left(\bar{Z} \frac{dZ}{ds} - \bar{Y} \frac{dY}{ds} \right) + \frac{1}{2} M_{xs} \left(\frac{dZ^2}{ds} - \frac{dY^2}{ds} \right) \right] ds \\
 T_3 &= \int \left[-N_{xs} \bar{Y} \frac{dY}{ds} + N_{xn} \bar{Y} \frac{dZ}{ds} + M_{xs} \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} \right] ds \tag{27}
 \end{aligned}$$

Tomando variaciones con respecto a los desplazamientos generalizados $u_0, \theta_z, v, \theta_y, w, \theta, \phi$ como se indica en las ecuaciones (24) y (25), se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$-N_{,x} = q_x \tag{28}$$

$$M_{z,x} - Q_y - \phi / 2 (M_y + N z_0)_{,x} - \theta_z T_{3,x} - \theta_y T_{2,x} + \phi Q_z / 2 = -m_z + m_{y1} \phi / 2 - \lambda_z \theta_z - \lambda_{mx} \theta_y / 2 \tag{29}$$

$$- [Q_y - \phi' (M_y + N z_0) - Q_z \phi + N w']_{,x} = q_y \tag{30}$$

$$M_{y,x} - Q_z + \phi / 2 (M_z + N y_0)_{,x} - \theta_y T_{1,x} - \theta_z T_{2,x} - \phi Q_y / 2 = -m_y - m_{z1} \phi / 2 - \lambda_z \theta_y - \lambda_{mx} \theta_z / 2 \tag{31}$$

$$- [Q_z + \phi' (M_z + N y_0) + Q_y \phi + N w']_{,x} = q_z \tag{32}$$

$$-B_{,x} - T_w = b \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 - [T_w + T_{sv}]_{,x} + \theta_y / 2 [(M_z + N y_0)_{,x} - Q_y] - \theta_z / 2 [(M_y + N z_0)_{,x} - Q_z] + w' Q_y - v' Q_z \\
 - [\phi' B_1 - v' (M_y + N z_0) + w' (M_z + N y_0)]_{,x} = m_x + m_{y1} \theta_z / 2 - m_{z1} \theta_y / 2 - \lambda_{yz} \phi
 \end{aligned} \tag{34}$$

con las siguientes condiciones de contorno (en $x = 0, L$)

$$N - \bar{N} = 0 \tag{35}$$

$$-M_z + \phi / 2 (M_y + N z_0) + \theta_z T_3 + \theta_y T_2 + \bar{M}_z - \phi / 2 (\bar{M}_y + \bar{N} z_0) + \bar{\lambda}_z \theta_z + \bar{\lambda}_{mx} \theta_y / 2 = 0 \tag{36}$$

$$Q_y - \phi' (M_y + N z_0) - \phi Q_z + v' N - \bar{Q}_y = 0 \tag{37}$$

$$-M_y - \phi / 2 (M_z + N y_0) + \theta_z T_2 + \theta_y T_1 + \bar{M}_y + \phi / 2 (\bar{M}_z + \bar{N} y_0) + \bar{\lambda}_z \theta_y + \bar{\lambda}_{mx} \theta_z / 2 = 0 \tag{38}$$

$$Q_z + \phi' (M_z + N y_0) + \phi Q_y + w' N - \bar{Q}_z = 0 \tag{39}$$

$$B - \bar{B} = 0 \tag{40}$$

$$T_w + T_{sv} - \theta_y / 2 (M_z + N y_0) + \theta_z / 2 (M_y + N z_0) + \phi' B_1 - v' (M_y + N z_0) + w' (M_z + N y_0) - \bar{M}_x - \theta_z / 2 (\bar{M}_y + \bar{N} z_0) + \theta_y / 2 (\bar{M}_z + \bar{N} y_0) + \bar{B}_1 \phi = 0 \quad (41)$$

7 ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Reemplazando las expresiones (18-22) en las ecuaciones constitutivas para las resultantes de tensión laminares (definidas en el Apéndice I) y reemplazando en (26) y (27), se obtienen las relaciones constitutivas entre los esfuerzos de la viga y las deformaciones generalizadas. Como caso particular, se presenta la relación constitutiva para una viga I (bisimétrica):

$$N = \bar{E}A u'_0 + \frac{1}{2} \bar{E}A v'^2 + \frac{1}{2} EA w'^2 + \frac{1}{2} \bar{E}I_0 \phi'^2 \quad (42)$$

$$M_y = -\bar{E}I_y \theta'_y + \bar{E}I_y \left(\frac{1}{2} \phi \theta'_z - v' \phi' + \frac{1}{2} \theta_z \phi' \right) \quad (43)$$

$$M_z = -\bar{E}I_z \theta'_z + \bar{E}I_z \left(-\frac{1}{2} \phi \theta'_y + w' \phi' - \frac{1}{2} \theta_y \phi' \right) \quad (44)$$

$$B = \bar{E}C_w \theta' \quad (45)$$

$$Q_y = \bar{G}S_{11} (v' - \theta_z) + \bar{G}S_y \left(-\frac{1}{2} \phi \theta_y + \phi w' \right) \quad (46)$$

$$Q_z = \bar{G}S_{22} (w' - \theta_y) + \bar{G}S_z \left(\frac{1}{2} \phi \theta_z - \phi v' \right) \quad (47)$$

$$T_w = \bar{G}S_{33} (\phi' - \theta) + \bar{G}S_{w1} \left(\frac{1}{2} \theta_y \theta'_z + \frac{1}{2} \theta_z \theta'_y \right) \quad (48)$$

$$T_{sv} = \bar{G}J \phi' + \bar{G}J_1 (\theta_y \theta'_z + \theta_z \theta'_y) \quad (49)$$

$$B_1 = \bar{k}b_1 u'_0 + \bar{k}b_1 \left(\frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{2} w'^2 \right) + \bar{k}b_2 \phi'^2 \quad (50)$$

$$T_1 = \bar{k}T_{11} \theta_y \theta'_y \quad (51)$$

$$T_2 = (\bar{k}T_{21} - \bar{k}T_{22} / 2) \phi' + \bar{k}T_{22} \theta / 2 + \bar{k}T_{23} (\theta_z \theta'_y + \theta_y \theta'_z) / 4 \quad (52)$$

$$T_3 = \bar{k}T_{31} \theta_z \theta'_z \quad (53)$$

donde las características seccionales vienen dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{EA} = \overline{A}_{11} \int ds \\ \overline{EI}_y = \overline{A}_{11} \int Z^2 ds + \overline{D}_{11} \int Y'^2 ds \\ \overline{EI}_z = \overline{A}_{11} \int Y^2 ds + \overline{D}_{11} \int Z'^2 ds \\ \overline{EI}_0 = \overline{A}_{11} \int (Y^2 + Z^2) ds \\ \overline{EC}_w = \overline{A}_{11} \int \omega_p^2 ds + \overline{D}_{11} \int l^2 ds \\ \overline{GS}_y = \overline{A}_{55} \int Z'^2 ds + \overline{A}_{66} \int Y'^2 ds \\ \overline{GS}_z = \overline{A}_{55} \int Y'^2 ds + \overline{A}_{66} \int Z'^2 ds \\ \overline{GS}_{w1} = \overline{A}_{55} \int l (\overline{Y} Y' - \overline{Z} Z') ds + \overline{A}_{66} \int r Z Y' ds \\ \overline{GJ} = 4\overline{D}_{66} \int ds \\ \overline{GJ}_1 = \overline{D}_{66} \int (Y'^2 - Z'^2) ds \end{array} \right. \quad (54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{kb}_1 = \overline{A}_{11} \int (l^2 + r^2) ds \\ \overline{kb}_2 = \frac{1}{2} \overline{A}_{11} \int (l^2 + r^2)^2 ds + 2\overline{D}_{11} \int r^2 ds \\ \overline{kT}_{11} = \overline{A}_{55} \int Z^2 Y'^2 ds + \overline{A}_{66} \int Z^2 Z'^2 ds \\ \overline{kT}_{21} = \overline{D}_{66} \int (Y'^2 - Z'^2) ds \\ \overline{kT}_{22} = \overline{A}_{55} \int l (\overline{Y} Y' - \overline{Z} Z') ds + \overline{A}_{66} \int r \overline{Z} Y' ds \\ \overline{kT}_{23} = \overline{A}_{55} \int (\overline{Y}^2 Y'^2 + \overline{Z}^2 Z'^2) ds + \overline{A}_{66} \int \overline{Z}^2 Y'^2 ds + \overline{D}_{66} \int (Y'^4 + Z'^4) ds \\ \overline{kT}_{31} = \overline{A}_{66} \int \overline{Y}^2 Y'^2 ds \end{array} \right. \quad (55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{GS}_{11} = \overline{A}_{55} \int Z'^2 ds + \overline{A}_{66} \int Y'^2 ds \\ \overline{GS}_{22} = \overline{A}_{55} \int Y'^2 ds + \overline{A}_{66} \int Z'^2 ds \\ \overline{GS}_{33} = \overline{A}_{66} \int r^2 ds + \overline{A}_{55} \int l^2 ds \end{array} \right. \quad (56)$$

Las rigideces \overline{GS}_{11} , \overline{GS}_{22} , \overline{GS}_{33} correspondiente a los términos lineales pueden también obtenerse de manera mejorada a partir del principio de Hellinger-Reissner⁶ como se muestra en¹¹. Esta corrección es análoga a la introducción de factores de corte en la teoría de Timoshenko¹² para vigas planas.

8 ANÁLISIS DE POST-PANDEO PARA UNA VIGA I SIMPLEMENTE APOYADA

Con el propósito de analizar el problema de post-pandeo de una viga I (abierta) de pared delgada, se considera que la misma se encuentra simplemente apoyada y con una carga axial aplicada en el centroide. En este caso, las ecuaciones (28-34) pueden ser desacopladas expresándose de la siguiente manera:

Extensional Flexional (u_0, w, θ_y)

$$\begin{cases} -\overline{EA}u_0'' = \left[\frac{I}{2}\overline{EA}w'^2 \right]_{,x} \\ -\overline{GS}_{22}(w'' - \theta_y') = [Nw']_{,x} \\ -\overline{EI}_y\theta_y'' - \overline{GS}_{22}(w' - \theta_y) = \theta_y T_{1,x} \end{cases} \quad (57)$$

Extensional Flexional (u_0, v, θ_z)

$$\begin{cases} -\overline{EA}u_0'' = \left[\frac{I}{2}\overline{EA}w'^2 \right]_{,x} \\ -\overline{GS}_{11}(v'' - \theta_z') = [Nv']_{,x} \\ -\overline{EI}_z\theta_z'' - \overline{GS}_{11}(v' - \theta_z) = \theta_z T_{3,x} \end{cases} \quad (58)$$

Extensional Torsional (u_0, θ, ϕ)

$$\begin{cases} -\overline{EA}u_0'' = \left[\frac{I}{2}\overline{EI}_0\phi'^2 \right]_{,x} \\ -\overline{EC}_w\theta'' - \overline{GS}_{33}(\phi' - \theta) = 0 \\ -\overline{GS}_{33}(\phi'' - \theta') - \overline{GJ}\phi'' = [\phi'B_1]_{,x} \end{cases} \quad (59)$$

con las condiciones de borde que correspondan. En consecuencia, es posible analizar cada estado de equilibrio por separado. Las ecuaciones (57-59) son de utilidad para el análisis a partir de diversos métodos que trabajan con la formulación diferencial: diferencias finitas, enfoque^{2,3}, etc. No obstante en el estudio del camino de equilibrio de cada uno de los estados de equilibrio descritos anteriormente, se utiliza una metodología alternativa aproximada basada directamente en el principio de Trabajos Virtuales. Las expresiones de este último, para los modos de deformación considerados, son los siguientes:

Extensional Flexional (u_0, w, θ_y)

$$L_{e1} = \int_0^L [\delta u'_0 N + \delta \theta'_y (-M_y + T_1 \theta'_y) + \delta w' (Q_z + w' N) + \delta \theta_y (-Q_z + T_1 \theta'_y)] dx + [-N \delta u_0]_{x=0}^{x=L}$$

donde

$$N = \overline{EA} u'_0 + \frac{1}{2} \overline{EA} w'^2 \quad (60)$$

$$M_y = -\overline{EI}_y \theta'_y$$

$$Q_z = \overline{GS}_{22} (w' - \theta_y)$$

$$T_1 = \overline{kT}_{11} \theta_y \theta'_y$$

Extensional Flexional (u_0, v, θ_z)

$$L_{e2} = \int_0^L [\delta u'_0 N + \delta \theta'_z (-M_z + T_3 \theta'_z) + \delta v' (Q_y + v' N) + \delta \theta_z (-Q_y + T_3 \theta'_z)] dx + [-N \delta u_0]_{x=0}^{x=L}$$

donde

$$N = \overline{EA} u'_0 + \frac{1}{2} \overline{EA} v'^2 \quad (61)$$

$$Q_y = \overline{GS}_{11} (v' - \theta_z)$$

$$M_z = -\overline{EI}_z \theta'_z$$

$$T_3 = \overline{kT}_{31} \theta_z \theta'_z$$

Extensional Torsional (u_0, θ, ϕ)

$$L_{eT} = \int_0^L [\delta u'_0 N + \delta \theta' B + \delta \phi' (T_w + T_{sv} + \phi' B_1) - \delta \theta T_w] dx + [-N \delta u_0]_{x=0}^{x=L}$$

donde

$$N = \overline{EA} u'_0 + \frac{1}{2} \overline{EI}_0 \phi'^2$$

$$B = \overline{EC}_w \theta' \quad (62)$$

$$T_w = \overline{GS}_{33} (\phi' - \theta)$$

$$T_{sv} = \overline{GJ} \phi'$$

$$B_1 = \overline{kb}_1 u'_0 + \overline{kb}_2 \phi'^2$$

Luego el método consiste en reemplazar cada una de las variables por aproximaciones compatibles con las condiciones de borde. Por ejemplo, para el primer funcional (60) las aproximaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \frac{x}{L} Q_1 & , & & \delta u_0 &= \frac{x}{L} \delta Q_1 \\
 w &= \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) Q_2 & , & & \delta w &= \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \delta Q_2 \\
 \theta_y &= \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) Q_3 & , & & \delta \theta_y &= \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \delta Q_3
 \end{aligned} \tag{63}$$

estas corresponden a las formas de pandeo del problema linealizado¹¹.

Reemplazando estas últimas en (60) y efectuando variaciones con respecto a las coordenadas generalizadas Q_1, Q_2, Q_3 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \delta Q_1 : & \quad \frac{\overline{EA}}{L} Q_1 + \frac{\overline{EA} \pi^2}{4 L^2} Q_2^2 = \overline{N} \\
 \delta Q_2 : & \quad \frac{\overline{GS}_{22} \pi^2}{2 L} Q_2 - \frac{1}{2} \pi \overline{GS}_{22} Q_3 + \frac{\overline{EA} \pi^2}{2 L^2} Q_1 Q_2 + \frac{3 \overline{EA} \pi^4}{16 L^3} Q_2^3 = 0 \\
 \delta Q_3 : & \quad -\frac{1}{2} \pi \overline{GS}_{22} Q_2 + \left(\frac{\overline{EI}_y \pi^2}{2 L} + \frac{\overline{GS}_{22} L}{2} \right) Q_3 + \frac{\overline{kT}_{11} \pi^2}{4 L} Q_3^3 = 0
 \end{aligned} \tag{64}$$

La solución de este sistema de ecuaciones no-lineales se realiza mediante un procedimiento incremental. Para ello es posible representar el sistema (64) de la siguiente manera:

$$F_i = f_i - \lambda P_i = 0 \quad \forall \lambda \quad \text{si} \quad i = j = 1..3 \tag{65}$$

luego debe cumplirse $\frac{\partial F_i}{\partial \lambda} = 0$ o $\frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial \lambda} - P_i = 0$. Estas últimas ecuaciones pueden expresarse matricialmente como sigue:

$$[\mathbf{A}] \frac{d\{\mathbf{Q}\}}{d\lambda} = \{\mathbf{P}\} \tag{66}$$

donde, P_i representa la carga crítica de pandeo. El sistema resultante se resuelve mediante Runge-Kutta.

9 EJEMPLO NUMÉRICO

Con el fin de evaluar el comportamiento de post-pandeo inicial del miembro estructural analizado, se considera una viga I de pared delgada con las siguientes características: $h = 0.6$ m, $b = 0.6$ m, $e = 0.03$ m y $L = 6$ m. El material es grafito-epoxy (AS4/3501) cuyas propiedades son: $E_1 = 144$ GPa, $E_2 = 9.65$ GPa, $G_{12} = 4.14$ GPa, $G_{13} = 4.14$ GPa, $G_{23} = 3.45$ GPa, $\nu_{12} = 0.3$, $\nu_{13} = 0.3$, $\nu_{23} = 0.5$, $\rho = 1389$ kg/m³. La secuencia de laminación considerada es $\{0/0/0/0\}$.

A continuación se presenta en forma gráfica los caminos de equilibrio para cada modo de deformación:

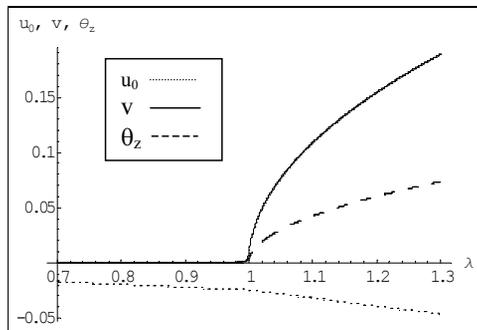


Figura 2: Camino de equilibrio - Extensional Flexional (u_0, v, θ_z)

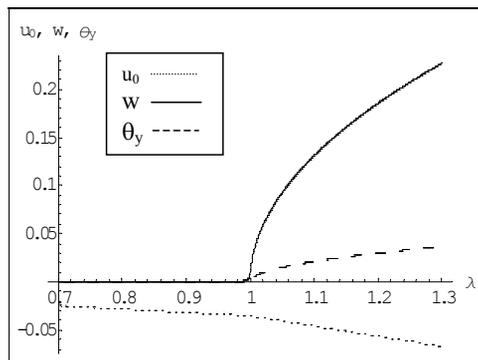


Figura 3: Camino de equilibrio - Extensional Flexional (u_0, w, θ_y)

Se le ha dado una pequeña perturbación inicial lateral a los propósitos de capturar el comportamiento de post-pandeo. Debe observarse como aumenta dicha perturbación a partir del valor de carga crítica ($\lambda = 1$) como era de esperarse. En general puede notarse que para los tres modos de deformación considerados, la estructura presenta una capacidad de carga remanente de post-pandeo, aunque en general de escasa aplicabilidad debido a la rapidez de crecimiento del corrimiento lateral.

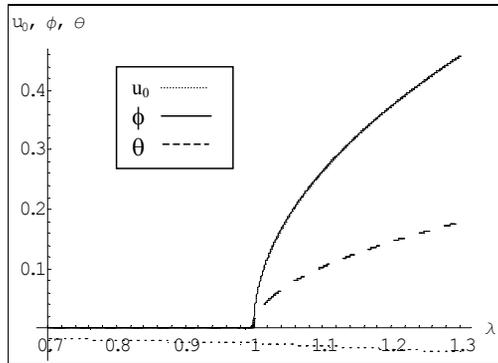


Figura 4: Camino de equilibrio - Extensional Torsional (u_0, ϕ, θ)

10 CONCLUSIONES

- Se ha desarrollado una teoría no lineal para vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos.
- La misma puede ser utilizada para vigas de sección transversal arbitraria.
- El modelo teórico considera efectos no convencionales, tal como flexibilidad por corte tanto en la flexión como en el alabeo torsional.
- Se presenta una metodología simple para la determinación del camino de equilibrio de post-pandeo.
- Se analiza como caso particular la respuesta de post-pandeo de una viga I simplemente apoyada.
- El camino de equilibrio de post-pandeo es muy plano (prácticamente vertical) y en consecuencia, para el caso analizado, el margen de capacidad de carga es limitado.

11 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado gracias a Secretaría de Ciencia y Tecnología, Universidad Tecnológica Nacional, y al CONICET.

12 REFERENCIAS

- V. Vlasov, *Thin Walled Elastic Beams*, Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, (1961).
- G.I Ioannidis, A.N. Kounadis, "Flexural-torsional postbuckling analysis of centrally compressed bars with open thin-walled cross-section", *Engineering Structures*, **21**, 55-61 (1999).
- A.N. Kounadis y G.I Ioannidis, "Lateral Postbuckling Analysis of Beam Columns", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, **4**, 695-706 (1994).

- [4] K. Bhaskar y L. Librescu, “A Geometrically Non-Linear Theory for Laminated Anisotropic Thin-Walled Beams”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 33, 9, 1331-1344 (1995).
- [5] E.J.Barbero, *Introduction to Composite Material Design*. Taylor and Francis Inc, (1999).
- [6] K.Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, (1968).
- [7] M-Y Kim, B-C Min y M-W Suh, “Spatial Stability of Nonsymmetric Thin-Walled Curved Beams. I: Analytical Approach”, *Journal of Engineering Mechanics*, **126**, 497-505 (2000).
- [8] V.H. Cortínez y R.E. Rossi, “Dynamics of shear deformable thin-walled open beams subjected to initial stresses”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 14, 3, 293-316 (1998).
- [9] E.C. Smith y I. Chopra, “Formulation and evaluation of an analytical model for composite box-beams”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol.36, 3, 33-35 (1991).
- [10] S. Krenk y O. Gunneskov, “Statics of Thin-Walled Pretwisted Beams”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1407-1426 (1981).
- [11] V.H. Cortínez y M.T. Piovan, “Vibration and Buckling of Composite Thin-Walled Beams with Shear Deformability”, *Journal of Sound and Vibration* (en prensa), (2002).
- [12] S.P. Timoshenko y J.M. Gere, *Theory of elastic structures*. McGraw-Hill, New York (1961).

APENDICE I

Las ecuaciones constitutivas de un laminado simétrico balanceado pueden ser expresadas en términos de resultantes de tensión laminares, de la siguiente forma⁵:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xs} \\ N_{xn} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \gamma_{xs}^{(0)} \\ \gamma_{xn}^{(0)} \\ \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{xs}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.I.1})$$

con

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \quad , \quad \bar{A}_{66} = A_{66} - \frac{A_{26}^2}{A_{22}} \quad , \quad \bar{A}_{55}^{(H)} = A_{55}^{(H)} - \frac{(A_{45}^{(H)})^2}{A_{44}^{(H)}} \\ \bar{D}_{11} &= D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}} \quad , \quad \bar{D}_{66} = D_{66} - \frac{D_{26}^2}{D_{22}} \end{aligned} \quad (\text{A.I.2})$$

donde A_{ij} , D_{ij} y $A_{ij}^{(H)}$ son coeficientes de rigidez definidos de acuerdo a la teoría de laminación presentada en⁵. El coeficiente \bar{D}_{16} ha sido despreciado, debido a su bajo valor por la secuencia de laminación considerada.

APENDICE II

Las resultantes de las fuerzas aplicadas a la viga, que aparecen en la ecuación (25), se definen como sigue:

$$\begin{aligned}
 q_x &= \int \bar{q}_x ds + \iint \bar{f}_x ds dn & , & \quad q_y = \int \bar{q}_y ds + \iint \bar{f}_y ds dn \\
 q_z &= \int \bar{q}_z ds + \iint \bar{f}_z ds dn & , & \quad b = \int \bar{q}_x \omega_p ds + \iint \bar{f}_x \omega ds dn \\
 m_z &= \int \bar{q}_x \bar{Y} ds + \iint \bar{f}_x \bar{y} ds dn & , & \quad m_y = \int \bar{q}_x \bar{Z} ds + \iint \bar{f}_x \bar{z} ds dn \\
 m_x &= \int (\bar{q}_z \bar{Y} - \bar{q}_y \bar{Z}) ds + \iint (\bar{f}_z \bar{y} - \bar{f}_y \bar{z}) ds dn + q_z y_0 - q_y z_0 & & \quad (A.II.1) \\
 m_{y1} &= m_y + q_x z_0 & , & \quad m_{z1} = m_z + q_x y_0 \\
 \lambda_y &= \int \bar{q}_y \bar{Y} ds + \iint \bar{f}_y \bar{y} ds dn & , & \quad \lambda_z = \int \bar{q}_z \bar{Z} ds + \iint \bar{f}_z \bar{z} ds dn \\
 \lambda_{mx} &= \int (\bar{q}_y \bar{Z} + \bar{q}_z \bar{Y}) ds + \iint (\bar{f}_y \bar{z} + \bar{f}_z \bar{y}) ds dn \\
 \lambda_{yz} &= \lambda_y + \lambda_z + q_y y_0 + q_z z_0
 \end{aligned}$$

Las resultantes de las fuerzas aplicadas en los extremos de la viga, que aparecen en la ecuación (25), son:

$$\begin{aligned}
 \bar{N} &= \iint \bar{p}_x ds dn & , & \quad \bar{Q}_y = \iint \bar{p}_y ds dn \\
 \bar{Q}_z &= \iint \bar{p}_z ds dn & , & \quad \bar{M}_z = \iint \bar{p}_x \bar{y} ds dn \\
 \bar{M}_y &= \iint \bar{p}_x \bar{z} ds dn & , & \quad \bar{B} = \iint \bar{p}_x \omega ds dn \\
 \bar{M}_x &= \iint (\bar{p}_z (\bar{y} + y_0) - \bar{p}_y (\bar{z} + z_0)) ds dn & & \quad (A.II.2) \\
 \bar{\lambda}_y &= \iint \bar{p}_y \bar{y} ds dn & , & \quad \bar{\lambda}_z = \iint \bar{p}_z \bar{z} ds dn \\
 \bar{\lambda}_{mx} &= \iint (\bar{p}_y \bar{z} + \bar{p}_z \bar{y}) ds dn \\
 \bar{B}_1 &= \iint (\bar{p}_y (\bar{y} + y_0) + \bar{p}_z (\bar{z} + z_0)) ds dn
 \end{aligned}$$