

INFLUENCIA DE ALGUNOS PARAMETROS SOBRE LA ESTABILIDAD DE PLACAS ANULARES DELGADAS

Patricia M. Ciancio*

*Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Av. Del Valle 5737, 7400 Olavarría, Argentina
e-mail: pciancio@fio.unicen.edu.ar

Key words: Pandeo, placas anulares delgadas, coeficiente de pandeo, estabilidad de placas, placas anulares isótropas, placas anulares de espesor variable.

Resumen. *El problema de estabilidad estructural es de interés en ingeniería civil, mecánica, naval, aeroespacial, entre otras. En estructuras tales como placas anulares delgadas sometidas a fuerzas de compresión en su plano medio, la determinación de cargas críticas es predominante en la etapa del diseño estructural. El problema en cuestión es tratado en la literatura técnica para el caso en que dichas placas presentan espesor uniforme y sólo están sometidas a compresión exterior.*

En Argentina grupos de trabajo dirigidos por autores como Dr. P. A. A. Laura han abordado el problema junto con el de vibraciones, para placas que presentan espesor variable con discontinuidad. En este trabajo, se determinan valores para el parámetro que conduce a las cargas críticas en placas isótropas anulares de espesor variable con continuidad, analizando diferentes condiciones de borde y cargas. Se utiliza el método de Rayleigh Ritz optimizado para hallar los autovalores buscados y se considera la expresión exacta para la carga actuante para el caso en que el espesor siga una ley de variación exponencial.

Los resultados obtenidos para el parámetro de pandeo muestran buena precisión, para los casos que pueden compararse con los existentes en la literatura.

1 INTRODUCCION

El problema de pandeo es de gran interés en aplicaciones en el campo de la ingeniería civil, mecánica, naval, así por ejemplo es el caso de elementos estructurales tales como placas delgadas anulares de espesor constante o variable. Este tema ha recibido la atención de muchos investigadores que lo trataron junto al problema de vibraciones.

Entre esos estudios figuran los de vibraciones libres de placas anulares isotrópicas que brindan soluciones exactas para modos axisimétricos utilizando el método de Rayleigh-Ritz. También se determinaron soluciones para establecer las frecuencias circulares y cargas de pandeo para placas anulares isotrópicas comprimidas radialmente y reforzadas con vigas de borde. Dyka and Carney III¹ presentaron una solución exacta para el estado tensional en placas anulares ortótropas con espesor variable y reforzadas con vigas en sus contornos externo e interno. Laura et. al.^{2,3,4,5} han producido importantes contribuciones al tema de pandeo en placas circulares y anulares. Estos autores trataron el tema considerando diferentes condiciones de apoyo y con el espesor variando en forma discontinua; utilizaron la clásica solución de Lamé para considerar la tensión radial resultante.

En este trabajo, y considerando la referencia¹, se determinó la expresión exacta para la tensión radial resultante para el caso de placas anulares isotrópicas con espesor variable continuamente, con el borde exterior empotrado y simplemente apoyado, y el borde interior libre. El método de Rayleigh-Ritz optimizado fue utilizado para obtener los autovalores buscados. Este método está basado en principios variacionales. El método incluye en la función aproximante un parámetro de optimización exponencial que permite una minimización del coeficiente de pandeo con respecto a dicho parámetro. Se considera la influencia, de presión uniforme en uno o ambos contornos, distintas condiciones de apoyo, y diferentes leyes exponenciales para representar distintos perfiles del espesor de la placa en una forma continua, sobre el parámetro de pandeo.

2 FUNCIONAL DE ENERGIA DE DEFORMACION PARA PLACAS ANULARES DELGADAS CON ESPESOR VARIABLE

Se considera una placa delgada anular isotrópica cuyos radios interior y exterior son a and b respectivamente. El espesor de la placa varía en la dirección radial de acuerdo a la ley exponencial $h = H \cdot r^p$, donde H , p son constantes y r es el radio. En la Figura 1 aparece representada la geometría de la placa.

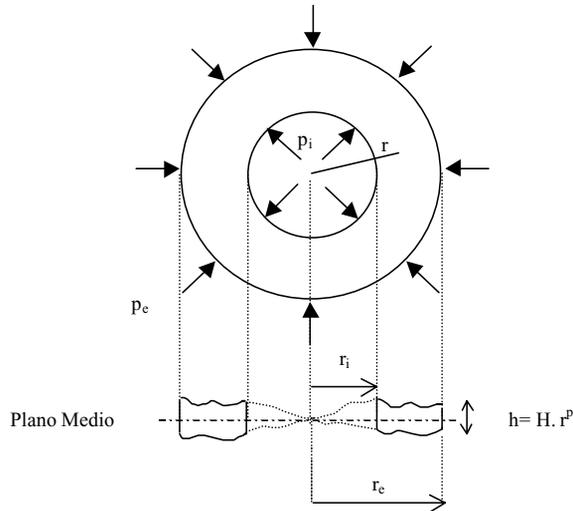


Figura 1: Geometría de la placa anular

La determinación de la carga crítica es definida por la minimización del funcional gobernante:

$$U = \frac{1}{2} \iint D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{2(1-\nu)}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] r \cdot dr \cdot d\theta - \frac{1}{2} \iint N_r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \quad (1)$$

donde: D: rigidez a flexión de la placa
 N_r : fuerza de compresión radial
 w : amplitud del desplazamiento normal
 r, θ : coordenadas polares
 ν : relación de Poisson

Bajo fuerzas de compresión en el plano medio, se tiene simetría radial.

$$w = w(r) \quad (2)$$

Así

$$U = \pi \int D \left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) \right] r \cdot dr - \pi \int N_r \cdot \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \cdot r \cdot dr \quad (3)$$

Introduciendo la variable adimensional x

$$x = r / b \quad r = b \cdot x \quad dr = b \cdot dx \quad (4)$$

Se obtiene

$$U = \pi \cdot \left\{ \int_k^l \frac{D}{b^2} \left[\left(\frac{d^2 w}{d x^2} \right)^2 \cdot x + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d^2 w}{d x^2} \cdot \frac{d w}{d x} \right] \cdot dx - \int_k^l N_r \cdot \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 \cdot x \cdot dx \right\} \quad (5)$$

donde $k = ri / re$

La tensión radial resultante según Dyka and Carney III¹,

$$\sigma_{rr} = \frac{A \cdot E_{\theta} \cdot (x_1 + \mu_{\theta})}{K^2 - \mu_{\theta}^2} \cdot r^{(x_1-1)} + \frac{B \cdot E_{\theta} \cdot (x_2 + \mu_{\theta})}{K^2 - \mu_{\theta}^2} \cdot r^{(x_2-1)} \quad (6)$$

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4 \cdot (K^2 - p \cdot \mu_{\theta})}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4 \cdot (K^2 - p \cdot \mu_{\theta})}}{2} \quad (7)$$

p : exponente de la ley de variación del espesor

E_r, E_{θ} : módulos de Young

μ_r, μ_{θ} : relaciones de Poisson para la placa polar ortótropa

$K^2 = \mu_{\theta} / \mu_r = E_{\theta} / E_r$

Para placas isotrópicas, las expresiones dadas en (6) y (7) serán:

$$\sigma_{rr} = \frac{A \cdot E \cdot (x_1 + \mu)}{1 - \mu^2} \cdot r^{(x_1-1)} + \frac{B \cdot E \cdot (x_2 + \mu)}{1 - \mu^2} \cdot r^{(x_2-1)} \quad (8)$$

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4 \cdot (1 - p \cdot \mu)}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4 \cdot (1 - p \cdot \mu)}}{2} \quad (9)$$

A y B son constantes determinadas a partir de las condiciones naturales de borde

$$\sigma_r|_{r=ri} = -p_i \quad \sigma_r|_{r=re} = -p_e \quad (10)$$

donde p_i es la presión interior y p_e es la presión exterior; así (8) resulta:

$$\sigma_r = \frac{(p_i - p_e \cdot k^{(x_2-1)})}{(k^{(x_2-x_1)} - 1)} \cdot \frac{r^{(x_1-1)}}{b^{(x_1-1)}} + \frac{(p_e \cdot k^{(x_1-1)} - p_i)}{(1 - k^{(x_1-x_2)})} \cdot \frac{r^{(x_2-1)}}{b^{(x_2-1)}} \quad (11)$$

La fuerza de compresión radial es:

$$N_r = \sigma_r \cdot h \tag{12}$$

considerando $h = H \cdot r^p$ y la variable adimensional dada en (4)

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \Rightarrow D = \frac{E \cdot H^3 \cdot r^{3 \cdot p}}{12(1-\mu^2)} \quad D = \frac{E \cdot H^3 \cdot x^{3 \cdot p} \cdot b^{3 \cdot p}}{12(1-\mu^2)}$$

$$D_e = \frac{E \cdot h_e^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{E \cdot H^3 \cdot b^{3 \cdot p}}{12(1-\mu^2)}$$

$$D = D_e \cdot x^{3 \cdot p} \tag{13}$$

$$\lambda = \frac{N_r \cdot b^2}{D_e} \tag{14}$$

se obtiene

$$N_r = \frac{\lambda \cdot D_e}{b^2} \cdot (C_1 \cdot x^{p+x_1-1} + C_2 \cdot x^{p+x_2-1}) \tag{15}$$

siendo

$$C_1 = \frac{k \cdot (k^{x_2-1} - t)}{(k^{x_2} - k^{x_1})} \quad C_2 = \frac{k \cdot (t - k^{x_1-1})}{(k^{x_2} - k^{x_1})} \quad t = \frac{p_i}{p_e} \tag{16}$$

Sustituyendo (15) en (5) y operando, uno tiene

$$U = \pi \cdot \frac{D_e}{b^2} \left\{ \int_k^1 \left[\left(\frac{d^2 w}{d x^2} \right)^2 \cdot x \cdot x^{3 \cdot p} + \frac{1}{x} \cdot x^{3 \cdot p} \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d^2 w}{d x^2} \cdot \frac{d w}{d x} \cdot x^{3 \cdot p} \right] \cdot dx + \right. \\ \left. - \lambda \cdot \int_k^1 (C_1 \cdot x^{p+x_1-1} + C_2 \cdot x^{p+x_2-1}) \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 \cdot x \cdot dx \right\} \tag{17}$$

3 APLICACION DEL METODO DE RAYLEIGH-RITZ OPTIMIZADO

Teniendo en cuenta la expresión (17) la cual representa el funcional gobernante para el problema de pandeo en una placa delgada anular, y aplicando el método de Rayleigh-Ritz,

para obtener los autovalores; es conveniente aproximar la amplitud del desplazamiento $w(r)$ mediante una suma de funciones polinómicas. De esta manera la función desplazamiento propuesta está representada por la expresión dada en (18)

$$w_{ap}(r) = \sum_{j=1}^j A_{j-1} \cdot (\alpha_{j-1} \cdot x^\gamma + \beta_{j-1} \cdot x^2 + I) \cdot x^{j-1} \quad (18)$$

donde γ es un parámetro desconocido y aparece como exponente. Tomando dos términos de la suma resulta

$$w_{ap}(r) = A_0 \cdot (\alpha_0 \cdot x^\gamma + \beta_0 \cdot x^2 + I) + A_1 \cdot (\alpha_1 \cdot x^{\gamma+1} + \beta_1 \cdot x^3 + x) \quad (19)$$

Los valores de α_{j-1} y β_{j-1} son determinados a partir de las condiciones de borde en el contorno exterior, aplicando las mismas a cada término de la suma. Para borde externo simplemente apoyado, $r=b$ or $x=1$, las condiciones de borde son

$$w(1) = 0 \quad (20 a)$$

$$w''(1) + \mu/x \cdot w'(1) = 0 \quad (20 b)$$

En estas expresiones, w' y w'' indican derivadas primera y segunda respectivamente. Aplicando las expresiones (20) en (19) resulta un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los coeficientes α_0 apoyo simple, β_0 apoyo simple y α_1 apoyo simple, β_1 apoyo simple los cuales aparecen en (21) y (22)

$$\alpha_{0 \text{ apoyo simple}} = \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{\gamma(\gamma - 1 + \mu) - 2 \cdot (1 + \mu)} \quad \beta_{0 \text{ apoyosimple}} = - \frac{\gamma(\gamma - 1 + \mu)}{\gamma(\gamma - 1 + \mu) - 2 \cdot (1 + \mu)} \quad (21)$$

$$\alpha_{1 \text{ apoyo simple}} = \frac{2 \cdot (3 + \mu)}{\gamma(\gamma + \mu + 1) - 2 \cdot (3 + \mu)} \quad \beta_{1 \text{ apoyosimple}} = - \frac{\gamma(\gamma + \mu + 1)}{\gamma(\gamma + \mu + 1) - 2 \cdot (3 + \mu)} \quad (22)$$

De la misma forma para un borde exterior empotrado, cuando $r=b$ or $x=1$, las condiciones de borde son

$$w(1) = 0 \quad (23 a)$$

$$w'(1) = 0 \quad (23 b)$$

Aplicando las expresiones (23) en (19) resulta un sistema de ecuaciones cuyos coeficientes desconocidos son $\alpha_{0 \text{ emp}}$, $\beta_{0 \text{ emp}}$ y $\alpha_{1 \text{ emp}}$, $\beta_{1 \text{ emp}}$ los cuales aparecen en (24)

$$\alpha_{0 \text{ emp}} = \frac{2}{\gamma - 2} = \alpha_{1 \text{ emp}} \quad \beta_{0 \text{ emp}} = - \frac{\gamma}{\gamma - 2} = \beta_{1 \text{ emp}} \quad (24)$$

De la condición de minimización del funcional con respecto a los A_{j-1} se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} \cdot \frac{b^2}{\pi \cdot De} = 0 = \left\{ \int_k^l \frac{\partial}{\partial A_1} \left[\left(\frac{d^2 w}{d x^2} \right)^2 \cdot x \cdot x^{3 \cdot p} + \frac{1}{x} \cdot x^{3 \cdot p} \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d^2 w}{d x^2} \cdot \frac{d w}{d x} \cdot x^{3 \cdot p} \right] \cdot dx + \right. \\ \left. - \lambda \cdot \int_k^l \frac{\partial}{\partial A_1} (C_1 \cdot x^{p+x_1-l} + C_2 \cdot x^{p+x_2-l}) \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 \cdot x \cdot dx \right\} \quad (25)$$

$$\frac{\partial U}{\partial A_2} \cdot \frac{b^2}{\pi \cdot De} = 0 = \left\{ \int_k^l \frac{\partial}{\partial A_2} \left[\left(\frac{d^2 w}{d x^2} \right)^2 \cdot x \cdot x^{3 \cdot p} + \frac{1}{x} \cdot x^{3 \cdot p} \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d^2 w}{d x^2} \cdot \frac{d w}{d x} \cdot x^{3 \cdot p} \right] \cdot dx + \right. \\ \left. - \lambda \cdot \int_k^l \frac{\partial}{\partial A_2} (C_1 \cdot x^{p+x_1-l} + C_2 \cdot x^{p+x_2-l}) \left(\frac{d w}{d x} \right)^2 \cdot x \cdot dx \right\} \quad (26)$$

La condición de no trivialidad del sistema de ecuaciones homogéneas, conduce a la ecuación trascendente. La menor raíz es el parámetro crítico de pandeo elástico λ que se desea determinar.

4 RESULTADOS NUMERICOS

El problema de pandeo en placas circulares y anulares de espesor uniforme fue tratado por Timoshenko⁶. El obtuvo, por ejemplo, la carga crítica para la placa circular con el borde simplemente apoyado, $(Nr)_{cr} = 4.2D/b^2$, y obtuvo la carga crítica para la placa circular con contorno empotrado como $(Nr)_{cr} = 14.62 D/b^2$. En ambos casos 4.2 y 14.62 representan el parámetro de pandeo λ , para las respectivas condiciones de contorno. En las Tablas 1 y 2 se muestran los resultados obtenidos en este trabajo para los casos analizados por Timoshenko. Los cálculos fueron efectuados considerando una relación de Poisson $\mu = 1/3$.

Table 1. Valores del parámetro de pandeo λ para placas circulares y anulares de espesor uniforme con borde externo simplemente apoyado bajo presión exterior.

$\mu = 1/3$	k = a / b							
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
λ	4.216	4.014	3.671	3.232	2.778	2.537	2.22	2.20

Table 2. Valores del parámetro de pandeo λ para placas circulares y anulares de espesor uniforme con borde externo empotrado bajo presión exterior.

$\mu=1/3$	$k = a / b$					
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
λ	14.911	14.664	13.82	14.33	18.86	25.32

La Figura 2 esquematiza los valores del parámetro de pandeo λ dado en Tabla 1. De la misma forma, la Figura 3 representa los valores del parámetro de pandeo λ dados en Tabla 2. En ambas figuras aparecen también los resultados de Timoshenko.

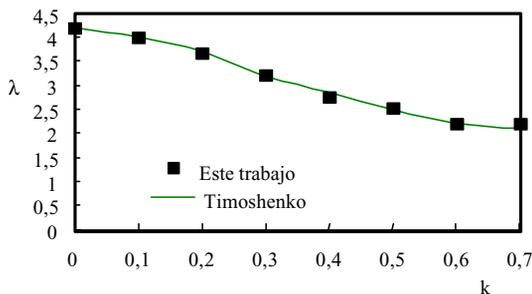


Figura 2. Parámetro de pandeo λ vs. k para placas con espesor uniforme bajo presión exterior y borde externo simplemente apoyado.

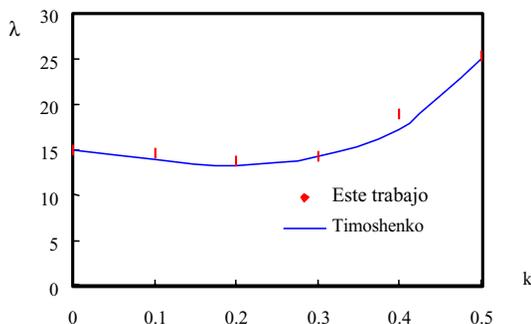


Figura 3. Parámetro de pandeo λ vs. k para placas con espesor uniforme y borde exterior empotrado bajo presión exterior.

Otros estudios^{4,5} dieron los parámetros de pandeo crítico para placas anulares con espesor variable en forma discontinua. Estos valores fueron indicativos para el caso de placas anulares con espesor variable de acuerdo a la ley exponencial analizada en el presente trabajo. Se consideró la misma altura en el borde externo y para un radio $r = (a+c)/2$ que la considerada en la referencia⁴. Esta geometría se muestra en la Figura 4. Con estas consideraciones se determinó el valor del exponente p de la ley exponencial.

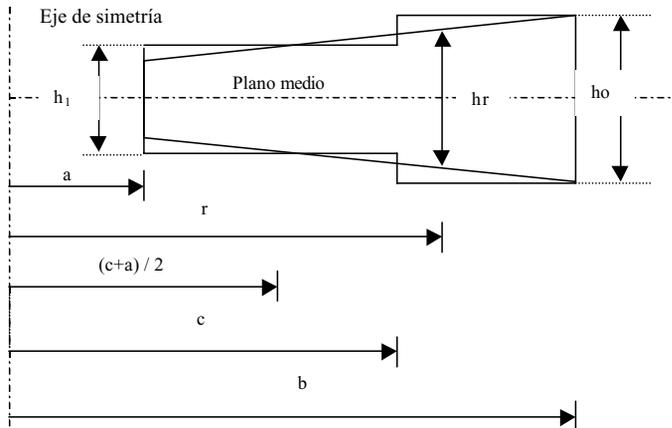


Figura 4. Consideraciones entre espesor con variación discontinua y espesor con variación continua

Suponiendo $r = (a+c)/2$ el espesor es $hr=h_1$ mientras que para $r=b$ se tiene $hr=h_0$

$$h_1 = H \cdot \left(\frac{a+c}{2} \right)^p \quad h_0 = H \cdot b^p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\log \frac{h_1}{h_0}}{\log \left(\frac{a+c}{2b} \right)} \quad (27)$$

Los valores obtenidos según la expresión (27) para el exponente p mostraron ser valores orientativos para los casos analizados en este trabajo. Para el espesor variable de acuerdo a la ley $h=H \cdot r^p$, los resultados obtenidos para el parámetro de pandeo mostraron ser cercanos a los arriba mencionados.

Se asignaron diferentes valores al exponente p , por ejemplo $p=0,1,2$. De esta forma es considerada la influencia de la variación del espesor para diferentes relaciones entre presión exterior e interior como también para los casos en que el borde externo es simplemente apoyado y empotrado. El coeficiente de Poisson se consideró igual a $1/3$.

Table 3. Parámetro de pandeo λ para placas anulares con borde externo simplemente apoyado, y $t=0$

k	p			
	0.5	1	1.5	2
0.1	1.422	0.658	0.422	0.314
0.2	1.418	0.703	0.447	0.328
0.3	1.399	0.765	0.491	0.356
0.4	1.348	0.835	0.552	0.400
0.5	1.338	0.901	0.625	0.461

Table 4. Parámetro de pandeo λ para placas anulares con borde externo simplemente apoyado, y $t=1$

k	p			
	0.5	1	1.5	2
0.1	1.328	0.653	0.420	0.313
0.2	1.307	0.677	0.437	0.324
0.3	1.244	0.697	0.460	0.341
0.4	1.144	0.705	0.485	0.362
0.5	1.028	0.699	0.507	0.389

Table 5. Parámetro de pandeo λ para placas anulares con borde externo empotrado, y $t=0$

k	p			
	0.5	1	1.5	2
0.1	6.980	3.120	1.720	1.26
0.2	8.621	5.131	2.921	1.998
0.3	11.001	7.972	5.177	3.396
0.4	15.780	10.560	9.340	6.550
0.5	20.096	15.070	10.230	7.689

Table 6. Parámetro de pandeo λ para placas anulares con borde externo empotrado, y $t=1$

k	p			
	0.5	1	1.5	2
0.1	6.540	2.870	1.630	1.250
0.2	7.445	4.156	2.496	1.799
0.3	8.120	5.764	3.794	2.473
0.4	9.680	7.210	5.870	4.340
0.5	12.680	10.150	8.290	6.340

5 CONCLUSIONES

Fundamentalmente se puede concluir que la aplicación del método de Rayleigh-Ritz optimizado, para abordar el problema de pandeo en el tipo de estructuras motivo de este trabajo, constituye un método de implementación sencilla. Por otra parte, la consideración de la expresión exacta para la determinación de la fuerza radial, con una sencilla ley de variación del espesor de la placa, permite reproducir formas clásicas de espesor.

Cuando crece el valor del exponente en la ley que define el espesor, el valor del parámetro de pandeo λ es menor. Por ejemplo, para ambas condiciones de borde, simplemente apoyado y empotrado, para una relación k de 0.5 existe una diferencia de aproximadamente el 51% entre los valores de λ para un valor de $p=2$ con respecto al de espesor lineal, si actúa sólo presión exterior. Este porcentaje se incrementa por ejemplo al 62.5%, si en ambos contornos actúa igual presión y con la condición de apoyo empotrado,

La incidencia del tamaño del orificio, dada por k , muestra que para valores constantes de la relación t y p , cuando k aumenta, esto es, el tamaño del hueco aumenta, también se incrementa el parámetro λ excepto para el caso de condición de borde simplemente apoyado con $p = 0.5$, para el que λ disminuye.

En relación a la influencia que ejerce la relación entre presiones, se observa que la acción simultánea de presiones sobre ambos contornos, exterior e interior produce una disminución en los valores del parámetro de pandeo λ .

6 REFERENCIAS

- [1] C. T. Dyka y J. F. Carney III, "Vibrations of annular plates of variable thickness", *J. of the Mech. Eng. ASCE*, Vol. **105-EM3**, 6361-370 (1979).
- [2] P. A. A. Laura, J. C. Paloto, R. D. Santos, "A note on the vibration and stability of a circular plate elastically restrained against rotation", *J. of Sound and Vibration*, **41**, 177-180 (1975).
- [3] P. A. A. Laura, G. M. Ficcidenti, S. I. Alvarez, "Effect of geometry boundary disturbances on the natural frequencies and buckling loads of vibrating clamped circular plates", *J. of Sound and Vibration*, **126**, 67-72, (1988).
- [4] P. A. A. Laura, L. Ercoli, R. H. Gutierrez, Inst. of Applied Mechanics, Bahía Blanca, Argentina, Monograph, Nro. 95-34 (1995).
- [5] P. A. A. Laura, R. H. Gutierrez, V. Sonzogni, S. Idelsohn, "Buckling of circular, annular plates of non-uniform thickness", *J. Ocean Eng.*, **24**, 51-61 (1997).
- [6] S. Timoshenko, "Teoría de la Estabilidad Elástica", Ed. Ediar, (1961).