Mecánica Computacional Vol. XXI, pp. 1862–1881
S. R. Idelsohn, V. E. Sonzogni and A. Cardona (Eds.)
Santa Fe–Paraná, Argentina, October 2002

CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD PARA CÁSCARAS AFINES

Salvador GIGENA [1), 2)], Moisés BINIA [2), 3)], Daniel ABUD [2), 3)]

[1)] Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario
Avda. Pellegrini 250 - 2000 Rosario
e-mail: sgigena@fceia.unr.edu.ar

[2)] Departamento de Matemáticas
Facultad. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Universidad Nacional de Córdoba
Avda. Velez Sarsfield 299 - 5000 Córdoba
e-mail: dabud@efn.uncor.edu - mbinia@arnet.com.ar

[3)] Departamento de Ciencias Básicas
Facultad. Regional Córdoba - Universidad Tecnológica Nacional
Avda. Vladislao Frias s/n - 5000 Córdoba
e-mail: dabud@efn.uncor.edu

Palabras Clave: Cáscaras Afines, Grupo Unimodular Afín, Condiciones de compatibilidad

Resumen. *La teoría de cáscaras delgadas ha sido desarrollada en una gran variedad de formas y por diversos autores basados, desde el punto de vista geométrico, en la clásica Teoría de Superficies en el espacio tridimensional, particularmente con respecto a los invariantes del Grupo Euclidiano, ASO(3,$\mathbb{R}$), i.e., el grupo de transformaciones generadas por traslaciones y rotaciones del espacio ambiente. Entonces, por ejemplo, lo que llamamos "normal" es la euclidiana, y la "distancia" es medida con respecto a la norma inducida por el producto escalar de vectores usual (definido positivo), que es el invariante fundamental de la Geometría Euclidiana.*

Hemos trabajado en un desarrollo alternativo de la teoría de cáscaras que es invariante bajo la acción del grupo unimodular afín, ASL(3,$\mathbb{R}$). Esta es la llamada geometría afín de superficies. Así, para una superficie dada en el espacio tridimensional también tenemos los conceptos de "normal afín" y "distancia afín".

En este artículo, luego de introducir la definición de "cáscara afín", usamos las condiciones de integrabilidad de la geometría afín de manera de establecer condiciones de compatibilidad bidimensionales para cada caso de cáscara. Esto representa uno de los primeros pasos en el desarrollo de esta teoría, que contiene un mayor número de invariantes que la previa, euclidiana. Es así, que se logra un camino para la estimación de estos invariantes, procedimiento que tendrá un significativo efecto en los métodos computacionales que vendrán a continuación.

INTRODUCCION

En la teoría de elasticidad, el término **cáscara** (fina o delgada) se aplica a cuerpos limitados por dos superficies curvadas donde la distancia entre las superficies es pequeña en comparación con las otras dimensiones. El espesor *h* podría variar, pero se lo considera constante en general. Si la cáscara no tiene otra limitación además de las dos superficies, entonces se llamará *completa*. La superficie media, el espesor y los bordes definen completamente la geometría de una cáscara.

La teoría de cáscaras forma parte de la teoría de la elasticidad concerniente al estudio de la deformación de cuerpos elásticos bajo la influencia de cargas dadas. En este sentido, se asume que el material deberá ser isótropo, obedecer a la Ley de Hooke, y además, que los desplazamientos en algún punto sean pequeños en comparación con el espesor de la cáscara.

Si esto **no** se cumple, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del material resultarán no-lineales y su solución traerá grandes dificultades. Sin que esto represente una condición totalmente restrictiva.

Notemos que la cáscara posee propiedades muy útiles por su naturaleza elástica y, mediante un adecuado diseño, es posible conseguir que soportaen grandes cargas. En conexión con esto, el diseñador gana mucho al considerarla como una placa ligeramente curvada, así como cuando se reemplaza una viga con un arco suave.

Existe un amplio espectro de aplicaciones (aeronáutica, barcos, estructuras de hormigón, etc.) pero todavía no se usa mucho en aquellas estructuras donde el peso importa de manera vital. Existe una analogía entre placas y cáscaras (sugiriendo llamarlas placas curvadas). Esta es la base por la que se adoptan numerosos métodos de la teoría de placas.

Entonces apareció un método, el que propuso Kirchhoff, quien introdujo sentido físico en la teoría de placas y que ha permanecido en uso hasta hoy. Kirchhoff basó su razonamiento en varios supuestos, análogos a aquellos usados en la teoría de vigas. Sus supuestos pueden ser reducidos a los siguientes:

a) Las fibras rectas de una placa que son perpendiculares a la superficie media antes de la deformación, permanecen así después de la deformación y no cambian su longitud.

b) Las tensiones normales actuando en planos paralelos a la superficie media pueden ser despreciadas en comparación con las demás tensiones.

Debemos señalar que el método de Kirchhoff es insuficiente en un sentido, a saber, es sólo aproximado y **no** puede ser desarrollado en una teoría más exacta.

Estas inexactitudes fueron descubiertas y corregidas por A.E.H. Love en un artículo donde formuló una teoría de cáscaras en analogía con la teoría de placas de Kirchhoff. Una versión de la teoría de cáscaras, propuesta por Love, fue dada en el capítulo 24 de su libro de una manera diferente a la de su artículo.

A pesar de su popularidad, el desarrollo dado por Love no está librado de insuficiencias, en las que es inconsistente con referencia a los términos pequeños: algunos son mantenidos y otros con el mismo orden de magnitud son desechados. Estas insuficiencias han sido notadas a lo largo del tiempo y por diversos autores, usando la teoría de Love, agregaron ciertos pequeños términos, por una cuestión de consistencias, otros han omitido los pequeños términos que habían sido retenidos. Se originaron diferentes versiones de la formulación de la teoría de cáscaras que, aún así, sólo difieren del prototipo (la teoría de Love) por los términos que son pequeños.

Conjuntamente con el desarrollo de la teoría de cáscaras basada en la analogía de la teoría de placas de Kirchhoff, varios intentos han sido hechos para construir teorías de cáscaras más complicadas en correspondencia con mayores grados de precisión. Los primeros intentos son debidos a A.E.H. Love, aunque en muchos aspectos no desarrolló una teoría totalmente general, sino que al igual que otros autores realizó estimaciones despreciando términos desde un comienzo.

En nuestro estudio, partiremos de las hipótesis de Love-Kirchhoff ya vistas, que son esencialmente una extensión de las ideas que subyacen a la teoría elemental de vigas. Los trabajos de Fritz John conforman una buena base para la teoría de cáscaras ya que se apoyan en la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales elípticas, brindando un marco teórico adecuado; mientras que W. T. Koiter ha linealizado desde un comienzo quitándole generalidad matemática a su desarrollo.

Parecería que una propuesta más simple, y a la vez más completa, para la teoría de cáscaras es imposible, si uno tiene en mente una teoría que sea lo suficientemente general como para que sirva para aplicar a todos los problemas. Pero, veremos que efectivamente sí la hay, y esa es la teoría que hemos formulado. Es decir, *replantear* toda la teoría de cáscaras basándonos en otra geometría diferente a la empleada hasta ahora. Luego de introducir la definición de “*cáscara afín*”, usaremos las condiciones de integrabilidad de la geometría afín de manera de establecer condiciones de compatibilidad bidimensionales para cada caso de cáscara. Esto representa uno de los primeros pasos en el desarrollo de esta teoría, que contiene un mayor número de invariantes que la previa, la euclidiana.

Es así, que hemos logrado un camino para la estimación de estos invariantes, procedimiento que tendrá un significativo efecto en los métodos computacionales que vendrán con posterioridad. Aquí, sólo se presenta la formulación fundamentada de la teoría.

Conjeturamos que, las aproximaciones o estimativas que se obtengan en futuros métodos computacionales con el desarrollo de esta teoría, van a tener un mayor grado de aproximación puesto que los invariantes involucrados alcanzan un mayor orden de diferenciabilidad.

A fin de facilitar la expresión de las ecuaciones a ser presentadas, vamos a denotar, también, con el signo de derivación ∂ con subíndices, las derivadas parciales ordinarias sucesivas de las funciones escalares y vectoriales, así, por ejemplo:

$$\frac{\partial g}{\partial u^{\alpha}} := \partial_{\alpha} g \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial U^{i}} := \partial_{i} f \quad ; \quad \frac{\partial^{2} f}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} := \partial_{\alpha\beta} f \tag{1}$$

Además, para mayor claridad en la exposición, usaremos los siguientes rangos de índices: con letras latinas mayúsculas denotaremos índices variando en general en cualquier número de dimensiones; con letras latinas minúsculas índices variando entre 1 y 3: $1 \leq i, j, k, \ldots \leq 3$, esto significa que nos situamos en la cáscara $\mathcal{C}$ (considerándola como un volumen); mientras que las minúsculas griegas serán reservadas para denotar una variación entre 1 y 2: $1 \le \alpha, \beta, \gamma, ... \le 2$, i.e.: nos referimos a la superficie media M_0 original y sin deformación o a la superficie media deformada M_0^*.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En la **sección 1**, desarrollamos los elementos esenciales de la Teoría de Cáscaras, en la forma clásica y tradicional de usar, para la parte geométrica, la teoría euclidiana de superficies. En particular, establecemos las condiciones de integrabilidad para superficies, que deben ser satisfechas tanto por la superficie media sin deformar, M_0, como por la superficie media después de la deformación, M_0^*. En la **sección 2**, establecemos las Ecuaciones de Compatibilidad para Cáscaras Euclídeas. En la **sección 3**, introducimos el concepto de Cáscara Afín, presentando todos los objetos geométricos que intervienen en su formulación, a partir de la Teoría Afín de Superficies, incluyendo las condiciones de integrabilidad que nuevamente, deben ser satisfechas por ambas superficies: previo y posterior a la deformación.

En la **sección 4**, demostramos, a partir de todo lo anterior, las Condiciones de Compatibilidad para Cáscaras Afines.

1. Cáscaras Euclidianas (*Euclidian Shells*)

Consideremos la superficie media de la cáscara en el sistema no deformado, que denotaremos M_0, parametrizada localmente por una función vectorial, suficientemente diferenciable, expresada por $X_0 : U \to \mathbb{R}^3$, donde $U \subset \mathbb{R}^2$.

Denotaremos a las coordenadas del dominio (u^1, u^2). De tal manera que podemos expresar, localmente,

$$M_0 = X_0(u^1, u^2) \tag{2}$$

supondremos además, como implícita y habitualmente se hace, que X_0 es una inmersión topológica (*embedding* en Inglés).

Las partículas de la cáscara, en el estado original, tienen coordenadas curvilíneas (U^1, U^2, U^3) y las representamos en la forma

$$(U^1, U^2, U^3) = X(u^1, u^2, t) = X_t(u^1, u^2) = X_0(u^1, u^2) + t\vec{\mathbf{n}} \qquad \text{con } U^3 = t \tag{3}$$

donde hemos extendido, obviamente, la anterior función a $X : U \times (-h, h) \to \mathbb{R}^3$, con $X(u^1, u^2, 0) = X_0(u^1, u^2)$ y $\vec{\mathbf{n}}$ es el vector normal a la superficie media, que puede ser la *normal euclidiana***,** N_{eu}, de la teoría clásica, o la *normal unimodular afín*, N_{ua}, de nuestro propio desarrollo. En cada caso aclararemos cuando se trate de una u otra.

En el caso euclidiano, usaremos la siguiente notación para los principales objetos geométricos, definidos en la superficie media antes de la deformación, que intervienen en la formulación de la teoría:

$$I_{eu} = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}, \qquad \text{con} \qquad a_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_0}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial X_0}{\partial u^{\beta}} \tag{4}$$

denota la primera forma fundamental euclidiana, mientras que con la expresión

$$II_{eu} = \sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}, \qquad \text{siendo } L_{\alpha\beta} = N_{eu} \cdot \frac{\partial^2 X_0}{\partial u^{\beta} \partial u^{\alpha}} \quad , \tag{5}$$

representamos a la segunda forma fundamental euclidiana, y con

$$III_{eu} = \sum_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}, \qquad \text{siendo } M_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda} L_{\alpha\lambda} L_{\beta}^{\lambda} = \sum_{\gamma\lambda} a^{\gamma\lambda} L_{\alpha\lambda} L_{\beta\gamma} \quad , \tag{6}$$

la tercera forma fundamental euclidiana.

En el estado no deformado el borde de la cáscara está compuesto de dos “caras”, que son superficies paralelas a distancia $2h$ de la superficie media M_0 (medida a lo largo de la dirección normal euclidiana definida por N_{eu}, y de un “borde” formado por normales a las caras. A su vez, estas caras tienen distancia constante a la “superficie media” M_0. En lo que sigue, las coordenadas $(U^1, U^2, U^3) = (U^1, U^2, t)$ representarán siempre este tipo de coordenadas “normales” basadas en M_0; es decir, a lo largo de una normal a M_0 las coordenadas U^1, U^2 deben ser constantes mientras $U^3 := t$ mide la distancia con su signo desde M_0.

Las caras entonces, tienen las ecuaciones $U^3 = t = \pm h$ mientras que la superficie media es $U^3 = t = 0$. Si, como representamos anteriormente, $a_{\alpha\beta}$, $L_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$, son, respectivamente, los coeficientes de la primera, segunda y tercera forma fundamental euclidianas de la superficie M_0, en las coordenadas normales euclidianas de la cáscara, la estructura euclidiana del espacio ambiente induce en forma natural sobre la cáscara una estructura Riemanniana, y obtenemos, mediante un cálculo directo, los siguientes valores para tal estructura en las mencionadas coordenadas normales $(U^1, U^2, U^3) = (U^1, U^2, t)$

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \frac{\partial X}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial X}{\partial u^{\beta}} = a_{\alpha\beta} - 2tL_{\alpha\beta} + t^2 M_{\alpha\beta} \\ A_{\alpha 3} = A_{3\alpha} &= \frac{\partial X}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial u^{\alpha}} \cdot N_{eu} = 0 \\ A_{33} &= \frac{\partial X}{\partial t} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} = N_{eu} \cdot N_{eu} = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Correspondientemente a la cáscara, y su superficie media, en el estado previo a la deformación, podemos considerar los objetos geométricos que pertenecen a la cáscara en el estado deformado, que denotaremos con un asterisco superior derecho. Así, por ejemplo

$X_0^*: U \to \mathbb{R}^3$, donde $U \subset \mathbb{R}^2$ representa la parametrización de la superficie media de la cáscara deformada $M_0^* = X_0^*(u^1, u^2)$, donde destacamos que el dominio de definición de esta inmersión, $U \subset \mathbb{R}^2$, y sus parámetros, o coordenadas del dominio, (u^1, u^2), son los mismos que para la superficie media de la cáscara en el estado original, previo a la deformación.

En consecuencia, todo el resto de objetos geométricos cambian de un estado al otro y se trata de determinar la naturaleza y extensión de tales cambios, para cada uno de ellos. Ahora bien, referente a la geometría de superficies, entre tales objetos están los de naturaleza *intrínseca*, pertenecientes y determinados por la métrica, que en el caso euclidiano es inducida por la métrica usual del espacio ambiente, y los de naturaleza *extrínseca*, que son los determinados por la dirección normal a la superficie y nos indican cómo la superficie se sitúa en el espacio ambiente.

Los cambios de naturaleza intrínseca son comunes a todos los casos posibles de estructura (pseudo)-Riemanniana, y para cualquier dimensión: por ejemplo para el caso bidimensional de la superficie media, o para el caso tridimensional de la cáscara. En consecuencia, vamos a realizar una pequeña digresión en nuestra presente exposición para determinar estos resultados de validez universal.

Supongamos, entonces, tener dos estructuras (pseudo)-Riemannianas definidas en el mismo espacio, variedad diferenciable M, que denotaremos (M, g) y (M, g^*). Puesto que, cada una de estas estructuras determina una única conexión, de Levi-Civita, veamos la relación entre tales conexiones y los correspondientes tensores de Curvatura Riemanniana.

Lema 1 (Relación entre las conexiones de Levi-Civita): Sean (M, g) y (M, g^*) estructuras (pseudo)-Riemannianas definidas en la variedad diferenciable M, denotemos con ∇, ∇^* las conexiones de Levi-Civita asociadas y con Γ^A_{BC} y Γ^{*A}_{BC} los símbolos de Christoffel (de segunda especie) correspondientes. Entonces ambas conexiones están relacionadas por la ecuación

$$\Gamma^{*A}_{BC} = \Gamma^A_{BC} + T^A_{BC} \tag{8}$$

donde T^A_{BC} representa a las componentes del tensor definido por

$$T^A_{BC} = \tfrac{1}{2} \bar{g}^{*AR} \left(g^*_{RB|C} + g^*_{RC|B} - g^*_{BC|R} \right) \tag{9}$$

donde la barra inferior **|** denota derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita de g, siendo $\bar{g}^{*UV}$ las componentes del tensor que representa la matriz inversa de g^*_{UV}.

Demostración

Cada derivada covariante tiene por expresión:

$$g^*_{RB|C} = \partial_C \, g^*_{RB} - \Gamma^H_{RC} \, g^*_{HB} - \Gamma^H_{BC} \, g^*_{HR}$$

$$\begin{aligned} \overset{*}{g}_{RC|B} &= \partial_B \ \overset{*}{g}_{RC} - \Gamma^H_{RB} \ \overset{*}{g}_{HC} - \Gamma^H_{CB} \ \overset{*}{g}_{HR} \\ \overset{*}{g}_{BC|R} &= \partial_R \ \overset{*}{g}_{BC} - \Gamma^H_{BR} \ \overset{*}{g}_{HC} - \Gamma^H_{CR} \ \overset{*}{g}_{HB} \end{aligned} \tag{10 }$$

sumando las dos primeras y restando la tercera, nos queda:

$$\overset{*}{g}_{RB|C} + \overset{*}{g}_{RC|B} - \overset{*}{g}_{BC|R} = \partial_C \ \overset{*}{g}_{RB} + \partial_B \ \overset{*}{g}_{RC} - \partial_R \ \overset{*}{g}_{BC} - 2\Gamma^{*H}_{BC} \ \overset{*}{g}_{HR} \tag{11}$$

multiplicando ambos miembros por $\tfrac{1}{2}\overline{g}^{*AR}$ y sumando en el índice R:

$$\tfrac{1}{2}\overline{g}^{*AR}\left(\overset{*}{g}_{RB|C} + \overset{*}{g}_{RC|B} - \overset{*}{g}_{BC|R}\right) = \tfrac{1}{2}\overline{g}^{*AR}\left(\partial_C \ \overset{*}{g}_{RB} + \partial_B \ \overset{*}{g}_{RC} - \partial_R \ \overset{*}{g}_{BC}\right) - \overline{g}^{*AR}\Gamma^{*H}_{BC} \ \overset{*}{g}_{HR} \tag{12}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\overline{g}^{*AR}\left(\overset{*}{g}_{RB|C} + \overset{*}{g}_{RC|B} - \overset{*}{g}_{BC|R}\right) &= \Gamma^{*A}_{BC} - \delta^A_H \Gamma^{*H}_{BC} \\ &= \Gamma^{*A}_{BC} - \Gamma^A_{BC} \end{aligned} \tag{13}$$

lo que demuestra el lema.

Lema 2 (Relación entre los tensores de Curvatura): En las condiciones del lema anterior, las componentes de los respectivos tensores de curvatura Riemannianos asociados, R^L_{MNP}, $\overset{*}{R}_{ABCD}$ están relacionadas por la ecuación:

$$\overset{*}{R}_{ACDB} = \varepsilon_{AB|CD} + \varepsilon_{CD|AB} - \varepsilon_{AD|CB} - \varepsilon_{BC|AD} - \frac{1}{2}\left(\overset{*}{g}_{AM} R^M_{CBD} + \overset{*}{g}_{CM} R^M_{ADB}\right) + \overset{*}{g}_{LS}(T^L_{AB}T^S_{CD} - T^L_{AD}T^S_{BC}) \tag{14}$$

donde, por definición, $\varepsilon_{AB} := \tfrac{1}{2}\left(\overset{*}{g}_{AB} - g_{AB}\right)$, y $\varepsilon_{AB|CD}$ denota la derivada covariante segunda respecto a la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica g .

Demostración

Derivando el tensor con componentes ε_{AB}:

$$\varepsilon_{AB|C} = \tfrac{1}{2}\left(\overset{*}{g}_{AB|C} - \cancel{g}_{AB|C}\right) \tag{15}$$

donde tenemos $g_{AB|C} = 0$, precisamente por definición de la conexión de Levi-Civita. Entonces podemos escribir:

$$\varepsilon_{AB|C} = \tfrac{1}{2}\left(\partial_C \overset{*}{g}_{AB} - \overset{*}{g}_{AU}\Gamma^U_{BC} - \overset{*}{g}_{BU}\Gamma^U_{AC}\right) \tag{16}$$

derivando otra vez covariantemente, obtenemos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{AB|CD} =& \tfrac{1}{2}\left(\partial_{CD} \overset{*}{g}_{AB} - \partial_D \overset{*}{g}_{AU}\Gamma^U_{BC} - \overset{*}{g}_{AU}\partial_D \Gamma^U_{BC} - \partial_D \overset{*}{g}_{BU}\Gamma^U_{AC} - \overset{*}{g}_{BU}\partial_D\Gamma^U_{AC}\right) - \\ & -\tfrac{1}{2}\left(\partial_V \overset{*}{g}_{AB} - \overset{*}{g}_{AU}\Gamma^U_{BV} - \overset{*}{g}_{BU}\Gamma^U_{AV}\right)\Gamma^V_{CD} - \\ & -\tfrac{1}{2}\left(\partial_C \overset{*}{g}_{AV} - \overset{*}{g}_{AU}\Gamma^U_{VC} - \overset{*}{g}_{VU}\Gamma^U_{AC}\right)\Gamma^V_{BD} - \\ & -\tfrac{1}{2}\left(\partial_C \overset{*}{g}_{VB} - \overset{*}{g}_{VU}\Gamma^U_{BC} - \overset{*}{g}_{BU}\Gamma^U_{VC}\right)\Gamma^V_{AD}\end{aligned} \tag{17}$$

permutando índices y haciendo el cómputo de

$$\varepsilon_{AB|CD} + \varepsilon_{CD|AB} - \varepsilon_{AD|CB} - \varepsilon_{BC|AD} \tag{18}$$

nos queda:

$$\begin{aligned}2\left(\varepsilon_{AB|CD} + \varepsilon_{CD|AB} - \varepsilon_{AD|CB} - \varepsilon_{BC|AD}\right) =& \partial_{CD}\overset{*}{g}_{AB} + \partial_{AB}\overset{*}{g}_{CD} - \partial_{CB}\overset{*}{g}_{AD} - \partial_{AD}\overset{*}{g}_{BC} - \\ & -\partial_A \overset{*}{g}_{VD}\Gamma^V_{CB} + \partial_A \overset{*}{g}_{BV}\Gamma^V_{CD} + \partial_B \overset{*}{g}_{AU}\Gamma^U_{CD} - \\ & -\partial_B \overset{*}{g}_{CU}\Gamma^U_{AD} - \partial_C \overset{*}{g}_{VB}\Gamma^V_{AD} + \partial_C \overset{*}{g}_{VD}\Gamma^V_{AB} - \\ & -\partial_D \overset{*}{g}_{AU}\Gamma^U_{BC} + \partial_D \overset{*}{g}_{CU}\Gamma^U_{AB} - \partial_V \overset{*}{g}_{CD}\Gamma^V_{AB} + \\ & +\partial_V \overset{*}{g}_{AD}\Gamma^V_{CB} + \partial_V \overset{*}{g}_{BC}\Gamma^V_{AD} - \partial_V \overset{*}{g}_{AB}\Gamma^V_{CD} + \\ & + \overset{*}{g}_{AU}\left(\partial_B\Gamma^U_{CD} - \partial_D\Gamma^U_{BC} + \Gamma^U_{BV}\Gamma^V_{CD} - \Gamma^U_{DV}\Gamma^V_{BC}\right) + \\ & + \overset{*}{g}_{CU}\left(\partial_D\Gamma^U_{AB} - \partial_B\Gamma^U_{AD} + \Gamma^U_{DV}\Gamma^V_{AB} - \Gamma^U_{BV}\Gamma^V_{AD}\right) + \\ & +2\overset{*}{g}_{VU}\left(\Gamma^U_{BC}\Gamma^V_{AD} - \Gamma^U_{AB}\Gamma^V_{CD}\right)\end{aligned} \tag{19}$$

que comparamos con $\overset{*}{R}_{ACDB}$, el tensor de curvatura, asociado a la métrica: $g^* = \sum_{A,\,B} \overset{*}{g}_{AB} du^A du^B$ (o sea, a la conexión de Levi-Civita ∇^*),

$$\begin{aligned}\overset{*}{R}_{ACDB} =& \tfrac{1}{2}\left(\partial_{CD}\overset{*}{g}_{AB} + \partial_{AB}\overset{*}{g}_{CD} - \partial_{CB}\overset{*}{g}_{AD} - \partial_{AD}\overset{*}{g}_{BC}\right) + \\ & + \overline{g}^{*UV}\left([CD,V]^*[AB,U]^* - [BC,V]^*[AD,U]^*\right)\end{aligned} \tag{20}$$

donde $\overline{g}^{*UV}$ son las componentes del tensor que representa la matriz inversa de $\overset{*}{g}_{UV}$; y los símbolos de Christoffel (de primera especie) de la estructura (pseudo)-Riemanniana deformada g^* están dados por:

$$[MN,P]^* = \tfrac{1}{2}\left(\partial_N \overset{*}{g}_{MP} + \partial_M \overset{*}{g}_{NP} - \partial_P \overset{*}{g}_{MN}\right) \tag{21}$$

mientras que los símbolos de Christoffel de la estructura (pseudo)-Riemanniana deformada g^* de segunda especie se relacionan con los de primera especie por la ecuación:

$$\Gamma^{*E}_{AB} = \Gamma^{E}_{AB} + T^{E}_{AB} = \bar{g}^{*ES}\left[AB,S\right]^* \tag{22}$$

de la cual obtenemos, equivalentemente, que

$$\left[AB,C\right]^* = g^*_{CR}(\Gamma^R_{AB} + T^R_{AB}) \tag{23}$$

En consecuencia, el segundo término en la expresión de las componentes del tensor de curvatura, de la estructura (pseudo)-Riemanniana deformada g^*, puede ser representado por

$$\begin{aligned} &\bar{g}^{*UV}\left(\left[CD,V\right]^*\left[AB,U\right]^* - \left[BC,V\right]^*\left[AD,U\right]^*\right) = \\ &= g^*_{LS}\left[\left(\Gamma^L_{AB} + T^L_{AB}\right)\left(\Gamma^S_{CD} + T^S_{CD}\right) - \left(\Gamma^L_{AD} + T^L_{AD}\right)\left(\Gamma^S_{BC} + T^S_{BC}\right)\right] \end{aligned} \tag{24}$$

y podemos representar las componentes del mencionado tensor por la expresión

$$\begin{aligned} R^*_{ACDB} = {} & \varepsilon_{AB\|CD} + \varepsilon_{CD\|AB} - \varepsilon_{AD\|CB} - \varepsilon_{BC\|AD} - \\ & -\tfrac{1}{2}\left(-\partial_A g^*_{VD}\Gamma^V_{CB} + \partial_A g^*_{BV}\Gamma^V_{CD} + \partial_B g^*_{AU}\Gamma^U_{CD} - \partial_B g^*_{CU}\Gamma^U_{AD}\right) - \\ & -\tfrac{1}{2}\left(-\partial_C g^*_{VB}\Gamma^V_{AD} + \partial_C g^*_{VD}\Gamma^V_{AB} - \partial_D g^*_{AU}\Gamma^U_{BC} + \partial_D g^*_{CU}\Gamma^U_{AB}\right) - \\ & -\tfrac{1}{2}\left(-\partial_V g^*_{CD}\Gamma^V_{AB} + \partial_V g^*_{AD}\Gamma^V_{CB} + \partial_V g^*_{BC}\Gamma^V_{AD} - \partial_V g^*_{AB}\Gamma^V_{CD}\right) - \\ & -\tfrac{1}{2}\left(g^*_{AU} R^U_{CBD} + g^*_{CU} R^U_{ADB}\right) - g^*_{VU}\left(\Gamma^U_{BC}\Gamma^V_{AD} - \Gamma^U_{AB}\Gamma^V_{CD}\right) + \\ & + g^*_{LS}\left[\left(\Gamma^L_{AB} + T^L_{AB}\right)\left(\Gamma^S_{CD} + T^S_{CD}\right) - \left(\Gamma^L_{AD} + T^L_{AD}\right)\left(\Gamma^S_{BC} + T^S_{BC}\right)\right] \end{aligned} \tag{25}$$

donde R^A_{CBD} representa a las componentes del tensor de curvatura, respecto a la conexión de Levi-Civita, para la métrica *g*.
Más aún, usando las ecuaciones anteriores podemos simplificar la última expresión:

$$\begin{aligned} R^*_{ACDB} = {} & \varepsilon_{AB|CD} + \varepsilon_{CD|AB} - \varepsilon_{AD|CB} - \varepsilon_{BC|AD} + \\ & + \Gamma^V_{CB} g^*_{VR}(\Gamma^R_{AD} + T^R_{AD}) - \Gamma^V_{CD} g^*_{VR}(\Gamma^R_{AB} + T^R_{AB}) + \Gamma^V_{AD} g^*_{VR}(\Gamma^R_{CB} + T^R_{CB}) - \\ & - \Gamma^V_{AB} g^*_{VR}(\Gamma^R_{CD} + T^R_{CD}) - \frac{1}{2}\left(g^*_{AU} R^U_{CBD} + g^*_{CU} R^U_{ADB}\right) + \\ & + g^*_{LS}\left[\Gamma^L_{AB}T^S_{CD} + T^L_{AB}\Gamma^S_{CD} + T^L_{AB}T^S_{CD} - \Gamma^L_{AD}T^S_{BC} - T^L_{AD}\Gamma^S_{BC} - T^L_{AD}T^S_{BC}\right] \end{aligned} \tag{26}$$

entonces,

$$R^*_{ACDB} = \varepsilon_{AB|CD} + \varepsilon_{CD|AB} - \varepsilon_{AD|CB} - \varepsilon_{BC|AD} - \frac{1}{2}\left(g^*_{AU} R^U_{CBD} + g^*_{CU} R^U_{ADB}\right) + g^*_{LS}\left(T^L_{AB}T^S_{CD} - T^L_{AD}T^S_{BC}\right) \tag{27}$$

Retornando a nuestra exposición, y para finalizar esta sección, recordemos que toda superficie, en particular tanto M_0 como M_0^*, debe satisfacer las *Condiciones de Integrabilidad*, representadas por, [vii]:

1) Las ecuaciones de Gauss

$$R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = L_{\alpha\gamma} L^{\delta}_{\beta} - L_{\alpha\beta} L^{\delta}_{\gamma} \tag{28}$$

2) Las ecuaciones de Mainardi-Codazzi

$$\partial_{\gamma} L_{\alpha\beta} - \partial_{\beta} L_{\alpha\gamma} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma} L_{\rho\beta} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} L_{\rho\gamma} \tag{29}$$

2. Condiciones de Compatibilidad para Cáscaras Euclídeas

Estas condiciones son derivadas a partir de lo establecido en la sección anterior, última parte, de que ambas superficies deben satisfacer las condiciones de integrabilidad. Primeramente, obtengamos la Ecuación de Gauss. A partir de la (28), tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{R}^*_{\alpha\gamma\delta\beta} &= L^*_{\gamma\beta} L^*_{\alpha\delta} - L^*_{\gamma\delta} L^*_{\alpha\beta} \\ \tilde{R}^{\mu}_{\gamma\beta\delta} &= L_{\gamma\delta} L^{\mu}_{\beta} - L_{\gamma\beta} L^{\mu}_{\delta} \end{aligned} \tag{30}$$

donde ahora $\tilde{R}$ representa al tensor de curvatura de M_0 y $\tilde{R}^*$ el de M_0^*,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\left(a^*_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}\right) \tag{31}$$

derivando y sumando:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \varepsilon_{\gamma\delta,\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\delta,\gamma\beta} - \varepsilon_{\beta\gamma,\alpha\delta} = {} & L^*_{\gamma\beta} L^*_{\alpha\delta} - L^*_{\gamma\delta} L^*_{\alpha\beta} + \\ & + \frac{1}{2}\Big(g^*_{\alpha\mu}\left(L_{\gamma\delta} L^{\mu}_{\beta} - L_{\gamma\beta} L^{\mu}_{\delta}\right) + g^*_{\gamma\mu}\left(L_{\alpha\beta} L^{\mu}_{\delta} - L_{\alpha\delta} L^{\mu}_{\beta}\right)\Big) - \\ & - g^*_{\lambda\sigma}(C^{\lambda}_{\alpha\beta} C^{\sigma}_{\gamma\delta} - C^{\lambda}_{\alpha\delta} C^{\sigma}_{\beta\gamma}) \end{aligned} \tag{32}$$

que representa la condición buscada. Sin embargo, puede reducirse su expresión, puesto que de esta última podemos obtener, primeramente

$$\begin{aligned} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\gamma}(\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \varepsilon_{\gamma\delta,\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\delta,\gamma\beta} - \varepsilon_{\beta\gamma,\alpha\delta}) = {} & L^{*\sigma}_{\beta} L^{*\rho}_{\delta} - L^{*\sigma}_{\delta} L^{*\rho}_{\beta} + \\ & + \tfrac{1}{2}\Big(g^{*\rho}_{\mu}\left(L^{\sigma}_{\delta} L^{\mu}_{\beta} - L^{\sigma}_{\beta} L^{\mu}_{\delta}\right) + g^{*\sigma}_{\mu}\left(L^{\rho}_{\beta} L^{\mu}_{\delta} - L^{\rho}_{\delta} L^{\mu}_{\beta}\right)\Big) - \\ & - g^*_{\mu\nu} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\gamma}(C^{\mu}_{\alpha\beta} C^{\nu}_{\gamma\delta} - C^{\mu}_{\alpha\delta} C^{\nu}_{\beta\gamma}) \end{aligned} \tag{33}$$

A seguir contraemos índices: ρ con β, σ con δ, para obtener

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\beta,\delta}_{\beta,\delta} - \varepsilon^{\delta,\beta}_{\beta,\delta} = {} & L^{*\delta}_{\beta} L^{*\beta}_{\delta} - L^{*\delta}_{\delta} L^{*\beta}_{\beta} + \\ & + \tfrac{1}{2}\Big(g^{*\beta}_{\mu} \left(L^{\delta}_{\delta} L^{\mu}_{\beta} - L^{\delta}_{\beta} L^{\mu}_{\delta} \right) + g^{*\delta}_{\mu} \left(L^{\beta}_{\beta} L^{\mu}_{\delta} - L^{\beta}_{\delta} L^{\mu}_{\beta} \right) \Big) - \\ & - g^{*}_{\mu\nu} g^{\beta\alpha} g^{\delta\gamma} (C^{\mu}_{\alpha\beta} C^{\nu}_{\gamma\delta} - C^{\mu}_{\alpha\delta} C^{\nu}_{\beta\gamma})\end{aligned} \tag{34}$$

que, por simetría de los índices de suma, puede aún reducirse a

$$\varepsilon^{\beta,\delta}_{\beta,\delta} - \varepsilon^{\delta,\beta}_{\beta,\delta} = L^{*\delta}_{\beta} L^{*\beta}_{\delta} - L^{*\delta}_{\delta} L^{*\beta}_{\beta} + g^{*\beta}_{\mu} \left(L^{\delta}_{\delta} L^{\mu}_{\beta} - L^{\delta}_{\beta} L^{\mu}_{\delta} \right) - g^{*}_{\mu\nu} g^{\beta\alpha} g^{\delta\gamma} (C^{\mu}_{\alpha\beta} C^{\nu}_{\gamma\delta} - C^{\mu}_{\alpha\delta} C^{\nu}_{\beta\gamma}) \tag{35}$$

En segundo lugar, establecemos las condiciones de Mainardi-Codazzi. Por definición, tenemos:

$$L_{\alpha\beta,\gamma} = \partial_{\gamma} L_{\alpha\beta} - \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma} L_{\mu\beta} - \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\gamma} L_{\mu\alpha} \tag{36}$$

e intercambiando los dos últimos índices:

$$L_{\alpha\gamma,\beta} = \partial_{\beta} L_{\alpha\gamma} - \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} L_{\mu\gamma} - \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\gamma} L_{\mu\alpha} \tag{37}$$

La ecuación de Mainardi-Codazzi, (o condición de Codazzi para B) puede expresarse, según (29) por:

$$\partial_{\gamma} L_{\alpha\beta} - \partial_{\beta} L_{\alpha\gamma} = \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma} L_{\mu\beta} - \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} L_{\mu\gamma} \tag{38}$$

Similarmente, podemos escribir para la superficie media deformada M^{*}_{0}

$$\partial_{\gamma} L^{*}_{\alpha\beta} - \partial_{\beta} L^{*}_{\alpha\gamma} = (\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma} + C^{\mu}_{\alpha\gamma}) L^{*}_{\mu\beta} + (\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} + C^{\mu}_{\alpha\beta}) L^{*}_{\mu\gamma} \tag{39}$$

la última ecuación y la (38) implican que

$$L^{*}_{\alpha\beta,\gamma} - L^{*}_{\alpha\gamma,\beta} = C^{\mu}_{\alpha\gamma} L^{*}_{\mu\beta} - C^{\mu}_{\alpha\beta} L^{*}_{\mu\gamma} \tag{40}$$

Entonces, si definimos

$$w_{\alpha\beta} := L^{*}_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta} \tag{41}$$

resulta

$$w_{\alpha\beta,\gamma} = L^{*}_{\alpha\beta,\gamma} - L_{\alpha\beta,\gamma} \tag{42}$$

intercambiando índices

$$w_{\alpha\gamma,\beta} = L^{*}_{\alpha\gamma,\beta} - L_{\alpha\gamma,\beta} \tag{43}$$

Por lo tanto, por la (40) tenemos:

$$w_{\alpha\beta,\gamma} - w_{\alpha\gamma,\beta} = C^{\mu}_{\alpha\gamma} L^{*}_{\mu\beta} - C^{\mu}_{\alpha\beta} L^{*}_{\mu\gamma} \tag{44}$$

En consecuencia de lo anterior, y puesto que por otra parte tenemos $w^{\alpha}_{\beta,\gamma} = g^{\alpha\rho} w_{\rho\beta,\gamma}$, también podemos escribir

$$w^{\alpha}_{\beta,\gamma} - w^{\alpha}_{\gamma,\beta} = g^{\alpha\rho}(w_{\rho\beta,\gamma} - w_{\rho\gamma,\beta}) = g^{\alpha\rho}(C^{\mu}_{\rho\gamma} L^{*}_{\mu\beta} - C^{\mu}_{\rho\beta} L^{*}_{\mu\gamma}) \quad (45)$$

Estas son las condiciones de compatibilidad de Mainardi-Codazzi para el caso euclidiano. Algunos autores reducen esta expresión, realizando la contracción de α con γ para obtener

$$w^{\alpha}_{\beta,\alpha} - w^{\alpha}_{\alpha,\beta} = g^{\alpha\rho}(C^{\mu}_{\rho\alpha} L^{*}_{\mu\beta} - C^{\mu}_{\rho\beta} L^{*}_{\mu\alpha}) \quad (46)$$

3. Cáscaras Afines (*Affine Shells*)

En cuanto a la geometría unimodular afín: suponemos definida, en $\mathbb{R}^3$, una 3-forma exterior, o función determinante, prefijada, empleando el siguiente símbolo:

$$[\ ,\ ,\ ] = \det = \text{determinante}$$

Nuestra unidad de medida será ahora el volumen.

Entonces, dada la misma superficie media anterior M_0, siendo ésta una inmersión topológica (*embedding*), representamos los objetos geométricos de la geometría unimodular afín por las siguientes expresiones: para construir la primera forma fundamental unimodular afín definimos primeramente

$$h_{\alpha\beta} = \left[\frac{\partial X_0}{\partial u^1}, \frac{\partial X_0}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 X_0}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} \right] \quad (47)$$

entonces, si suponemos que la superficie es no-degenerada, i.e., $H = \det(h_{\alpha\beta}) \neq 0$, podemos escribir

$$g_{\alpha\beta} = |H|^{-1/4} h_{\alpha\beta} \quad (48)$$

obteniendo la primera forma fundamental unimodular afín

$$I_{ua} = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta} \quad (49)$$

que es una estructura pseudoriemanniana, [i], [ii], [iii], [ix].

Se define ahora la normal unimodular afín por la expresión

$$N_{ua} = \tfrac{1}{2} \Delta(X_0) \quad (50)$$

donde Δ es el laplaciano con respecto a la pseudométrica I_{ua}, o sea:

$$\Delta X_0 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\sqrt{|g|} \sum_{\beta=1}^{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial X_0}{\partial u^\beta} \right) \quad \text{con} \quad g = \det\left(g_{\alpha\beta}\right) \tag{51}$$

Es fácil verificar, a través de un cálculo directo, que este campo vectorial resulta ser transversal a la superficie media M_0.

A partir de lo anterior, tenemos dos conexiones a considerar en la superficie media M_0:

1) La conexión de Levi-Civita con respecto a la pseudométrica I_{ua}: $\tilde{\nabla}$.
2) La conexión *inducida normal afín*, ∇, o sea la proyección de D, la conexión playa natural de $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial, en la dirección de N_{ua}, i.e.:

$$\nabla_Z Y = \mathrm{proy}_{\mathrm{N_{ua}}}\left(D_Z Y\right) \tag{52}$$

donde, en esta ocasión, hemos denotado con Z e Y, campos vectoriales tangentes a la superficie media M_0.

A continuación definimos la *segunda forma* (*cúbica*) *fundamental* unimodular afín, como la derivada covariante normal afín de la primera forma fundamental, i.e. :

$$\nabla\left(I_{ua}\right) := II_{ua} \tag{53}$$

que en coordenadas locales representamos también por:

$$II_{ua} = \sum_{\alpha\beta\gamma} g_{\alpha\beta\gamma} du^\alpha du^\beta du^\gamma \tag{54}$$

con los coeficientes $g_{\alpha\beta\gamma}$ resultando totalmente simétricos en sus índices.

Finalmente, consideramos la *tercera forma fundamental afín*, que podemos describir así: al igual que en el caso euclidiano con la ecuación de Weingarten, resulta también en geometría afín de superficies que las derivadas locales de la normal afín pertenecen al espacio tangente a la superficie en cada punto, i.e., podemos escribir

$$\frac{\partial N_{\mathrm{ua}}}{\partial u^\alpha} = -\sum_{\beta} B_\alpha^\beta \frac{\partial X_0}{\partial u^\beta} = -B_\alpha^1 \frac{\partial X_0}{\partial u^1} - B_\alpha^2 \frac{\partial X_0}{\partial u^2} \tag{55}$$

y definimos la tercera forma fundamental afín por la expresión:

$$III_{\mathrm{ua}} = B_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad \text{con} \quad B_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} g_{\alpha\gamma} B_\beta^\gamma \tag{56}$$

Como se ha visto anteriormente, la definición de cáscara como un volumen tridimensional, y en particular la estructura Riemanniana inducida en ésta por la métrica euclidiana del espacio ambiente, queda generada naturalmente. En el presente caso de la geometría unimodular afín, la extensión no es tan inmediata. Sin embargo, también puede realizarse en forma canónica, como veremos a seguir. Partimos de la pseudo-métrica I_{ua} (que es un invariante afín), sobre la superficie media M_0:

$$g_{\alpha\beta} = I_{\text{ua}}\left(\frac{\partial X_0}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial X_0}{\partial u^\beta}\right) \tag{57}$$

En el presente contexto, nos proponemos definir para la cáscara $\mathcal{C}$ una estructura pseudo-métrica que sea invariante unimodular afín, y que denotaremos por

$$G = G_{ij}\, du^i du^j \tag{58}$$

es decir,

$$G_{ij} := G\left(\frac{\partial X}{\partial u^i}, \frac{\partial X}{\partial u^j}\right) \tag{59}$$

Entonces, de (55) y puesto que debe preservarse la bilinealidad, escribimos en *coordenadas normales afines* a la cáscara,

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= G\left(\frac{\partial X}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial X}{\partial u^\beta}\right) \\ &= G\left(\frac{\partial X_0}{\partial u^\alpha} + t\frac{\partial N_{\text{ua}}}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial X_0}{\partial u^\beta} + t\frac{\partial N_{\text{ua}}}{\partial u^\beta}\right) \end{aligned} \tag{60}$$

por lo que, entonces, definimos

$$G_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta} - 2tB_{\alpha\beta} + t^2 \sum_\lambda B_\alpha^\lambda B_{\beta\lambda} \tag{61}$$

además, para extender la definición al resto de índices entre 1 y 3, también escribimos:

$$G_{3\alpha} = G_{\alpha 3} = G\left(\frac{\partial X}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial X}{\partial u^3}\right) = G\left(X_\alpha, N_{ua}\right) := 0 \tag{62}$$

y

$$G_{33} = G\left(\frac{\partial X}{\partial u^3}, \frac{\partial X}{\partial u^3}\right) = G\left(N_{ua}, N_{ua}\right) := 1 \tag{63}$$

Es fácil ver que, para $t = u^3$ suficientemente pequeño, se cumple que:

$$\det\left(G_{ij}\right) \neq 0 \tag{64}$$

y, en consecuencia, la anterior es una pseudo-métrica Riemanniana definida en la cáscara, como nos proponíamos realizar.

Condiciones de integrabilidad para superficies afines [i], [ii], [iii], [ix]

1. Apolaridad:

$$\sum g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\gamma} = 0 \tag{65}$$

2. Ecuación, de Mainardi-Codazzi Afín, (o Condición de Codazzi para I_{ua}):

$$g_{\alpha\beta\lambda,\mu} - g_{\alpha\beta\mu,\lambda} = B_{\alpha\mu} g_{\beta\lambda} + B_{\beta\mu} g_{\alpha\lambda} - B_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} - B_{\beta\lambda} g_{\alpha\mu} \tag{66}$$

3. Condición, o Ecuación, de Gauss Afín:

$$\tilde{R}^{\beta}_{\alpha\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(B^{\beta}_{\mu} g_{\alpha\lambda} - B^{\beta}_{\lambda} g_{\alpha\mu} + B_{\alpha\lambda}\delta^{\beta}_{\mu} - B_{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\lambda}\right) - \sum\left(A^{\eta}_{\alpha\mu}\cdot A^{\beta}_{\eta\lambda} - A^{\eta}_{\alpha\lambda}\cdot A^{\beta}_{\eta\mu}\right) \tag{67}$$

donde $\tilde{R}^{\beta}_{\alpha\lambda\mu}$ es el tensor de curvatura, asociado a la métrica unimodular afín $I_{ua} = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}$ (o sea, a la conexión de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$), y $A^{\beta}_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\sum g^{\beta\eta} g_{\alpha\lambda\eta}$ es la forma contravariante de la segunda forma fundamental (o también, el tensor diferencia, puesto que resulta $A^{\beta}_{\alpha\lambda} = \tilde{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\lambda}$)

Nota: algunos autores llaman ecuación de Gauss a la relación

$$R^{\beta}_{\alpha\lambda\mu} = B^{\beta}_{\mu} g_{\alpha\lambda} - B^{\beta}_{\lambda} g_{\alpha\mu} \tag{68}$$

donde $R^{\beta}_{\alpha\lambda\mu}$ es el tensor de curvatura de la la conexión *inducida normal afín* ∇

4. Condición de Codazzi para (el operador de forma afín) B^{β}_{α}:

$$B^{\beta}_{\alpha\,;\,\gamma} = B^{\beta}_{\gamma\,;\,\alpha} \qquad \text{con} \qquad \alpha,\beta,\gamma = 1,2 \tag{69}$$

donde hemos indicado con **;** la derivada covariante de la conexión normal inducida ∇. A partir de lo anterior, usando el hecho de que las condiciones de integrabilidad deben ser válidas tanto para la superficie media de la cáscara sin deformar, M_0, como para la superficie media de la cáscara después de la deformación, $M_0{}^*$, se pueden deducir las

4. Condiciones de compatibilidad

Condición de Mainardi-Codazzi Afín para I_{ua}

A partir de la (66), teniendo presente que la derivada covariante Levi-Civita para la superficie media original no deformada M_0 es:

$$g_{\alpha\beta\gamma,\delta} = \partial_\delta g_{\alpha\beta\gamma} - g_{\alpha\beta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\gamma\delta} - g_{\alpha\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\delta} \tag{70}$$

permutando índices y restando resulta para la superficie media no deformada M_0:

$$\begin{aligned}\partial_\delta g_{\alpha\beta\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta\delta} &= B_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} + B_{\beta\delta} g_{\alpha\gamma} - B_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - B_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta} + \\ &\quad + g_{\alpha\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\delta} + g_{\beta\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\delta} - g_{\alpha\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\gamma} - g_{\beta\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma}\end{aligned} \tag{71}$$

similarmente, para la superficie media deformada M_0^*:

$$\begin{aligned}\partial_\delta g^*_{\alpha\beta\gamma} - \partial_\gamma g^*_{\alpha\beta\delta} &= B^*_{\alpha\delta} g^*_{\beta\gamma} + B^*_{\beta\delta} g^*_{\alpha\gamma} - B^*_{\alpha\gamma} g^*_{\beta\delta} - B^*_{\beta\gamma} g^*_{\alpha\delta} + \\ &\quad + g^*_{\alpha\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{*\mu}_{\beta\delta} + g^*_{\beta\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{*\mu}_{\alpha\delta} - g^*_{\alpha\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{*\mu}_{\beta\gamma} - g^*_{\beta\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{*\mu}_{\alpha\gamma}\end{aligned} \tag{72}$$

Entonces, definiendo $\sigma_{\alpha\beta\gamma} := g^*_{\alpha\beta\gamma} - g_{\alpha\beta\gamma}$, se obtiene

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma,\delta} = \partial_\delta \sigma_{\alpha\beta\gamma} - \sigma_{\alpha\beta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\gamma\delta} - \sigma_{\alpha\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\delta} - \sigma_{\beta\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\delta} \tag{73}$$

permutando índices y haciendo la diferencia, obtenemos:

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma,\delta} - \sigma_{\alpha\beta\delta,\gamma} = \partial_\delta \sigma_{\alpha\beta\gamma} - \sigma_{\alpha\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\delta} - \sigma_{\beta\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\delta} - \partial_\gamma \sigma_{\alpha\beta\delta} + \sigma_{\alpha\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\gamma} + \sigma_{\beta\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma} \tag{74}$$

en consecuencia:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta\gamma,\delta} - \sigma_{\alpha\beta\delta,\gamma} &= \partial_\delta \sigma_{\alpha\beta\gamma} - \partial_\gamma \sigma_{\alpha\beta\delta} - \sigma_{\alpha\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\delta} - \sigma_{\beta\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\delta} + \sigma_{\alpha\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\gamma} + \sigma_{\beta\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma} \\ &= \partial_\delta\left(g^*_{\alpha\beta\gamma} - g_{\alpha\beta\gamma}\right) - \partial_\gamma\left(g^*_{\alpha\beta\delta} - g_{\alpha\beta\delta}\right) - \left(g^*_{\alpha\gamma\mu} - g_{\alpha\gamma\mu}\right)\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\delta} - \left(g^*_{\beta\gamma\mu} - g_{\beta\gamma\mu}\right)\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\delta} + \\ &\quad + \left(g^*_{\alpha\delta\mu} - g_{\alpha\delta\mu}\right)\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\gamma} + \left(g^*_{\beta\delta\mu} - g_{\beta\delta\mu}\right)\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma}\end{aligned} \tag{75}$$

distribuyendo en cada término:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta\gamma,\delta} - \sigma_{\alpha\beta\delta,\gamma} &= \partial_\delta g^*_{\alpha\beta\gamma} - \partial_\gamma g^*_{\alpha\beta\delta} - g^*_{\alpha\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\delta} - g^*_{\beta\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\delta} + g^*_{\alpha\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\gamma} + g^*_{\beta\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma} - \\ &\quad - \left(\partial_\delta g_{\alpha\beta\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta\delta} - g_{\alpha\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\delta} + g_{\alpha\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma}\right)\end{aligned} \tag{76}$$

comparando el paréntesis de la expresión anterior con la (71):

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta\gamma,\delta} - \sigma_{\alpha\beta\delta,\gamma} &= \left(\partial_\delta g^*_{\alpha\beta\gamma} - \partial_\gamma g^*_{\alpha\beta\delta} - g^*_{\alpha\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\delta} - g^*_{\beta\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\delta} + g^*_{\alpha\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\gamma} + g^*_{\beta\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma}\right) - \\ &\quad - \left(B_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} + B_{\beta\delta} g_{\alpha\gamma} - B_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - B_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta}\right)\end{aligned} \tag{77}$$

Para la conexión de Levi-Civita, la diferencia entre el estado deformado y no deformado se presenta según la expresión:

$$\tilde{\Gamma}^{*\mu}_{\alpha\beta} = C^{\mu}_{\alpha\beta} + \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} \tag{78}$$

entonces reemplazando nos queda:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta\gamma,\delta}-\sigma_{\alpha\beta\delta,\gamma}=&\left[\partial_\delta \overset{*}{g}_{\alpha\beta\gamma}-\partial_\gamma \overset{*}{g}_{\alpha\beta\delta}-\overset{*}{g}_{\alpha\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{*\mu}_{\beta\delta}-\overset{*}{g}_{\beta\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^{*\mu}_{\alpha\delta}+\overset{*}{g}_{\alpha\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{*\mu}_{\beta\gamma}+\overset{*}{g}_{\beta\delta\mu}\tilde{\Gamma}^{*\mu}_{\alpha\gamma}\right]-\\&-\left(B_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}+B_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma}-B_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-B_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}\right)+\\&+\overset{*}{g}_{\mu\beta\gamma}C^\mu_{\alpha\delta}+\overset{*}{g}_{\mu\alpha\gamma}C^\mu_{\beta\delta}-\overset{*}{g}_{\mu\beta\delta}C^\mu_{\alpha\gamma}-\overset{*}{g}_{\mu\alpha\delta}C^\mu_{\beta\gamma}\end{aligned}\tag{79}$$

ahora sustituimos la expresión entre corchetes por lo expresado en la ecuación (72), con lo que finalmente tenemos:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta\gamma,\delta}-\sigma_{\alpha\beta\delta,\gamma}=&\ \overset{*}{g}_{\mu\beta\gamma}C^\mu_{\alpha\delta}+\overset{*}{g}_{\mu\alpha\gamma}C^\mu_{\beta\delta}-\overset{*}{g}_{\mu\beta\delta}C^\mu_{\alpha\gamma}-\overset{*}{g}_{\mu\alpha\delta}C^\mu_{\beta\gamma}+\\&+\overset{*}{B}_{\alpha\delta}\overset{*}{g}_{\beta\gamma}+\overset{*}{B}_{\beta\delta}\overset{*}{g}_{\alpha\gamma}-\overset{*}{B}_{\alpha\gamma}\overset{*}{g}_{\beta\delta}-\overset{*}{B}_{\beta\gamma}\overset{*}{g}_{\alpha\delta}-\\&-B_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}-B_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma}+B_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}+B_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}\end{aligned}}\tag{80}$$

Condición de Gauss Afín

Seguidamente, aplicamos la ecuación (27):

$$\tilde{R}^*_{\alpha\gamma\delta\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\delta}+\varepsilon_{\gamma\delta,\alpha\beta}-\varepsilon_{\alpha\delta,\gamma\beta}-\varepsilon_{\beta\gamma,\alpha\delta}-\tfrac{1}{2}\left(\overset{*}{g}_{\alpha\mu}\tilde{R}^\mu_{\gamma\beta\delta}+\overset{*}{g}_{\gamma\mu}\tilde{R}^\mu_{\alpha\delta\beta}\right)+\overset{*}{g}_{\lambda\sigma}\left(C^\lambda_{\alpha\beta}C^\sigma_{\gamma\delta}-C^\lambda_{\alpha\delta}C^\sigma_{\beta\gamma}\right)\tag{81}$$

al caso unimodular afín, para lo cual substituimos en la última las componentes de los tensores de curvatura de ambas superficies, usando en cada caso la condición de integrabilidad de Gauss afín:

$$\begin{aligned}\tilde{R}^*_{\beta\alpha\lambda\mu}&=\tfrac{1}{2}\left(\overset{*}{B}_{\beta\mu}\overset{*}{g}_{\alpha\lambda}-\overset{*}{B}_{\beta\lambda}\overset{*}{g}_{\alpha\mu}+\overset{*}{B}_{\alpha\lambda}\overset{*}{g}_{\beta\mu}-\overset{*}{B}_{\alpha\mu}\overset{*}{g}_{\beta\lambda}\right)-\tfrac{1}{2}\left(A^{*\eta}_{\alpha\mu}\cdot\overset{*}{g}_{\beta\eta\lambda}-A^{*\eta}_{\alpha\lambda}\cdot\overset{*}{g}_{\beta\eta\mu}\right)\\\tilde{R}^\beta_{\alpha\lambda\mu}&=\tfrac{1}{2}\left(B^\beta_\mu g_{\alpha\lambda}-B^\beta_\lambda g_{\alpha\mu}+B_{\alpha\lambda}\delta^\beta_\mu-B_{\alpha\mu}\delta^\beta_\lambda\right)-\left(A^\eta_{\alpha\mu}\cdot A^\beta_{\eta\lambda}-A^\eta_{\alpha\lambda}\cdot A^\beta_{\eta\mu}\right)\end{aligned}\tag{82}$$

para obtener la condición de compatibilidad que estamos buscando:

$$\boxed{\begin{aligned}&\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\delta}+\varepsilon_{\gamma\delta,\alpha\beta}-\varepsilon_{\alpha\delta,\gamma\beta}-\varepsilon_{\beta\gamma,\alpha\delta}=\\&\quad=\tfrac{1}{2}\left(\overset{*}{B}_{\alpha\beta}\overset{*}{g}_{\gamma\delta}-\overset{*}{B}_{\alpha\delta}\overset{*}{g}_{\gamma\beta}+\overset{*}{B}_{\gamma\delta}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}-\overset{*}{B}_{\gamma\beta}\overset{*}{g}_{\alpha\delta}\right)-\tfrac{1}{2}\left(A^{*\eta}_{\gamma\beta}\cdot\overset{*}{g}_{\alpha\eta\delta}-A^{*\eta}_{\gamma\delta}\cdot\overset{*}{g}_{\alpha\eta\beta}\right)+\\&\quad+\tfrac{1}{2}\overset{*}{g}_{\alpha\mu}\left(\tfrac{1}{2}\left(B^\mu_\delta g_{\gamma\beta}-B^\mu_\beta g_{\gamma\delta}+B_{\gamma\beta}\delta^\mu_\delta-B_{\gamma\delta}\delta^\mu_\beta\right)-\left(A^\eta_{\gamma\delta}\cdot A^\mu_{\eta\beta}-A^\eta_{\gamma\beta}\cdot A^\mu_{\eta\delta}\right)\right)+\\&\quad+\tfrac{1}{2}\overset{*}{g}_{\gamma\mu}\left(\tfrac{1}{2}\left(B^\mu_\beta g_{\alpha\delta}-B^\mu_\delta g_{\alpha\beta}+B_{\alpha\delta}\delta^\mu_\beta-B_{\alpha\beta}\delta^\mu_\delta\right)-\left(A^\eta_{\alpha\beta}\cdot A^\mu_{\eta\delta}-A^\eta_{\alpha\delta}\cdot A^\mu_{\eta\beta}\right)\right)-\\&\quad-\overset{*}{g}_{\lambda\sigma}\left(C^\lambda_{\alpha\beta}C^\sigma_{\gamma\delta}-C^\lambda_{\alpha\delta}C^\sigma_{\beta\gamma}\right)\end{aligned}}\tag{83}$$

De la anterior podríamos aún obtener

$$
\begin{aligned}
&g^{\rho\alpha} g^{\sigma\gamma} (\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \varepsilon_{\gamma\delta,\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\delta,\gamma\beta} - \varepsilon_{\beta\gamma,\alpha\delta}) = \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\left(B^{*\rho}_{\beta} g^{*\sigma}_{\delta} - B^{*\rho}_{\delta} g^{*\sigma}_{\beta} + B^{*\sigma}_{\delta} g^{*\rho}_{\beta} - B^{*\sigma}_{\beta} g^{*\rho}_{\delta} \right) - \\
&\quad - \tfrac{1}{2} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\gamma} \left(A^{*\eta}_{\gamma\beta} \cdot g^{*}_{\alpha\eta\delta} - A^{*\eta}_{\gamma\delta} \cdot g^{*}_{\alpha\eta\beta} \right) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2} g^{*\rho}_{\mu} \left(\tfrac{1}{2}\left(B^{\mu}_{\delta} \delta^{\sigma}_{\beta} - B^{\mu}_{\beta} \delta^{\sigma}_{\delta} + B^{\sigma}_{\beta} \delta^{\mu}_{\delta} - B^{\sigma}_{\delta} \delta^{\mu}_{\beta} \right) - \left(A^{\sigma\eta}_{\delta} \cdot A^{\mu}_{\eta\beta} - A^{\sigma\eta}_{\beta} \cdot A^{\mu}_{\eta\delta} \right) \right) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2} g^{*\sigma}_{\mu} \left(\tfrac{1}{2}\left(B^{\mu}_{\beta} \delta^{\rho}_{\delta} - B^{\mu}_{\delta} \delta^{\rho}_{\beta} + B^{\rho}_{\delta} \delta^{\mu}_{\beta} - B^{\rho}_{\beta} \delta^{\mu}_{\delta} \right) - \left(A^{\rho\eta}_{\beta} \cdot A^{\mu}_{\eta\delta} - A^{\rho\eta}_{\delta} \cdot A^{\mu}_{\eta\beta} \right) \right) - \\
&\quad - g^{*}_{\lambda\mu} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\gamma} \left(C^{\lambda}_{\alpha\beta} C^{\mu}_{\gamma\delta} - C^{\lambda}_{\alpha\delta} C^{\mu}_{\beta\gamma} \right)
\end{aligned}
\tag{84}
$$

Contrayendo índices: ρ con β, σ con δ, y simplificando obtenemos.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{\beta,\delta}_{\beta,\delta} - \varepsilon^{\delta,\beta}_{\beta,\delta} &= \tfrac{1}{2}\left(B^{*\beta}_{\beta} g^{*\delta}_{\delta} - B^{*\beta}_{\delta} g^{*\delta}_{\beta} + B^{*\delta}_{\delta} g^{*\beta}_{\beta} - B^{*\delta}_{\beta} g^{*\beta}_{\delta} \right) - \tfrac{1}{2} g^{\beta\alpha} g^{\delta\gamma} \left(A^{*\eta}_{\gamma\beta} \cdot g^{*}_{\alpha\eta\delta} - A^{*\eta}_{\gamma\delta} \cdot g^{*}_{\alpha\eta\beta} \right) + \\
&+ \tfrac{1}{2} g^{*\beta}_{\mu} \left(\tfrac{1}{2}\left(B^{\mu}_{\beta} - 2B^{\mu}_{\beta} + B^{\mu}_{\beta} - B^{\delta}_{\delta} \delta^{\mu}_{\beta} \right) - \left(-A^{\delta\eta}_{\beta} \cdot A^{\mu}_{\eta\delta} \right) \right) + \\
&+ \tfrac{1}{2} g^{*\delta}_{\mu} \left(\tfrac{1}{2}\left(B^{\mu}_{\delta} - 2B^{\mu}_{\delta} + B^{\mu}_{\delta} - B^{\beta}_{\beta} \delta^{\mu}_{\delta} \right) - \left(-A^{\beta\eta}_{\delta} \cdot A^{\mu}_{\eta\beta} \right) \right) - \\
&- g^{*}_{\lambda\mu} g^{\beta\alpha} g^{\delta\gamma} \left(C^{\lambda}_{\alpha\beta} C^{\mu}_{\gamma\delta} - C^{\lambda}_{\alpha\delta} C^{\mu}_{\beta\gamma} \right)
\end{aligned}
\tag{85}
$$

que puede aún reducirse a

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{\beta,\delta}_{\beta,\delta} - \varepsilon^{\delta,\beta}_{\beta,\delta} &= \tfrac{1}{2}\left(B^{*\beta}_{\beta} g^{*\delta}_{\delta} - B^{*\beta}_{\delta} g^{*\delta}_{\beta} + B^{*\delta}_{\delta} g^{*\beta}_{\beta} - B^{*\delta}_{\beta} g^{*\beta}_{\delta} \right) - \tfrac{1}{2} g^{\beta\alpha} g^{\delta\gamma} \left(A^{*\eta}_{\gamma\beta} \cdot g^{*}_{\alpha\eta\delta} - A^{*\eta}_{\gamma\delta} \cdot g^{*}_{\alpha\eta\beta} \right) - \\
&+ \tfrac{1}{2} g^{*\beta}_{\mu} \left(-B^{\delta}_{\delta} \delta^{\mu}_{\beta} + A^{\delta\eta}_{\beta} \cdot A^{\mu}_{\eta\delta} \right) - g^{*}_{\lambda\mu} g^{\beta\alpha} g^{\delta\gamma} \left(C^{\lambda}_{\alpha\beta} C^{\mu}_{\gamma\delta} - C^{\lambda}_{\alpha\delta} C^{\mu}_{\beta\gamma} \right)
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Condición de Codazzi para (el operador de forma afín) B^{β}_{α}

A partir de la condición de integrabilidad (69).

Por una parte, la expresión de la derivada covariante normal afín de la Tercera Forma Fundamental puede expresarse, en componentes, por la ecuación

$$B_{\alpha\beta;\gamma} = \partial_{\gamma} B_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} B_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} B_{\mu\alpha} \tag{87}$$

Por otro lado, el tensor diferencia (entre las conexiones de Levi-Civita y Normal Afín) viene dada por:

$$A^{\mu}_{\alpha\gamma} = \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} \tag{88}$$

en consecuencia, podemos también escribir

$$
\begin{aligned}
B_{\alpha\beta,\gamma} &= \partial_{\gamma} B_{\alpha\beta} - \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma} B_{\mu\beta} - \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\beta\gamma} B_{\mu\alpha} = \\
&= \partial_{\gamma} B_{\alpha\beta} - \left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} + A^{\mu}_{\alpha\gamma} \right) B_{\mu\beta} - \left(\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} + A^{\mu}_{\beta\gamma} \right) B_{\mu\alpha}
\end{aligned}
\tag{89}
$$

obteniendo

$$B_{\alpha\beta,\gamma} = B_{\alpha\beta;\gamma} - A^{\mu}_{\alpha\gamma} B_{\mu\beta} - A^{\mu}_{\beta\gamma} B_{\mu\alpha} \tag{90}$$

Permutando índices

$$B_{\alpha\gamma,\beta} = B_{\alpha\gamma;\beta} - A^{\mu}_{\alpha\beta} B_{\mu\gamma} - A^{\mu}_{\gamma\beta} B_{\mu\alpha} \tag{91}$$

y efectuando la diferencia: (90) - (91)

$$B_{\alpha\beta,\gamma} - B_{\alpha\gamma,\beta} = B_{\alpha\beta;\gamma} - B_{\alpha\gamma;\beta} - A^{\mu}_{\alpha\gamma} B_{\mu\beta} + A^{\mu}_{\alpha\beta} B_{\mu\gamma} \tag{92}$$

Ahora, puesto que la relación entre la Tercera Forma Fundamental y el Operador de Forma Afín viene dada por la ecuación: $B_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} B^{\mu}_{\beta}$, es posible derivar esta expresión y usar la regla de Leibnitz para obtener:

$$B_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\mu\gamma} B^{\mu}_{\beta} + g_{\alpha\mu} B^{\mu}_{\beta;\gamma} \tag{93}$$

nuevamente, por permutación de los índices β y γ:

$$B_{\alpha\gamma;\beta} = g_{\alpha\mu\beta} B^{\mu}_{\gamma} + g_{\alpha\mu} B^{\mu}_{\gamma;\beta} \tag{94}$$

por lo tanto, efectuando la diferencia (93) - (94) y teniendo en cuenta la condición de integrabilidad afín $B^{\mu}_{\beta;\gamma} = B^{\mu}_{\gamma;\beta}$, tenemos:

$$B_{\alpha\beta;\gamma} - B_{\alpha\gamma;\beta} = g_{\alpha\mu\gamma} B^{\mu}_{\beta} - g_{\alpha\mu\beta} B^{\mu}_{\gamma} \tag{95}$$

y reemplazando esta última expresión en la (92) obtenemos, primeramente,

$$B_{\alpha\beta,\gamma} - B_{\alpha\gamma,\beta} = g_{\alpha\mu\gamma} B^{\mu}_{\beta} - g_{\alpha\mu\beta} B^{\mu}_{\gamma} - A^{\mu}_{\alpha\gamma} B_{\mu\beta} + A^{\mu}_{\alpha\beta} B_{\mu\gamma} \tag{96}$$

Ahora bien, puesto que el tensor diferencia también puede expresarse como:

$$A^{\mu}_{\alpha\gamma} = \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha\gamma} \tag{97}$$

resulta, después de un cálculo directo:

$$B_{\alpha\beta,\gamma} - B_{\alpha\gamma,\beta} = A^{\mu}_{\alpha\gamma} B_{\mu\beta} - A^{\mu}_{\alpha\beta} B_{\mu\gamma} \tag{98}$$

que es otra forma de expresar la condición de integrabilidad (69) para superficies afines.

Entonces, a partir de la (98), podemos escribir las condiciones de integrabilidad para ambas superficies:

$$\begin{aligned} M_0 &: \ \partial_\gamma B_{\alpha\beta} - \partial_\beta B_{\alpha\gamma} = (\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma} + A^{\mu}_{\alpha\gamma}) B_{\mu\beta} - (\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} + A^{\mu}_{\alpha\beta}) B_{\mu\gamma} \\ M_0^* &: \ \partial_\gamma B^*_{\alpha\beta} - \partial_\beta B^*_{\alpha\gamma} = (\tilde{\Gamma}^{*\mu}_{\alpha\gamma} + A^*_{\alpha\gamma}) B^*_{\mu\beta} - (\tilde{\Gamma}^{*\mu}_{\alpha\beta} + A^*_{\alpha\beta}) B^*_{\mu\gamma} \end{aligned} \tag{99}$$

Si definimos el tensor diferencia por la ecuación $w_{\alpha\beta} := B^*_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}$ y calculamos la diferencia de derivadas covariantes, con respecto a la conexión de Levi-Civita en la superficie no deformada M_0, obtenemos:

$$\begin{aligned} w_{\alpha\beta,\gamma} - w_{\alpha\gamma,\beta} &= \partial_\gamma w_{\alpha\beta} - \partial_\beta w_{\alpha\gamma} + w_{\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} - w_{\beta\mu}\tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\gamma} \\ &= \partial_\gamma B^*_{\alpha\beta} - \partial_\beta B^*_{\alpha\gamma} + B^*_{\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} - B^*_{\beta\mu}\tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\gamma} - (\partial_\gamma B_{\alpha\beta} - \partial_\beta B_{\alpha\gamma} + B_{\gamma\mu}\tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} - B_{\beta\mu}\tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\gamma}) \end{aligned} \tag{100}$$

Usando la (99) obtenemos:

$$\boxed{w_{\alpha\beta,\gamma} - w_{\alpha\gamma,\beta} = B^*_{\beta\mu}(C^\mu_{\alpha\gamma} + A^*_{\alpha\gamma}) - B^*_{\gamma\mu}(C^\mu_{\alpha\beta} + A^*_{\alpha\beta}) + B_{\gamma\mu}A^\mu_{\alpha\beta} - B_{\beta\mu}A^\mu_{\alpha\gamma}} \tag{101}$$

Esta es la condición buscada, que también puede expresarse, si definimos

$$w^\alpha_\beta = g^{\alpha\rho} w_{\rho\beta} \tag{102}$$

como

$$\begin{aligned} w^\alpha_{\beta,\gamma} - w^\alpha_{\gamma,\beta} &= g^{\alpha\rho}(w_{\rho\beta,\gamma} - w_{\rho\gamma,\beta}) \\ &= g^{\alpha\rho}\left[B^*_{\beta\mu}(C^\mu_{\rho\gamma} + A^*_{\rho\gamma}) - B_{\gamma\mu}(C^\mu_{\rho\beta} + A^*_{\rho\beta}) + B_{\gamma\mu}A^\mu_{\rho\beta} - B_{\beta\mu}A^\mu_{\rho\gamma} \right] \end{aligned} \tag{103}$$

Finalmente, por contracción de los índices α con γ, y usando además la condición de apolaridad en M_0, resulta

$$w^\alpha_{\beta,\alpha} - w^\alpha_{\alpha,\beta} = g^{\alpha\rho}\left[B^*_{\beta\mu}(C^\mu_{\rho\alpha} + A^{*\mu}_{\rho\alpha}) - B^*_{\alpha\mu}(C^\mu_{\rho\lambda} + A^{*\mu}_{\rho\beta}) + B_{\alpha\mu}A^\mu_{\rho\beta} \right] \tag{104}$$

que es la última condición de compatibilidad buscada.

REFERENCIAS

[i] Gigena, S. *Constant Affine Mean Curvature Hypersurfaces of Decomposable Type,* Proc of Symp in Pure Math, American Math Society, Vol. 54, 1993, Part 3, 289-316

[ii] Gigena, S. *Hypersurface Geometry and Related Invariants in a Real Vector Space,* libro en 4 capítulos, pp. 1-127, (Introduction i-vii), Octubre/1996.

[iii] Gigena, S. *Ordinary Differential Equations in Affine Geometry*, Le Matematiche,Vol. LI, (1996), Fasc.I, 119-151.

[iv] John, F. *Refined Interior Equations for Thin Elastic Shells*, Comm Pure Appl Math Nº 24, 1971 pp. 583-615.

[v] Koiter, W.T. *On the mathematical foundation of shell theory,* ´Proc. Int. Congr. On Mathematics, Nice, 1970, Vol. 3, Paris, 1971, pp. 123-130.

[vi] Love, A.E.H. *A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity*, 4thed, Dover,1944.

[vii] Millman,R.-Parker,G.*Elements of Differential Geometry*, Prentice-Hall, NJersey,1977.

[viii] Mollmann, H. *Introduction to the Theory of Thin Shells*, J Wiley Sons,1981,181 pp.

[ix] Nomizu, K., Sasaki, T. *Affine Differential Geometry*, Cambr U Press, 1994, pp. 18-73.