

**DESARROLLOS EN MECANICA
COMPUTACIONAL DE FALLA MATERIAL.
APLICACION A MODELOS DE
PLASTICIDAD Y DAÑO.**

Autor: Pablo Javier Sánchez.

Tesis remitida a la Comisión de Posgrado de la
FACULTAD DE INGENIERIA Y CIENCIAS HIDRICAS
como parte de los requisitos para la obtención
del grado de
DOCTOR EN INGENIERIA
Mención Mecánica Computacional
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2006

Declaración legal del autor

La presente tesis ha sido remitida ante la comisión de Postgrado de la *Universidad Nacional del Litoral (UNL)* como parte de los requisitos para la obtención del grado académico de *Doctor en Ingeniería - Mención Mecánica Computacional*. Una copia de la misma permanecerá depositada en la biblioteca de la *Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH)*; su consulta queda supeditada a la normativa legal vigente por el reglamento de la mencionada biblioteca.

Para fines educativos y de investigación, no se requiere autorización especial alguna en lo concerniente a reproducción, copia, distribución o citas de la presente tesis.

Cualquier sugerencia o comentario, ya sea de contenido conceptual como de implementación algorítmica, sobre los tópicos desarrollados y discutidos en este trabajo de investigación, será altamente apreciada.

Pablo Javier Sánchez.

Agradecimientos

Esta tesis ha sido financiada por el *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)* en el marco del programa de Becas Doctorales Internas, durante el período 2001 – 2005.

La misma se ha realizado en el *Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)* del *Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC)*, dependiente del (*CONICET*) y de la *Universidad Nacional del Litoral (UNL)*, bajo la dirección del Ing. Civil Victorio Sonzogni, a quien agradezco profundamente la confianza que ha depositado en mi, su continuo apoyo y predisposición al trabajo.

Quiero expresar mi agradecimiento al excelente grupo de trabajo del *CIMEC*, a todos y cada uno de sus integrantes, de quienes he recibido siempre un consejo oportuno y palabras de aliento. Durante el desarrollo de esta tesis he compartido un verdadero ambiente de investigación científica, compañerismo, amistad y un sin número de experiencias enriquecedoras tanto a nivel profesional como personal.

Tuve además la gran fortuna de conocer y trabajar con el Dr. Alfredo Huespe. Durante su estancia en Argentina, a distancia vía internet o en mi corta estadía por Barcelona, Alfredo ha contribuido en gran medida en el planteo y resolución de los temas desarrollados en este informe.

Al profesor Javier Oliver y todo su grupo de investigación en la *UPC*, que por su formación científica de excelencia y calidad humana me ha permitido aprender, avanzar y finalizar este trabajo, mi más sincero agradecimiento.

Por último, pero no por ello menos importante, quiero agradecer a mi madre a quien todo se lo debo, a mi novia por su apoyo incondicional, a toda mi familia y amigos por estar siempre a mi lado.

Resumen

En este trabajo de investigación se estudian y desarrollan formulaciones de elementos finitos para la simulación numérica del fenómeno de *localización de deformaciones* inducido por el comportamiento constitutivo. Se analizan y plantean estrategias capaces de capturar las características más importantes del problema, incluyendo en este modelado el desarrollo de *discontinuidades* en el sólido (fisuras, fracturas, bandas de corte o de deslizamiento, según el contexto) las cuales se propagan en un medio inicialmente continuo, como consecuencia última del proceso macroscópico de degradación material.

Los conceptos teóricos aquí desarrollados se fundamentan en las siguientes hipótesis básicas: *i)* régimen quasi estático isotérmico, *ii)* pequeñas deformaciones, desplazamientos y rotaciones, *iii)* material homogéneo e isótropo dotado de ecuaciones constitutivas susceptibles de presentar inestabilidad material por la presencia de ablandamiento por deformación.

El problema de falla se encara desde diferentes puntos de vista. En primera instancia, se estudian estrategias no locales formuladas, alternativamente, en términos de un modelo de gradientes implícito (anexo A). Luego de reconocer algunas limitaciones en estos esquemas de regularización, al menos desde el punto de vista práctico ingenieril, en el contenido de la tesis se introduce la aproximación al problema mediante los denominados modelos cohesivos basados en elementos finitos con discontinuidades embebidas. En particular adoptamos como estrategia principal en este trabajo la aproximación por discontinuidades fuertes del continuo (*Continuum Strong Discontinuity Approach CSDA*), ver capítulo 3.

Se presenta además, un extenso y comparativo análisis sobre las dos familias de elementos finitos con discontinuidades fuertes embebidas potencialmente más eficaces para simular fractura frágil, tomando como base un modelo de daño isótropo. Tras realizar una eficiente implementación de ambas tecnologías de elementos, a partir de este estudio (capítulo 4) se obtienen conclusiones rigurosas con respecto a tópicos de fundamental importancia en el análisis de falla y que en la actualidad no están suficientemente claras, a saber: robustez, velocidad de convergencia, exactitud y costo computacional.

Otro aporte novedoso, en el contexto teórico de la *CSDA*, es la formulación matemática e implementación de un nuevo elemento finito para el modelado de bandas de corte en plasticidad isocórica (materiales gobernados por una ley de plasticidad de Von Mises), véase capítulo 6. El elemento propuesto se basa en acoplar consistentemente una formulación mixta estabilizada de base (para evitar el bloqueo volumétrico en la etapa pre-bifurcación, típico en modelos J_2) con la regularización constitutiva y enriquecimiento cinemático que aporta la aproximación por discontinuidades fuertes utilizada.

Previamente, en el capítulo 5, se realiza un riguroso estudio sobre el desempeño numérico del esquema de estabilización utilizado, aquí denominado *PGP*, especialmente direccionado a evaluar su desempeño para la simulación del fenómeno de localización de deformaciones. El mismo está formulado bajo el concepto de sub-escalas ortogonales, véase apéndice B. Como aporte adicional, en el apéndice C, mostramos además la performance numérica de su implementación en un entorno de cálculo distribuido.

Finalmente, y a manera de validación, se muestran diversos ejemplos numéricos que representan verdaderos desafíos desde el punto de vista de la simulación computacional, incluyendo casos 3D, mostrando la performance de las estrategias utilizadas y desarrolladas en esta tesis.

Abstract

In this research work, finite element formulations for the numerical simulation of *strain localization* phenomena induced by the constitutive behavior are studied and developed. Some efficient strategies to capture the main features of the problem are analyzed and formulated. In addition, this modelling considers the possibility of reproducing *discontinuities* in the body (like fractures, shear or slip bands, according to the context) which propagate throughout an initially continuum medium as the ultimate consequence of macroscopic material degradation process.

The theoretical concepts here developed are based on the following hypothesis: *i*) isothermal quasi static regime, *ii*) small deformations, displacements and rotations, *iii*) isotropic homogeneous material model equipped with constitutive equations which can present material instability because of the presence of strain softening.

First, the strain localization is approached by means of nonlocal strategies formulated, alternatively, in terms of an implicit gradient model (see appendix A). After recognizing some limitations in these regularization schemes, at least from the practical engineering point of view, the approach to the problem by means of the so called cohesive models based on finite elements with embedded discontinuities is introduced in the thesis. Particularly, the *Continuum Strong Discontinuity Approach (CSDA)* has been adopted as the main strategy of this thesis, see chapter 3.

Taking into account isotropic continuum damage models to simulate fragile fracture, an extensive and comparative analysis referred to the two potentially more effective families of finite elements with embedded strong discontinuities (at the present time), is presented in chapter 4. After making an efficient implementation of both technologies of elements, rigorous conclusions with respect to fundamental topics in failure analysis are obtained from this study, such as: robustness, convergence rates, precision of the response and computational cost.

In this theoretical context (*CSDA*), the mathematical formulation and numerical implementation of a new finite element to capture shear bands in isochoric plasticity (material that can be modeled by Von Mises criterion) is presented (see chapter 6). The proposed element is based on a consistent coupling of a mixed stabilized formulation (to avoid the volumetric locking in the pre-bifurcation stage, typical in J_2 model) jointly with the constitutive regularization and kinematical enrichment provided by the strong discontinuity approach (*CSDA*) used in this work.

Previously, a rigorous study about the numerical behavior of adopted stabilization scheme, which is based on the orthogonal sub-grid-scale concept (here referenced *PGP*), is performed in chapter 5. As an additional contribution, the numerical performance of its parallel implementation is also reported in Appendix C.

In order to demonstrate the performance of the strategies used and developed in this thesis, several numerical examples which represent true challenges from the computational point of view are reported, including three dimensional cases and problems involving the propagation of multiple cracks.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Descripción fenomenológica	4
1.3. Metodologías actuales de análisis	5
1.3.1. Mecánica de fractura clásica.	8
1.3.2. Modelos del continuo clásico.	9
1.3.3. Modelos del continuo enriquecido	11
1.3.4. Modelos con discontinuidades embebidas	13
1.4. Objetivos	15
1.5. Hipótesis	17
1.6. Contenidos	17
2. Localización de deformaciones	21
2.1. Introducción	21
2.2. Nomenclatura básica	22
2.3. Bifurcación material	24
2.3.1. Ecuaciones de compatibilidad cinemática	24
2.3.2. Condiciones de bifurcación	26
2.4. Modelo de plasticidad J_2	29
2.4.1. Ecuaciones básicas	29
2.4.2. Tensor Constitutivo Incremental	31
2.5. Modelo de daño escalar	31
2.5.1. Ecuaciones básicas	31
2.5.2. Tensor Constitutivo Incremental	34
2.6. Modelo de daño sólo tracción	35
2.7. Análisis de bifurcación discontinua	37
2.7.1. Módulo de ablandamiento crítico y ángulo de bifurcación	38
3. Aproximación por discontinuidades fuertes del continuo	41
3.1. Introducción	41
3.2. Modelo conceptual de la <i>CSDA</i>	42
3.2.1. Descripción cinemática con discontinuidades fuertes	43
3.2.2. Ecuaciones de gobierno	44
3.2.3. Regularización del modelo constitutivo	46
3.3. Aspectos de implementación de la <i>CSDA</i>	49
3.3.1. Cinemática regularizada	49

3.3.2.	Interpretación de la cinemática suavizada	50
3.4.	Análisis de discontinuidad fuerte	52
3.4.1.	Condición de discontinuidad fuerte en daño	52
3.4.2.	Modelo constitutivo discreto (tracción-salto) inducido	54
4.	Elementos con enriquecimiento nodal y elemental para fractura frágil.	57
4.1.	Motivación	57
4.2.	Formulación del problema	59
4.2.1.	Enriquecimiento de tipo <i>X-FEM</i>	60
4.2.2.	Enriquecimiento de tipo <i>E-FEM</i>	61
4.3.	Escenario de comparación	64
4.3.1.	Modelo constitutivo: ley cohesiva tracción-salto proyectada	64
4.3.2.	Implementación por elementos finitos	64
4.3.3.	Propagación de discontinuidades en el medio	66
4.3.4.	Robustez. Esquema de integración implícito-explicito	71
4.4.	Ejemplos numéricos	72
4.4.1.	Viga doble cantilever. Test con cargas diagonales.	72
4.4.2.	Viga de cuatro puntos en modo flexión.	81
4.4.3.	Problema de múltiples fisuras. Material compuesto.	89
4.5.	Discusión	91
5.	Estabilización en plasticidad J_2 con ablandamiento.	93
5.1.	Introducción	94
5.2.	Formulación mixta estabilizada en mecánica de sólidos	95
5.2.1.	El problema numérico de la incompresibilidad	95
5.2.2.	Formulación variacional	96
5.2.3.	Esquema de estabilización <i>PSPG</i>	99
5.2.4.	Esquema de estabilización <i>PGP</i>	99
5.3.	Implementación numérica del esquema estabilizado <i>PGP</i>	100
5.3.1.	Definición de los campos discretos	100
5.3.2.	Evaluación del residuo	102
5.3.3.	Tensor constitutivo tangente consistente	103
5.4.	Ejemplos de aplicación	104
5.4.1.	Análisis de convergencia	105
5.4.2.	Elasticidad incompresible	108
5.4.3.	Test bidimensional de Prandtl	111
5.4.4.	Cilindro 3D con entalla	115
5.4.5.	Problema de localización de deformaciones	117
5.5.	Comentarios	119
6.	Elemento finito para modelar bandas de corte en plasticidad isocórica	121
6.1.	Introducción	122
6.2.	Ecuaciones de gobierno para sólidos con bandas de corte	123
6.3.	Análisis de discontinuidad fuerte	124
6.3.1.	Condición de discontinuidad fuerte	124
6.3.2.	Ley discreta cohesiva inducida	128

6.4. Formulación variacional mixta estabilizada incorporando discontinuidades fuertes embebidas.	131
6.4.1. Problema mixto discontinuo	132
6.4.2. Discretización y estabilización	134
6.5. Implementación numérica	136
6.5.1. Aproximación del campo de desplazamientos y deformaciones	137
6.5.2. Interpolación para la presión y gradiente de presión proyectado	138
6.5.3. Ecuaciones discretas finales. Cálculo del residuo	139
6.5.4. Forma lineal. Matriz tangente consistente	141
6.6. Verificación numérica del modelo	142
6.6.1. Problema de estabilidad de talud	143
6.6.2. Panel bidimensional con entalla	155
7. Conclusiones	163
7.1. Resumen y discusión	163
7.2. Aportes originales	168
7.3. Posibles líneas de investigación a futuro	169
A. Modelo de daño con teoría de gradientes implícito	171
A.1. Introducción	171
A.2. Modelo de daño regularizado	173
A.3. Formulación del modelo con teoría de gradientes implícito	174
A.4. Implementación numérica	176
A.4.1. Discretización espacial	176
A.4.2. Retorno a la superficie de daño	177
A.4.3. Módulo tangente algorítmico	177
A.5. Resultados numéricos	179
A.5.1. Test de tracción	179
A.5.2. Viga de tres puntos	182
A.6. Discusión	184
B. Estabilización mediante sub-escalas ortogonales	187
B.1. Método de sub escalas	187
B.2. Método de sub escalas ortogonales	192
C. Esquema <i>PGP</i>. Implementación en un entorno paralelo.	195
C.1. Tópicos de implementación en paralelo	195
C.2. Solución del sistema de ecuaciones	197
C.3. Test de elasticidad incompresible	199
D. Aplicación de la <i>CSDA</i> al análisis de vulnerabilidad estructural.	203
D.1. Introducción	203
D.2. Ejemplos numéricos	204
D.2.1. Viga de 4 puntos. Caso 2D	205
D.2.2. Presa de Scalere	207

Índice de figuras

1.1. Fisuras en elementos de hormigón.	3
1.2. Falla masiva debido a inestabilidad en taludes o terraplenes.	3
1.3. Esquema de formación de fractura en un medio inicialmente continuo: (a) Proceso elástico reversible. (b)-(c)-(d) Mecanismos disipativos y proceso de localización. (e)-(f) Desarrollo de una superficie de falla, discontinuidad o fisura.	6
1.4. Falta de objetividad en la respuesta estructural para modelos no regularizados: (a) Niveles de discretización en función del tamaño característico del elemento h_e . (b) Curvas carga-desplazamiento evidenciando energía de fractura decreciente.	7
2.1. Configuración de referencia. Conjunto de variables mecánicas y cinemáticas asociadas a un punto material \boldsymbol{x}	23
2.2. Dominio material Ω subdividido por la superficie \mathcal{S} a través de la cual un campo arbitrario puede presentar discontinuidades en sus derivadas.	24
2.3. Leyes de ablandamiento para el modelo de daño escalar representadas en el espacio de variables internas $(r - q)$: (a) Lineal. (b) Exponencial.	33
3.1. Definición del problema mecánico exhibiendo discontinuidades fuertes.	43
3.2. Descripción cinemática compatible con discontinuidades en el campo de desplazamientos al tiempo $t + \Delta t$. Configuración inicial y final.	44
3.3. Descripción de la cinemática de discontinuidades fuertes regularizada.	50
3.4. Mecanismo de fallo inducido por la cinemática de discontinuidades fuertes regularizada: (a)-(d) Proceso de formación de fractura. (e) Curva tensión deformación del punto \mathcal{P} . (f) Variación del factor de penalidad $h(t)$ en función del tiempo.	51
4.1. Enriquecimiento nodal y elemental. Soporte de los modos discontinuos: (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$	58
4.2. Descripción cinemática de discontinuidades fuertes.	60
4.3. Interpolación del campo de desplazamientos para la formulación $E-FEM$. Caso particular de triángulo con interpolación lineal: (a) Grados de libertad del elemento. (b) Función $\varphi^e(\boldsymbol{x})$. (c) Función escalón $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{x})$. (d) Función salto unitario $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^e(\boldsymbol{x})$	63
4.4. Definición de cuadraturas de integración: (a) Reglas para triángulos y tetraedros lineales correspondientes a la formulación $E-FEM$. (b) Reglas para triángulos y tetraedros lineales correspondientes a la formulación $X-FEM$	66

4.5. Representación esquemática del algoritmo global de trazado de discontinuidad: (a) Primer elemento raíz r_1 y primera fisura activa \mathcal{S}_1 . (b) Desarrollo de una nueva fisura activa \mathcal{S}_2	68
4.6. Secuencia de activación de los nodos asociados a los grados de libertad de saltos en desplazamientos β para la formulación $E-FEM$	69
4.7. Secuencia de activación de los nodos asociados a los grados de libertad de saltos en desplazamientos β para la formulación $X-FEM$	70
4.8. Viga doble cantilever. Test con cargas diagonales: (a) Geometría y condiciones de contorno. (b) Historia de carga. (c) Configuración deformada. . .	73
4.9. Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Secuencia de mallas de elementos finitos $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$	74
4.10. Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{F}_1 vs. $CMOD$): (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$	75
4.11. Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Fuerza \mathbf{F}_1 vs. $CMOD$. Comparación de soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ para cada malla de la secuencia: (a) Malla M_1 . (b) Malla M_2 . (c) Malla M_3 . (d) Malla M_4 . . .	76
4.12. Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Diagramas de convergencia en escala logarítmica: (a) Error relativo $\ e_{CMOD}\ _{L^2}$ vs. tamaño característico del elemento h_e . (b) Error relativo $\ e^{efem-xfem}\ _{L^2}$ de la diferencia entre las soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ vs. tamaño característico del elemento h_e	76
4.13. Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Secuencia de mallas de elementos finitos $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$	78
4.14. Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales: (a) Configuración deformada. (b) Elementos atravesados por la trayectoria de discontinuidad.	79
4.15. Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{F}_1 vs. $CMOD$ promedio): (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$	79
4.16. Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Fuerza \mathbf{F}_1 vs. $CMOD$ promedio. Comparación de soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ para cada malla de la secuencia: (a) Malla M_1 . (b) Malla M_2 . (c) Malla M_3 . (d) Malla M_4	80
4.17. Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Diagramas de convergencia en escala logarítmica: (a) Error relativo $\ e_{CMOD}\ _{L^2}$ vs. tamaño característico del elemento h_e . (b) Error relativo $\ e^{efem-xfem}\ _{L^2}$ de la diferencia entre las soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ vs. tamaño característico del elemento h_e	80
4.18. Viga de cuatro puntos con simple entalla. Geometría y condiciones de contorno (dimensiones en milímetros).	81
4.19. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Secuencia de mallas de elementos finitos $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ y trayectoria de discontinuidad obtenida con la formulación $E-FEM$ y $X-FEM$	82
4.20. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{P} vs. $CMSD$): (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$. .	83

4.21. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Fuerza \mathbf{P} vs. $CMSD$. Comparación de soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ para cada malla de la secuencia: (a) Malla M_1 . (b) Malla M_2 . (c) Malla M_3 . (d) Malla M_4	83
4.22. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Diagramas de convergencia en escala logarítmica: (a) Error relativo $\ e_{CMSD}\ _{L^2}$ vs. tamaño característico del elemento h_e . (b) Error relativo $\ e^{efem-xfem}\ _{L^2}$ de la diferencia entre las soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ vs. tamaño característico del elemento h_e	84
4.23. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Secuencia de mallas de elementos finitos $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$	85
4.24. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Modo de falla: (a) Elementos atravesados por la trayectoria de discontinuidad. (b) Configuración deformada.	86
4.25. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{P} vs. $CMSD$ promedio): (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$	87
4.26. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Fuerza \mathbf{P} vs. $CMSD$ promedio. Comparación de soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ para cada malla de la secuencia: (a) Malla M_1 . (b) Malla M_2 . (c) Malla M_3 . (d) Malla M_4	87
4.27. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Diagramas de convergencia en escala logarítmica: (a) Error relativo $\ e_{CMSD}\ _{L^2}$ vs. tamaño característico del elemento h_e . (b) Error relativo $\ e^{efem-xfem}\ _{L^2}$ de la diferencia entre las soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ vs. tamaño característico del elemento h_e	88
4.28. Placa de hormigón reforzado. Problema de propagación múltiple de fisuras. Número total de elementos 23245, $h_e \sim 26$ [mm]: (a) Geometría y condiciones de contorno del modelo idealizado. (b) Conjunto variable de elementos que capturan las fisuras verticales.	89
4.29. Placa de hormigón reforzado. Problema de propagación múltiple de fisuras. Tiempos, medido en segundos de CPU, para distintas partes del proceso de cálculo: (a) Cómputo y ensamble del residuo. (b) Cómputo y ensamble de la matriz de rigidez. (c) Resolución del sistema de ecuaciones. (d) Tiempo Total.	90
5.1. Nomenclatura básica para la definición del problema mecánico.	96
5.2. Representación gráfica de la proyección L^2 del gradiente de presión discretizado ∇p^h sobre el espacio de aproximación por Elementos Finitos.	100
5.3. Análisis de convergencia del esquema PGP . Test en modo flexión de viga en cantilever: (a) Modelo físico y geometría de la estructura. (b) Modelo numérico y condiciones de contorno.	106
5.4. Análisis de convergencia del esquema PGP . Caso de elasticidad compresible $\nu = 0,25$: (a) Convergencia en desplazamientos. (b) Convergencia en presiones.	107
5.5. Análisis de convergencia del esquema PGP . Caso de elasticidad incompresible $\nu = 0,49999$: (a) Convergencia en desplazamientos. (b) Convergencia en presiones.	107

5.6.	Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Niveles de discretización del modelo numérico: (a) 56000 tetraedros (b) 90000 tetraedros.	108
5.7.	Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Mapas de tensión media σ_m para la formulación mixta sin estabilización <i>MSTD</i> : (a) Modelo con 56000 elementos. (b) Modelo con 90000 elementos.	109
5.8.	Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Mapas de tensión media σ_m para la formulación mixta estabilizada <i>PGP</i> : (a) Modelo con 56000 elementos. (b) Modelo con 90000 elementos.	109
5.9.	Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Curvas de variación de la tensión media σ_m en el segmento de línea interno \overline{AB} . Formulación <i>PGP</i> con diferentes valores del coeficiente de estabilización c	110
5.10.	Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Curvas de variación de la tensión media σ_m en el segmento de línea interno \overline{AB} . Comparación numérica de dos procedimientos de estabilización: <i>PSPG</i> vs <i>PGP</i>	110
5.11.	Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Geometría y condiciones de contorno (unidad de longitud: milímetros).	111
5.12.	Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Configuraciones de malla: (a) Malla no estructurada. (b) Malla estructurada.	112
5.13.	Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Mapas de tensión media: (a) Formulación <i>MSTD</i> . (b) Formulación <i>PGP</i>	113
5.14.	Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Mapa de deformación plástica equivalente: (a) Formulación <i>PGP</i> , malla no estructurada (simétrica). (b) Formulación <i>PGP</i> , malla estructurada (no simétrica). (c) Formulación <i>STD</i> , malla estructurada (no simétrica).	113
5.15.	Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Contornos de igual desplazamiento: (a) Formulación <i>PGP</i> en régimen elástico, malla estructurada. (b) Formulación <i>PGP</i> en régimen plástico, malla estructurada.	114
5.16.	Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Curva carga desplazamiento.	114
5.17.	Cilindro 3D con entalla: (a) Geometría del problema. (b) Modelo discreto.	115
5.18.	Cilindro 3D con entalla. Curva carga desplazamiento.	116
5.19.	Cilindro 3D con entalla. Mapas de tensión media para la formulación <i>PGP</i> : (a) Factor de estabilización $c = 0,04$. (b) Factor de estabilización $c = 4$	116
5.20.	Problema de localización de deformaciones (dimensiones en milímetros): (a) Modelo físico. (b) Modelo numérico.	117
5.21.	Problema de localización de deformaciones. Mallas utilizadas en la simulación: (a) 375 elementos. (b) 128 elementos. (c) 128 elementos.	118
5.22.	Problema de localización de deformaciones. Mapas de deformación plástica equivalente para las distintas mallas de la figura 5.21	118
5.23.	Problema de localización de deformaciones. Curva carga total versus descenso prescrito δ_y	119
6.1.	Definición de un problema mecánico exhibiendo un modo de falla caracterizado por la presencia de bandas de corte.	124
6.2.	Estructura del tensor de tensiones σ_S sobre la superficie de deslizamiento S , una vez alcanzado el régimen de discontinuidad fuerte.	129

6.3. Aspectos de implementación: (a) Esquema alternativo de integración numérica. (b) Aproximación del campo de presiones p^e en la zona regular ($\Omega \setminus \mathcal{S}$) y singular (\mathcal{S}) del elemento finito.	138
6.4. Problema de estabilidad de talud. Geometría y condiciones de contorno.	144
6.5. Problema de estabilidad de talud. Secuencia de mallas de elementos triangulares: (a) Malla M1: 285 elementos, $h_e \approx 1 [m]$. (b) Malla M2: 969 elementos, $h_e \approx 0,50 [m]$. (c) Malla M3: 3541 elementos, $h_e \approx 0,25 [m]$	145
6.6. Problema de estabilidad de talud. Malla M4, de cuadriláteros: 1865 elementos, $h_e \approx 0,25 [m]$	146
6.7. Problema de estabilidad de talud. Secuencia de elementos atravesados por la superficie de fallo conforme avanza el proceso de localización. Formulación $PGPSD-N$, Malla M3.	147
6.8. Problema de estabilidad de talud. Elementos atravesados por la superficie de fallo para el máximo desplazamiento impuesto ($\delta \mathbf{u} = 0,20 [m]$). Formulación $PGPSD-N$: (a) Malla M1. (b) Malla M2. (c) Malla M3.	148
6.9. Problema de estabilidad de talud. Secuencia de elementos con comportamiento disipativo plástico conforme avanza el proceso de localización. Formulación $PGPSD-N$, Malla M3.	149
6.10. Problema de estabilidad de talud. Respuesta en desplazamientos para el modelo $PGPSD-N$, Malla M3: (a) Mapa de la medida L^2 de \mathbf{u} . (b) Curvas de nivel. (c) Campo de vectores.	150
6.11. Problema de estabilidad de talud. Comparación entre la estrategia PGP y $PGPSD-N$: (a) Formulación PGP , geometría deformada a nivel del punto C en la curva de respuesta. (b) Formulación $PGPSD-N$, geometría deformada a nivel del punto C en la curva de respuesta. (c) Curva de equilibrio carga vs. desplazamiento del punto A, para ambos esquemas numéricos.	151
6.12. Problema de estabilidad de talud. Curva de equilibrio carga versus desplazamiento del punto A: (a) Convergencia en malla del modelo $PGPSD-N$. (b) Comparación de varias formulaciones de elementos, Malla M3.	153
6.13. Problema de estabilidad de talud. Tasa de convergencia de la formulación $PGPSD-N$ comparada con el elemento $STDSD-N$: (a) Medida L^2 de la energía disipada. (b) Carga límite estructural.	154
6.14. Problema de placa con entalla. Geometría y condiciones de borde: (a) Modelo físico. (b) Modelo numérico.	156
6.15. Problema de placa con entalla. Discretizaciones de elementos finitos utilizadas en la simulación: (a) Malla M1: $h_e \approx 4 [mm]$, 1300 elementos. (b) Malla M2: $h_e \approx 2 [mm]$, 5252 elementos.	156
6.16. Problema de placa con entalla. Secuencia de elementos atravesados por la superficie de fallo conforme avanza el proceso de localización. Formulación $PGPSD-N$, Malla M2.	158
6.17. Problema de placa con entalla. Secuencia de configuraciones deformadas. Formulación $PGPSD-N$, Malla M2.	159
6.18. Problema de placa con entalla. Secuencia de elementos con comportamiento disipativo plástico conforme avanza el proceso de localización. Formulación $PGPSD-N$, Malla M2.	160

6.19. Problema de placa con entalla. Curvas de equilibrio carga versus desplazamiento para diversas formulaciones de elementos	161
A.1. Idealización del proceso de degradación material en términos de la variable de daño: $d \in [0, 1]$. Dominio de promediación ξ para incorporar no localidad	172
A.2. Test de tracción uniaxial. Geometría del modelo.	180
A.3. Test de tracción uniaxial. Ley de ablandamiento lineal. Curva carga desplazamiento para distintas mallas.	180
A.4. Test de tracción uniaxial. Ley de ablandamiento lineal. Curvas de evolución: (a) Variable de daño d . (b) Deformación equivalente no local $\tilde{\tau}_\epsilon$	181
A.5. Test de tracción uniaxial. Ley de ablandamiento exponencial: (a) Curva de respuesta carga desplazamiento. (b) Curva de evolución de la variable de daño.	181
A.6. Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Geometría y condiciones de contorno del modelo.	182
A.7. Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Carga P vs. Desplazamiento $CMOD$. Comparación de respuesta entre dos formulaciones alternativas y una envolvente experimental.	183
A.8. Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Malla de elementos finitos utilizada en la configuración deformada (≈ 2770 elementos).	183
A.9. Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Mapa de la variable de daño d para un estado avanzado de degradación.	184
B.1. Representación esquemática del método de sub escalas en el espacio $\mathcal{V}^h - \mathcal{V}_0^s$	189
C.1. Performance en paralelo para solvers directos e iterativos: (a) Tiempo de CPU para distintas estrategias de solución. (b) Consumo de memoria RAM para distintas estrategias de solución.	198
C.2. Modelo PGP , performance en paralelo. Ejemplo de bloque elástico incompresible. Mallas de elementos finitos: (a) 56000 elementos tetraédricos (b) 90000 elementos tetraédricos.	199
C.3. Modelo PGP , performance en paralelo. Ejemplo de bloque elástico incompresible. Convergencia del solver lineal, test con 56000 elementos.	200
C.4. Modelo PGP , performance en paralelo. Ejemplo de bloque elástico incompresible. Convergencia del solver lineal, test con 90000 elementos.	200
D.1. Viga de 4 puntos: (a) Descripción geométrica del modelo. (b) Trayectoria de fisura obtenida experimentalmente.	205
D.2. Viga de 4 puntos. Curvas de respuesta carga P vs. desplazamiento $CMSD$: (a) Comparación entre la solución numérica vía $CSDA$ y la envolvente experimental. (b) Curvas de equilibrio para todos los casos analizados.	206
D.3. Viga de 4 puntos. Resultados para los 1000 casos analizados: (a) Variación de la carga límite según el problema considerado. (b) Variación del desplazamiento $CMSD$, en correspondencia con la carga límite, según el problema considerado.	206
D.4. Presa de Scalere. Geometría del modelo numérico: (a) Vista superior. (b) Perspectiva inferior	208

D.5. Presa de Scalere. Geometría del modelo numérico: (a) Perspectiva aguas arriba. (b) Perspectiva aguas abajo.	208
D.6. Presa de Scalere. Esquema simplificado para la aplicación de la presión hidrostática. Evolución del factor de carga.	209
D.7. Presa de Scalere. Curva de equilibrio: Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal del nodo P.	211
D.8. Presa de Scalere. Contornos de igual desplazamiento.	212
D.9. Presa de Scalere. Geometría en la configuración deformada.	212
D.10. Presa de Scalere. Trayectorias de fisuras primarias.	213
D.11. Presa de Scalere. Trayectorias de fisuras primarias.	213

Índice de cuadros

2.1. Expresiones analíticas cerradas para determinar el módulo de ablandamiento crítico (H^{crit}) y el ángulo de bifurcación (θ^{crit}) en los modelos de plasticidad y daño utilizados.	40
3.1. Modelo conceptual de la Aproximación mediante Discontinuidades Fuertes del Continuo (<i>CSDA</i>).	47
3.2. Modelo conceptual de la Aproximación mediante un Modelo Discreto Cohesivo Estándar.	48
3.3. Ecuaciones básicas del modelo de daño escalar.	52
3.4. Ecuaciones básicas del modelo de daño proyectado sobre la interface \mathcal{S}	56
4.1. Nomenclatura y definiciones a considerar para el análisis de eficiencia computacional.	72
4.2. Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Costo computacional relativo (<i>RCC: X-FEM/E-FEM</i>).	77
4.3. Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Costo computacional relativo (<i>RCC: X-FEM/E-FEM</i>).	81
4.4. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Costo computacional relativo (<i>RCC: X-FEM/E-FEM</i>).	84
4.5. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Costo computacional relativo (<i>RCC: X-FEM/E-FEM</i>).	88
6.1. Ecuaciones básicas para el modelo de plasticidad J_2	125
6.2. Ley cohesiva discreta proyectada.	131
6.3. Formulaciones de elementos finitos para modelar bandas de deslizamiento.	143
6.4. Problema de estabilidad de talud. Costo computacional relativo entre la formulación <i>PGPSD</i> y la estrategia <i>BBARSD</i>	155
A.1. Ecuaciones básicas del modelo de daño escalar regularizado en términos una medida de deformación equivalente no local $\tilde{\tau}_\epsilon$	174
A.2. Algoritmo de retorno a la superficie de daño para la formulación con gradientes implícito.	178
C.1. Modelo <i>PGP</i> , performance en paralelo. Tiempos medidos en segundos de CPU, referidos a la estrategia <i>ISSD-Jacobi</i> . Test con 56000 elementos	201
C.2. Modelo <i>PGP</i> , performance en paralelo. Tiempos medidos en segundos de CPU, referidos a la estrategia <i>ISSD-Jacobi</i> . Test con 90000 elementos	201

D.1. Viga de cuatro puntos. Valores promedio y rango admisible de variación para los parámetros del material.	205
D.2. Viga de cuatro puntos. Conjunto de datos y resultados obtenidos para 10 combinaciones, tomadas arbitrariamente, de parámetros del material. . . .	207
D.3. Presa de Scalere. Valores promedio y rango admisible de variación para los parámetros del hormigón.	210
D.4. Presa de Scalere. Parámetros materiales para la roca de fundación.	210
D.5. Presa de Scalere. Conjunto de datos y resultados obtenidos para 10 combinaciones, tomadas arbitrariamente, de parámetros del material.	211

Capítulo 1

Introducción

Se entiende por *Mecánica de Falla Material (MFM)*¹ al modelado de materiales que pueden experimentar procesos inelásticos irreversibles de plasticidad y/o daño, modos de intensa deformación en zonas de reducidas dimensiones y como consecuencia final el desarrollo gradual de fisuras, fracturas o bandas de deslizamiento libres de tensión. Desde el punto de vista de la *Mecánica del Continuo* la falla está asociada al fenómeno de *Localización de Deformaciones* inducido por inestabilidades a nivel material.

La descripción de este complejo mecanismo de degradación no es para nada una tarea trivial e involucra desde una correcta concepción física del fenómeno hasta la formulación de modelos teóricos y numéricos rigurosos. Entre los factores más influyentes que intervienen en tal mecanismo pueden mencionarse: caracterización constitutiva del material, planteo de estrategias generales y robustas de solución, consistencia termodinámica, acoplamiento de problemas de distinta escala (degradación a nivel micro estructural ↔ descripción macroscópica), etc. Además, la naturaleza intrínseca del fenómeno induce (en estado límite) discontinuidades en las variables de estado y severas complicaciones desde el punto de vista matemático en los modelos resultantes, los cuales predicen soluciones singulares. Por estas razones, se torna evidente que un estudio serio y profundo del problema sólo puede abordarse a través de aproximaciones numéricas adecuadas, representando uno de los desafíos actuales en el contexto de la mecánica computacional.

Durante las últimas décadas, debido al avance en tecnología de procesadores y al desarrollo de paradigmas robustos de programación, se ha trabajado intensamente en la obtención de esquemas numéricos capaces de simular el proceso de falla, como queda demostrado a partir de la gran cantidad de publicaciones científicas especializadas. Los avances en este sentido son muy alentadores. Sin embargo, aún en la actualidad, existen limitaciones importantes en los modelos propuestos que motivan el constante planteo de nuevas líneas de investigación, con el objeto de capturar en detalle los aspectos más relevantes del problema.

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo primordial la obtención de herramientas eficientes de simulación en esta rama específica de la ingeniería de materiales, utilizando para ello la aproximación por el método de los elementos finitos.

¹En el contexto del análisis mecánico de sólidos existe otro posible escenario de colapso. El mismo resulta compatible con la existencia de configuraciones geométricas que reducen significativamente la capacidad portante de la estructura. A este tipo particular de situación se la denomina comúnmente *Falla Geométrica*. El alcance de este trabajo se restringe sólo a la falla de carácter material.

El resto de este capítulo se organiza como sigue: en la sección 1.1 se hace una rápida referencia a los motivos y aplicaciones prácticas que han impulsado este estudio, en la sección 1.2 se introduce una descripción fenomenológica simplificada del proceso de degradación y generación de fallas en un medio continuo. Una revisión de las estrategias actuales de análisis se presenta en la sección 1.3; los objetivos e hipótesis principales de este trabajo se resumen en los apartados 1.4 y 1.5 respectivamente. Finalmente, en la sección 1.6 se menciona la estructura global y organización básica de esta tesis.

1.1. Motivación

El análisis del estado mecánico de los materiales deformables hasta el completo agotamiento de su capacidad resistente es un tema de reconocida importancia en ciencias, tecnología e ingeniería. Los desarrollos y resultados obtenidos en este área poseen aplicación directa a problemas prácticos reales brindando un conocimiento más preciso de la resistencia límite de las estructuras, hecho que se traduce en diseños más confiables y económicos.

En el contexto de las estructuras civiles, su estudio permite predecir los posibles modos de falla, estimar la carga última asociada a dicho mecanismo, evaluar el grado de seguridad real como así también la reserva de resistencia y/o ductilidad en régimen post-crítico de los sistemas estructurales, factores de suma importancia en la etapa de cálculo y verificación.

Las estructuras de hormigón, extensamente utilizadas desde hace ya varios años, son particularmente susceptibles a experimentar colapso frágil y fisuración, ver algunos ejemplos en la figura 1.1. Esta situación no sólo se presenta bajo cargas externas de servicio, sino también en edades tempranas durante el proceso de endurecimiento debido al fenómeno de pérdida de humedad por difusión y reacción con el cemento. Los cambios volumétricos debido a efectos térmicos (agentes climáticos, calor de hidratación liberado por fragüe) representan también un posible motivo de micro fracturas que requieren un control adecuado, principalmente en estructuras de hormigón de gran volumen.

La mecánica de falla permite también abordar el estudio de problemas geotécnicos complejos en los cuales, bajo ciertas condiciones críticas, pueden originarse verdaderas superficies de colapso o deslizamiento con consecuencias, muchas veces, de tipo catastróficas. El análisis de la estabilidad de taludes y terraplenes artificiales construidos en base a materiales sueltos (suelos y rocas), deslizamientos en laderas naturales, aludes de tierra o nieve, representan casos típicos de este tipo de problemas que se caracterizan por un desplazamiento masivo del material, ver figura 1.2.

Otra aplicación interesante de la *MFM*, en el contexto de las ciencias del terreno, es el computo de la capacidad de carga última de las fundaciones. En este sentido, la estrategia más reconocida y utilizada en mecánica de suelos moderna para lograr estimaciones satisfactorias, se basa en la obtención del mecanismo de colapso probable, el cual está estrechamente relacionado con las características geométricas, físico-mecánicas y de carga del sistema suelo-estructura de fundación. La carga límite asociada a dicho mecanismo de falla, afectada por un adecuado coeficiente de seguridad, permite al ingeniero el diseño y adopción de las dimensiones definitivas de las obras de fundación. En la literatura clásica [TPM96] existen soluciones semi-analíticas sólo para problemas ideales obtenidas asumiendo hipótesis simplificadas y que muchas veces no se amoldan a situaciones prác-



Figura 1.1: Fisuras en elementos de hormigón.



Figura 1.2: Falla masiva debido a inestabilidad en taludes o terraplenes.

ticas reales, evidenciando de esta forma la necesidad de modelos más elaborados capaces de describir adecuadamente el fenómeno.

Existen además innumerables aplicaciones prácticas a nivel industrial en donde la mecánica de fractura adquiere un carácter especialmente importante. Varias tecnologías actuales de fabricación involucran el moldeo o manipulación de materiales los cuales pueden, en alguna etapa, estar sometidos a condiciones críticas próximas a su límite de resistencia. Con el único propósito de nombrar sólo algunas de ellas, se pueden mencionar: conformado, embutido, estampado, colada continua, tratamientos térmicos, forjado, soldaduras, etc. La posibilidad de contar con modelos capaces de evaluar la degradación macroscópica que sufre el material y al mismo tiempo la susceptibilidad a fisuración frente a variaciones en los parámetros que controlan el proceso, permite introducir reducciones en los costos de producción y paralelamente mejoras sustanciales en la calidad del producto final.

El estudio de la mecánica de falla presenta a su vez importantes desafíos conceptuales desde el punto de vista físico, matemático y computacional. En general se requiere el planteo de elaboradas formulaciones teóricas a nivel de las ecuaciones del continuo para salvar las falencias propias de los modelos clásicos, como así también esquemas numéricos robustos y consistentes. Estas condiciones son indispensables para obtener algoritmos convergentes y de razonable relación precisión-costado de cálculo, frente al comportamiento altamente no lineal que reviste el problema.

Las consideraciones hechas en los párrafos anteriores surgen como una motivación para abordar el estudio de falla en materiales que aquí se presenta.

1.2. Descripción fenomenológica

Experimentalmente se ha observado que el mecanismo de colapso en materiales de uso tecnológico tales como hormigones, suelos, metales, cerámicos, polímeros, etc, está precedido por un proceso disipativo no lineal caracterizado por la concentración de deformaciones en bandas de espesor muy pequeño en comparación con las dimensiones globales de la estructura. En ellas se concentran procesos irreversibles de degradación y disipación de energía (daño, plasticidad) mientras que el resto del sólido experimenta descarga elástica.

La aparición de este mecanismo de *localización de deformaciones* implica directa o indirectamente el *inicio* del proceso de falla material, de allí la importancia de disponer de modelos numéricos capaces de simular eficientemente el fenómeno.

Las bandas con deformaciones altamente localizadas pueden manifestarse bajo diversas formas. Como ejemplos clásicos podemos mencionar las bandas de corte en metales dúctiles (estacionarias), superficies de deslizamiento en problemas geotécnicos, fisuración en estructuras construidas a base de morteros cementicios o en problemas de mecánica de rocas, entre otros. Si bien la naturaleza es diferente para cada situación en particular, todos ellos pueden conceptualmente clasificarse como problemas de *localización de deformaciones*, y en este contexto general deberá entenderse el fenómeno de falla a los fines del presente estudio.

El proceso de localización produce o activa defectos potenciales en la estructura a nivel micro mecánico que, dependiendo del tipo de material, se manifiestan de manera distinta. En metales por ejemplo es típica la formación de micro poros o vacíos (*voids*) que reducen

el volumen efectivo del medio. Por el contrario en materiales cuasi frágiles el daño y el desarrollo de micro fisuras es el proceso dominante. La coalescencia o interconexión de tales defectos en el seno del continuo origina mecanismos macroscópicos de degradación los cuales inducen, a nivel estructural, una relación constitutiva con ablandamiento (disminución del estado tensional ante continuos incrementos de deformaciones). Materiales que exhiben este comportamiento se denominan *localmente inestables* (Hill [Hil58]).

La idea de asociar la *localización de deformaciones* al comportamiento constitutivo se fundamenta en que la misma se manifiesta súbitamente y puede tener lugar aun para estados homogéneos de tensión, con lo cual su existencia deberá estar en íntima relación con la presencia de inestabilidades a nivel de las leyes de evolución material.

En la figura 1.3 se esquematiza el proceso idealizado de formación de discontinuidad. Conforme evoluciona el estado de sollicitación mecánico, se hace evidente el mecanismo típico precursor de la falla material, el cual se caracteriza por una reducción gradual del ancho de banda de localización b_w hasta que la misma colapsa en una superficie de falla \mathcal{S} , modificándose sustancialmente la cinemática del problema.

En vista de la descripción anterior pueden reconocerse dos mecanismos bien diferenciados. El primero de ellos corresponde al proceso inelástico responsable del inicio de la degradación en una porción reducida pero finita del dominio de análisis (figura 1.3-(b)-(c)-(d)) para el cual la mecánica del continuo, a través de modelos constitutivos regularizados, logra aproximaciones relativamente satisfactorias. El cambio brusco en la cinemática representa el otro proceso fundamental, gobernado por la generación de verdaderos planos de discontinuidad (libres de tensión) que en rigor debieran considerarse como una nueva frontera del problema (ver figura 1.3-(e)-(f)). Para capturar eficientemente este último fenómeno, siempre dentro del contexto del método de elementos finitos, se requieren sofisticadas técnicas de remallado o bien tecnologías de elementos que incorporen explícitamente la discontinuidad real que se produce en el sólido.

1.3. Metodologías actuales de análisis

La mecánica de medios continuos clásica (*local*) describe el proceso de localización como la acumulación de mecanismos disipativos entre dos superficies próximas, entre las cuales se verifica una discontinuidad en el campo de deformaciones (*discontinuidad débil*) [RR75, Ric76]

Definición 1 en el contexto del presente trabajo se entiende por “Discontinuidad Débil” una descripción cinemática compatible con la existencia de discontinuidades en alguna componente del campo de deformaciones a partir de un instante de tiempo específico (t_B); matemáticamente²: $\exists \llbracket \varepsilon(\mathbf{x}, t) \rrbracket_{ij} \neq 0$ para $t \geq t_B$. El campo de desplazamiento permanece continuo, es decir $\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rrbracket = \mathbf{0} \forall t \in [0, T]$.

Este modo de bifurcación (aquí denominado *bifurcación discontinua*) es compatible con la singularidad del tensor acústico y como consecuencia se produce un cambio en el carácter matemático de la ecuación diferencial de equilibrio incremental. En problemas

²Sea Ω el dominio de análisis y \mathcal{S} una interface ($\mathcal{S} \subset \Omega$) que divide a Ω en dos subconjuntos Ω^+ y Ω^- . El operador salto a través de \mathcal{S} se define mediante: $\llbracket (\bullet) \rrbracket = (\bullet)|_{(\mathbf{x} \in \Omega^+)} - (\bullet)|_{(\mathbf{x} \in \Omega^-)}$, entendiéndose a $\mathbf{x} \in \Omega^+$ como un punto infinitamente próximo a \mathcal{S} (igual razonamiento se aplica para $\mathbf{x} \in \Omega^-$)

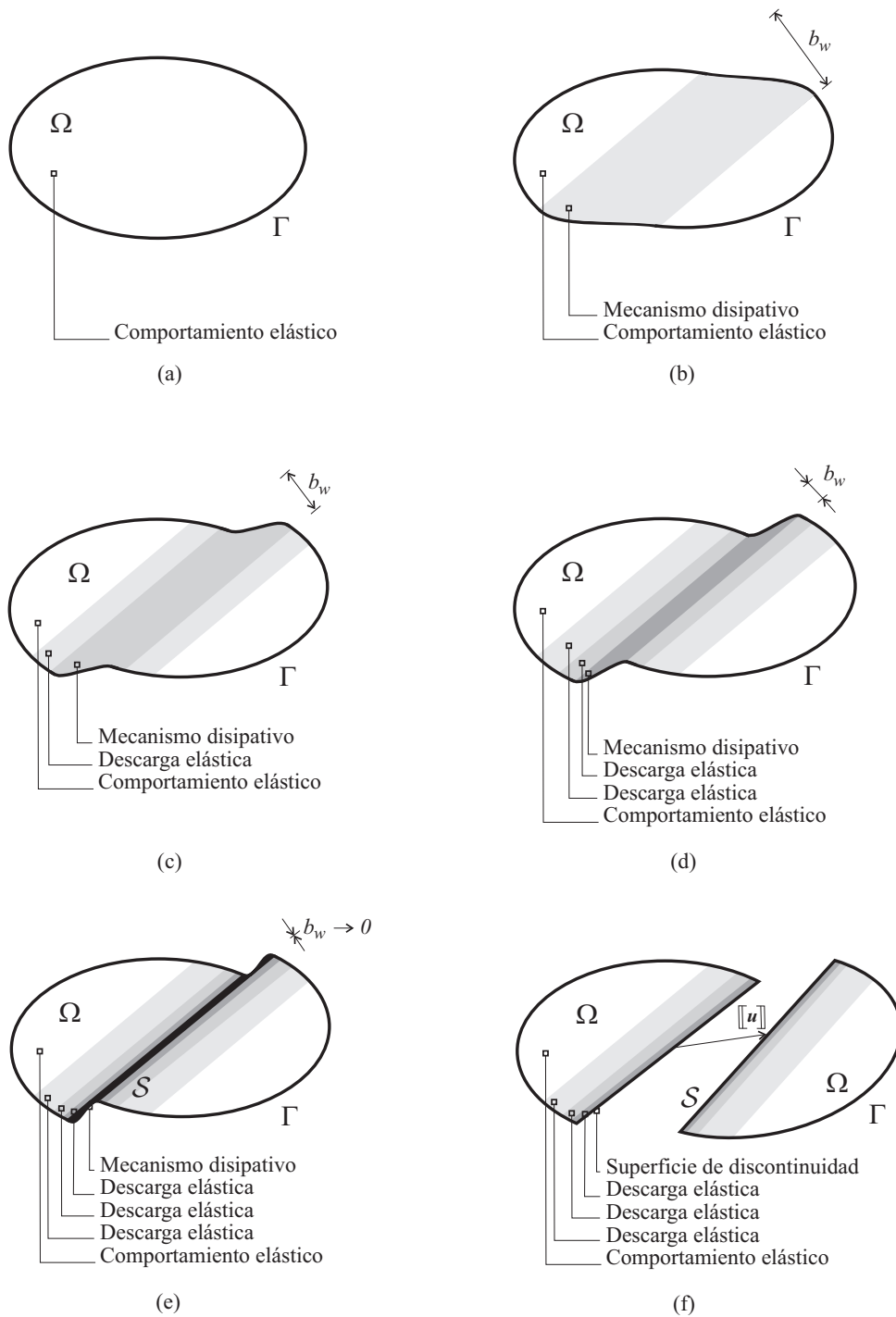


Figura 1.3: Esquema de formación de fractura en un medio inicialmente continuo: (a) Proceso elástico reversible. (b)-(c)-(d) Mecanismos disipativos y proceso de localización. (e)-(f) Desarrollo de una superficie de falla, discontinuidad o fisura.

estacionarios se pierde la elipticidad del sistema de ecuaciones que gobierna el problema para transformarse en un sistema hiperbólico. Bajo condiciones de carga dinámica sucede lo inverso. En estas circunstancias, el problema matemático queda mal planteado y propiedades altamente favorables tales como estabilidad, existencia y unicidad de solución no quedan garantizadas. En el contexto de materiales con leyes de evolución independientes de la velocidad de deformación (invíscidos), esta situación crítica puede presentarse en modelos constitutivos bajo régimen de ablandamiento o reglas de flujo no asociativas [Hil58, RR75, Ric76, OR91].

Como no existe restricción interna alguna que limite el ancho de banda de localización, la solución termodinámicamente más estable corresponde a aquella que muestra un espesor nulo (superficie de fractura) [Baz76]. La localización se produce entonces en un volumen infinitamente pequeño y, por ende, la falla material se lleva a cabo sin disipación de energía. Esta inconsistencia, subyacente en el modelo continuo estándar, se traduce al espacio discreto de aproximación por elementos finitos. En este caso, la simulación muestra una energía de fractura finita³ pero decreciente a medida que se refina la malla, dado que el espesor de la banda de localización coincide con el tamaño del elemento finito h_e , véase figura 1.4.

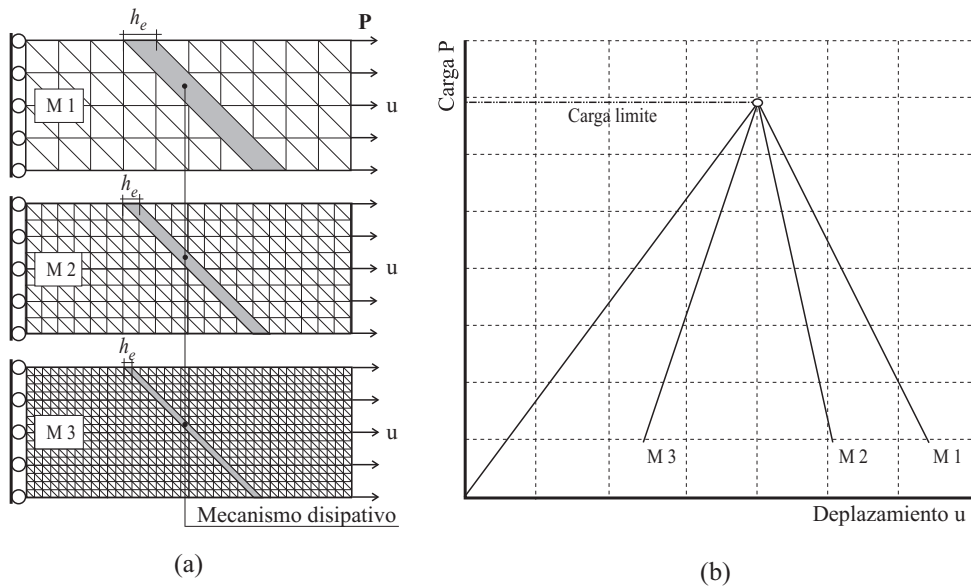


Figura 1.4: Falta de objetividad en la respuesta estructural para modelos no regularizados: (a) Niveles de discretización en función del tamaño característico del elemento h_e . (b) Curvas carga-desplazamiento evidenciando energía de fractura decreciente.

En el límite, cuando el tamaño del elemento tiende a cero, la solución numérica predice una zona de localización que colapsa en una superficie y energía de fractura nula. La aproximación continua y discreta son consistentes pero ambas carecen de significado físico. El modelo numérico además tiene implícita una restricción cinemática dependiente del tipo de interpolación utilizada. Por lo general, y para la forma más elemental de aproximación basada en desplazamiento lineal por tramos, discontinuidades en el campo

³El concepto de energía de fractura, aquí utilizado, se corresponde con la definición clásica dada en la mecánica de fractura.

de deformaciones sólo son posibles a través de las interfaces de los elementos con lo cual se obtiene una fuerte dependencia en relación a tamaño y orientación de malla.

Para remediar el comportamiento irreal que describen aquellos modelos susceptibles de presentar localización de deformaciones, durante los últimos años se han propuesto diversas metodologías de análisis. En el presente, las estrategias utilizadas para el modelado de falla pueden clasificarse desde diferentes puntos de vista, teniendo en cuenta para tal efecto la descripción cinemática (regularidad del campo de desplazamientos), el comportamiento constitutivo o bien la implementación numérica del modelo. Como puede evidenciarse, cada uno de estos tópicos están íntimamente relacionados y la formulación de un esquema de cálculo robusto deberá combinarlos en forma consistente. A continuación se propone una posible clasificación generalizada de los modelos de falla material que contempla en forma conjunta los aspectos mencionados anteriormente:

- *Mecánica de fractura clásica.*
- *Modelos del continuo clásico.*
- *Modelos del continuo enriquecido.*
- *Modelos con discontinuidades embebidas.*

Una completa y minuciosa descripción de cada modelo de aproximación escapa a los objetivos de este trabajo. Sin embargo, a manera de introducción, se presenta una breve discusión sobre los mismos. Debe tenerse en cuenta además que para ciertas situaciones particulares los límites entre cada formulación no quedan bien definidos, consecuentemente, en la literatura específica, pueden encontrarse formas alternativas de clasificación.

1.3.1. Mecánica de fractura clásica.

Las primeras aproximaciones al problema de fractura en materiales se han formulado como una extensión natural de la teoría clásica de elasticidad. En esta línea, Inglis [Ing13] estudió la concentración de tensiones en una placa infinita con un orificio de tipo elíptico simulando la presencia de una discontinuidad en el medio. Desde el punto de vista cinemático, esta estrategia considera discontinuidades en el campo de desplazamiento libres de tensión lo cual induce, necesariamente, una singularidad del campo tensional en la punta de la fisura. Por este motivo, con el paso del tiempo se han propuesto conceptos más elaborados basados en magnitudes integrales (integral-J o integral de Rice) como criterio para predecir las condiciones críticas en la cuales se produce la falla material por desarrollo de fisuras.

Este tipo de aproximación, también conocida como *Mecánica de Fractura Lineal Elástica (Linear Elastic Fracture Mechanics LEFM)*, es aplicable a situaciones en las cuales la *Zona de Proceso de Fractura (FPZ [BP98])* es despreciable con respecto a las dimensiones características del problema en estudio. En general, exceptuando casos de grandes estructuras de materiales cuasi frágiles, se hace necesario considerar en el análisis, el tamaño *finito* de la zona de proceso de fractura, al menos en la dirección de la discontinuidad, dado que gran parte de la energía se disipa de manera irreversible en dicha región, previamente al desarrollo de la discontinuidad o fisura. Este hecho pone en evidencia una desventaja intrínseca asociada a esta metodología de cálculo.

Posteriormente se generalizaron las ideas subyacentes de la *LEFM* para abordar el análisis de materiales que muestran una falla de tipo dúctil, a través de lo que se denominó la *Mecánica de Fractura No Lineal (Non-Linear Fracture Mechanics NLFM)* [KP85].

Un concepto importante para rescatar en el contexto de la *Mecánica de Fractura Clásica*, es la llamada *Energía de Fractura (G_f)*, que representa la cantidad de energía necesaria para generar una superficie de discontinuidad de área unitaria. Irwin [Irw57, Irw58] expresa este valor en términos de los *Factores de Intensidad de Tensión* y propone para el estudio de propagación los conocidos *Modos de Fractura*. En particular para el *Modo I* (modo exclusivo de apertura), se considera la energía de fractura específica $G_f = G_{ModoI}$ como una propiedad material, resultando además un parámetro extensamente utilizado para caracterizar el comportamiento constitutivo post-crítico en otros tipos de aproximaciones.

1.3.2. Modelos del continuo clásico.

Los modelos basados en la mecánica de daño continuo [Kac58, Kac86] marcaron una nueva plataforma conceptual para el estudio de la falla en materiales. Mediante la introducción de ablandamiento por deformación en las leyes constitutivas, se hizo posible modelar procesos de degradación y falla sin abandonar el marco formal matemático de la *Mecánica de Medios Continuos Clásica*. Inicialmente, esta estrategia de aproximación resultó particularmente atractiva para formulaciones numéricas, ya que tales modelos pueden implementarse en programas existentes de elementos finitos sin mayores inconvenientes, tomando ventaja de todos los desarrollos y algoritmos ya disponibles en estos códigos. Además posee la característica fundamental de considerar los dos comportamientos mecánicos, el continuo y la fractura, en un único formalismo teórico.

Desde un punto de vista físico, estos modelos consideran a los procesos disipativos responsables de la degradación como la acumulación de micro defectos o fisuras uniformemente distribuidas en una banda de tamaño finito, que en el contexto numérico del *MEF*⁴ corresponde al tamaño característico del elemento h_e . Esta idealización del fenómeno induce una descripción cinemática caracterizada por una banda de localización en la cual ciertas componentes del campo de deformaciones pueden presentar discontinuidades $[[\boldsymbol{\varepsilon}]] \neq \mathbf{0}$ (*discontinuidad débil*). Por hipótesis el campo de desplazamientos permanece continuo ($[[\boldsymbol{u}]] = \mathbf{0}$).

Con el paso del tiempo (y como se mencionó al inicio de la sección 1.3), estudios de estabilidad y bifurcación del campo tensional [Hil62, RR75, Ric76] demostraron que dichos modelos, tal y como originalmente fueron concebidos, estaban dotados de problemas subyacentes a nivel de las ecuaciones del continuo y, consecuentemente, presentan falta de objetividad en la respuesta con respecto a la discretización espacial a nivel numérico.

Para salvar estas deficiencias se han propuesto diversas estrategias. La aproximación de *Fisura Distribuida o Difusa (Smearred Crack Approach)* [Ras68] y el modelo de Banda de Fisura (Crack Band model) [BO83, RPKB85] pueden mencionarse entre éstas.

En este contexto de análisis, la filosofía consiste en regularizar el comportamiento bajo régimen de ablandamiento, utilizando para ello el concepto de *Energía de Fractura (G_f)* como un parámetro intrínseco del material⁵. El ancho de la banda de localización

⁴*MEF*: Método de Elementos Finitos.

⁵Aunque en la actualidad aún existen ciertas controversias con respecto a la evaluación experimental

b_w puede entonces estimarse de manera tal que la energía disipada en el proceso de falla sea la correcta. Una posibilidad, explorada por Bažant [Baz76], consiste en predefinir el tamaño de la malla de elementos finitos en correspondencia con dicho valor estimado de la banda de localización⁶. Como en general la trayectoria de la fisura es desconocida *a priori*, se hace necesario generar una malla de elementos que posea densidad constante en todo el dominio de análisis. Evidentemente, esta situación impone severas restricciones al modelo discreto que se traducen en un costo computacional elevado e innecesario. Una solución parcial frente a este inconveniente la aportan los modelos con bandas de ablandamiento embebidas (*Embedded Softening Band Models*) [BFE88, Slu97].

Otra estrategia de regularización, muy utilizada en la práctica, se basa en ajustar el módulo de ablandamiento H en función del tamaño característico (h_e) sólo para aquellos elementos en estado post-crítico [PM81, BO83]. La idea consiste en modificar parcialmente la relación tensión-deformación para reproducir en forma correcta la energía de fractura del material, independientemente de la densidad de discretización. En este sentido el espesor de la banda de localización deja de tener el significado conceptual de *propiedad material* para pasar a ser un parámetro dependiente del modelo numérico. Tras realizar esta modificación a nivel constitutivo, la disipación energética total y el diagrama carga-desplazamiento converge hacia un valor límite físicamente admisible⁷ a medida que se refina la malla.

Actualmente, para el modelado de materiales frágiles, se reconocen dos tipos de aproximaciones basadas en el concepto de *Fisura Distribuida*, a saber: *Fisura Fija (Fixed-Crack-Model)* y *Fisura Rotante (Rotating-Crack-Model)*.

El modelo de *Fisura Fija* [Ras68] supone que la discontinuidad se desarrolla en forma perpendicular a la dirección principal de tracción una vez superado su valor límite⁸ y que la orientación de la fisura se mantiene invariable a lo largo del análisis. Se introduce además el denominado *Factor de Retención* para el tratamiento de las tensiones de corte a través de la línea de falla [SS73]. R. de Borst et al. propusieron una generalización de este modelo original a múltiples fisuras no ortogonales [dBN85].

Los modelos de *Fisura Rotante* [CRCN80, GA84], como su nombre lo indica, consideran que la dirección de fisura puede variar en el tiempo de acuerdo a las direcciones principales de deformación, conforme evoluciona el estado de carga. El fundamento de esta estrategia es principalmente de índole numérico para mejorar el desempeño de los elementos.

Durante los últimos años, los modelos de *Fisura Distribuida* han sido ampliamente utilizados para modelar la falla en materiales frágiles. Sin embargo, como ha sido observado por Rots [Rot88] y varios otros investigadores, este tipo de formulación posee una desventaja intrínseca comúnmente denominada como bloqueo tensional (*stress locking*). Este efecto se manifiesta por una transferencia espúrea de tensiones a través de una fisura

objetiva de la *Energía de Fractura* G_f , este parámetro material es considerado como una propiedad fundamental para caracterizar el comportamiento en régimen pos-crítico de ablandamiento.

⁶Este hecho se basa en que la simulación numérica de materiales con ablandamiento demuestra que la banda de deformación típicamente localiza en una *única* franja de elementos.

⁷Para el caso más simple de tracción uniaxial este valor límite admisible se corresponde con la solución obtenida mediante un modelo de fisura discreta con la misma energía de fractura G_f

⁸Esta situación asume una superficie de falla de tipo Rankine como criterio para detectar el inicio y dirección de propagación de la fisura. Evidentemente pueden formularse criterios alternativos dependiendo del tipo de material.

completamente desarrollada. En los esquemas de *Fisura Fija* el bloqueo se debe fundamentalmente a tensiones de corte inducidas por una rotación de los ejes principales de deformación una vez generada la discontinuidad⁹. No obstante, también se han reportado soluciones espúreas en lo que respecta al estado tensional aun cuando las direcciones principales de deformación y tensión permanecen alineadas [JZ98a] (como ocurre en los modelos de *Fisura Rotante*). En este caso, el mal desempeño numérico está asociado a una pobre descripción cinemática del campo de desplazamiento alrededor de la fisura. La combinación de una formulación de *Fisura Rotante* juntamente con un modelo de daño escalar, puede resultar efectiva para reducir el mencionado efecto de bloqueo [JZ97, JZ98b].

Otro inconveniente generalmente vinculado a los modelos de daño distribuido es su sensibilidad patológica frente a la orientación de la malla de elementos finitos, que se traduce en el desarrollo de bandas preferenciales de localización (*pathological mesh-induced directional bias*).

1.3.3. Modelos del continuo enriquecido

Dado que el problema de inestabilidad material se presenta ya a nivel del continuo, la forma más natural y conceptualmente simple de solución podría consistir en modificar o redefinir el modelo evitando el cambio de carácter en las ecuaciones diferenciales de gobierno¹⁰. La idea básica es enriquecer el continuo para capturar (a nivel macroscópico) los cambios micro estructurales que se suceden en el material al estar sometido a estados críticos de tensión y lo tornan inestable. Se ha demostrado que una completa regularización del problema de localización de deformaciones puede lograrse dotando a la teoría de *Medios Continuos* de base de una adecuada generalización.

La mayoría de estos métodos están basados en la inclusión explícita de un parámetro de longitud interna l_c que toma en consideración el tamaño y separación de las heterogeneidades que controlan el ancho de localización b_w , es decir se considera ahora la configuración micro estructural material. Estas estrategias introducen términos de interacción espacial en las ecuaciones con el objeto de *regularizar* el comportamiento constitutivo limitando la localización de deformaciones a un volumen de tamaño finito [dBSMP93] y, como consecuencia directa, que la energía disipada durante el proceso de carga adquiera un valor no nulo. Los esquemas *No Locales*, de *Gradientes de Deformación*, el *Modelo Continuo Micropolar de Cosserat* y aquellas formulaciones que consideran efectos de viscosidad pueden mencionarse como las más destacadas.

En los modelos *No Locales* [BBC84, BPC88, TN95] se asume que la ecuación constitutiva no lineal en un punto queda expresada en función de la deformación media en la vecindad del punto¹¹. Este valor medio se calcula a través de integrales ponderadas restringidas a un volumen fijo. Varios investigadores han propuesto como alternativa que la no localidad quede reducida simplemente a la evolución de variables internas [PCB87, BL88].

⁹En otras palabras se sobreestima la rigidez al corte, no permitiendo una completa relajación de tensiones en el sólido cuando la fisura se encuentra completamente desarrollada.

¹⁰En este sentido se pretende regularizar el problema matemático de manera de conservar la elipticidad local, para casos cuasi estáticos.

¹¹La relación tensión deformación no satisface el principio de acción local, de allí el nombre de modelos *No Locales*.

La porción del dominio adecuada en la cual se extiende la integral se hace depender explícitamente del parámetro de longitud interna l_c . Tienen la desventaja que para su implementación se necesita modificar la estructura básica de los códigos existentes, ya que debe conocerse información del entorno de un punto para evaluar una variable no local en dicho punto.

Las formulaciones de gradientes [Aif84b, Aif84a, LB88, dBM92, dBPPS95, PdBBdV96] incorporan al modelo constitutivo términos de gradientes espaciales de alto orden de variables cinemáticas o internas, dependientes del parámetro de longitud intrínseca material. Este enriquecimiento tiene como finalidad suavizar y regularizar la evolución de los mecanismos inelásticos responsables de la degradación. Se ha verificado una analogía directa entre las formulaciones *No Locales* y los modelos de *Gradientes Implícitos* [PGdBB01, PdBBG02], para determinadas funciones de peso. De esta forma, utilizando tales esquemas implícitos se asegura el carácter no local del problema con una ventaja adicional: desde el punto de vista computacional poseen la estructura típica de modelos locales. En estas formulaciones de alto orden generalmente se requiere la resolución de una ecuación adicional a la de equilibrio estándar, la cual puede discretizarse utilizando también interpolación por elementos finitos.

No es necesario recurrir a la mecánica del continuo completamente no local para obtener modelos regularizados. En general sólo es suficiente considerar expansiones en términos de orden superior (en teoría de gradientes) o no localidad (en teorías integrales) para aquellas variables responsables de la evolución del ablandamiento, mientras que las restantes conservan su carácter local. Este tipo particular de formulación conserva consistencia termodinámica [PBF97] y es una de las más utilizadas en la actualidad.

El *Modelo Continuo Micropolar de Cosserat* fue desarrollado a principios de 1900, para problemas de elasticidad. Esta formulación, a diferencia del *Modelo Continuo Clásico*, incorpora rotaciones locales como parámetros independientes adicionales. Una consecuencia directa de esta hipótesis es la pérdida de la estructura simétrica del tensor de tensiones. En los trabajos de Mühlhaus et al. [MV87], Steinmann et al. [SW91], de Borst [dB91, dB93], Etse et al [EN98] se han propuesto generalizaciones y extensiones de esta teoría al contexto de elasto-plasticidad aplicada al análisis de localización de deformaciones.

El uso de modelos dependientes de la velocidad de deformación (*Visco-daño*, *Visco-plasticidad* [Nee88, LP90, SdBm93]), también ha sido utilizado para la obtención de soluciones regularizadas. Si bien estos esquemas no representan formalmente un enriquecimiento del continuo clásico, se los incluye en esta clasificación general por compartir algunas de sus características. En la formulación de estos modelos puede reconocerse la introducción de un parámetro de longitud interna garantizando que el problema matemático permanezca bien planteado aun bajo régimen de ablandamiento y en presencia del fenómeno de localización de deformaciones.

Las estrategias de regularización incluidas en esta sección poseen sólidos fundamentos teóricos y originan soluciones rigurosas, representan verdaderos esquemas *Limitadores de Localización* y aseguran convergencia a una solución físicamente factible conforme se refina la malla. Sin embargo como contrapartida no son capaces de representar explícitamente

discontinuidades en el campo de desplazamientos. Por lo general se necesita alta densidad de elementos en la zona de localización (que no se conoce a priori) para capturar los elevados gradientes de deformación. Típicamente el tamaño de los elementos debe ser inferior al ancho de banda de localización b_w que en la práctica es muy pequeño. A modo de ejemplo, las bandas de corte en suelos granulares tienen un tamaño de 10 a 20 veces la dimensión del grano, para metales dúctiles la superficie de deslizamiento tiene un espesor medido en micrones y las macro fisuras en hormigones son del orden del máximo tamaño del agregado inerte. La cantidad de elementos y el coste computacional luego se torna prohibitivo, aun cuando se utilicen técnicas de remallado [ABS98].

1.3.4. Modelos con discontinuidades embebidas

En vista de las limitaciones que presentan los esquemas regularizados presentados anteriormente, se han propuesto otras alternativas basadas en aspectos más prácticos desde el punto de vista ingenieril. Bajo esta categoría se engloban un conjunto numeroso de metodologías cuya característica principal consiste en que se realiza un tratamiento diferenciado en la zona donde progresa y propaga la fractura (*Fracture Process Zone*) con respecto al resto del sólido.

El fenómeno de localización de deformaciones se modela ahora explícitamente como una interface de discontinuidad en el campo de desplazamiento o deformaciones cuya evolución depende de una ecuación constitutiva discreta con ablandamiento en términos del salto relativo entre los labios de la fisura y el vector tracción \mathcal{T} normal a la misma [Dug60, Bar62]. Hillerborg y otros investigadores propusieron que esta ley discreta no lineal con degradación se relacione con el concepto de energía de fractura, y por lo tanto considerarla como una propiedad intrínseca del material [HMP76, PE92], dando origen de esta forma a un gran número de ecuaciones de tipo tracción-salto. Usualmente, la parte continua, o estable del material, se modela mediante ecuaciones constitutivas clásicas, siendo muy común el uso de elasticidad lineal para materiales frágiles. Dentro de esta categoría pueden mencionarse los denominados modelos cohesivos.

Definición 2 *se entiende por modelo discreto cohesivo al conjunto de ecuaciones que permiten definir unívocamente el comportamiento constitutivo en la interface o zona de localización, tales como: (i) criterio para detectar el instante de activación de la discontinuidad, (ii) dirección de propagación en el sólido, (iii) regla de evolución de las fuerzas cohesivas una vez desarrollada la fisura y (iv) restricciones de equilibrio entre el medio continuo y la interface.*

Esta metodología ha sido aplicada para simular fractura en materiales cuasi frágiles [EGGP02] como así también en falla dúctil [TH92].

La simulación numérica de los modelos discretos puede abordarse desde diferentes aproximaciones: método de elementos finitos (*MEF*), formulaciones de elementos de contorno (*BEM: Boundary Element Method*) [YRC98], integrales de contorno [Pet81] y métodos sin malla (*Element Free Galerkin*) [BOG00] para casos dinámicos, entre otras.

En el contexto de elementos finitos que nos ocupa, el estudio de fractura mediante modelos cohesivos ha seguido básicamente dos estrategias principales.

La primera de ellas se fundamenta en que la fisura se modela a través de las interfaces entre elementos, considerando la discontinuidad como un contorno adicional del medio.

Como en general la trayectoria o camino de fisura no es conocido a priori, se requiere una redefinición de la malla en cada paso de análisis para alinear precisamente las interfaces con la dirección correcta de propagación [Car89, BCV91]. El continuo cambio en la configuración topológica del dominio trae aparejado una serie de inconvenientes que afectan la eficiencia computacional, a saber: la generación de malla requiere de costosas técnicas de suavizado para eliminar elementos mal condicionados, la estructura de memoria para el almacenamiento de matrices y vectores globales se modifica para cada malla, la ubicación de los puntos de integración varía y en consecuencia las variables internas del paso previo deben proyectarse (mapearse) en la nueva configuración, etc. Sin embargo debe decirse que existen problemas particulares en donde la posición de la discontinuidad no es una incógnita del problema y esta estrategia de análisis puede ser de gran utilidad.

La otra alternativa mencionada consiste en enriquecer la cinemática del elemento manteniendo la discretización invariable. El uso de elementos con modos discontinuos embebidos ha representado un gran avance en el modelado de fractura, permitiendo capturar el fenómeno de localización de deformaciones de manera eficiente y a un costo computacional razonable [DnG90, DA91, LS95, KRS91]. La orientación espacial de la discontinuidad se determina en función del propio estado local de tensión con lo cual se obtiene completa independencia con respecto a la configuración de la malla. Las estrategias basadas en esta idea se han presentado bajo diversos nombres pero todas ellas están basadas en el mismo concepto: la explícita incorporación de una discontinuidad en el campo de desplazamientos (*discontinuidad fuerte*) [DnG90, KRS91, SOA93, LS95, AG96, LR96, Oli6a, Oli6b, WS01] o en el campo de deformaciones (*discontinuidad débil*) [OLN87, BFE88, SB98], en el seno del elemento finito. En Jirásek [Jir00] puede encontrarse una discusión detallada y un estudio comparativo de distintas formulaciones.

Definición 3 se entiende por “Discontinuidad Fuerte” una descripción cinemática compatible con la existencia de discontinuidades en alguna componente del campo de desplazamientos a través de una superficie (superficie de falla \mathcal{S}) y a partir de un instante de tiempo específico (t_{SD}); matemáticamente: $\exists \llbracket u(\mathbf{x}, t) \rrbracket_i \neq 0$ para $t \geq t_{SD}$. Luego, el campo de deformaciones consistente adquiere un carácter distribucional sobre \mathcal{S} .

Actualmente, siguiendo la aproximación por discontinuidades fuertes, pueden reconocerse dos familias o grupos bien diferenciados de elementos finitos. En orden cronológico primeramente se han desarrollado elementos enriquecidos con modos discontinuos (*Embedded Elements aquí denominados E-FEM*) [DnG90, DA91, LS95, Oli5a, Oli5b, AG96, Oli6b, OCM97, Oli98, RB99] formulados en el contexto del método de las deformaciones mejoradas (*Enhanced Assumed Strains EAS*) [SR90], donde el salto en desplazamientos se introduce como un modo incompatible de deformación. El enriquecimiento cinemático se representa mediante un grado de libertad interno que puede condensarse estáticamente con lo cual el sistema final de ecuaciones discretas no se ve afectado. Otro modelo recientemente introducido, denominado *X-FEM* (*eXtended Finite Element Method*) [BMUP01, WS01, MB02], se basa en la utilización de funciones de interpolación formuladas bajo el concepto de partición de la unidad. En este esquema, la magnitud del salto queda representada por grados de libertad adicionales en nodos existentes de la malla.

Modelo de discontinuidades fuertes del continuo

La aproximación por discontinuidades fuertes del continuo (*Continuum Strong Discontinuity Approach CSDA*) [SO94, Oli5a] puede considerarse como una sub categoría de los modelos con discontinuidades embebidas. Esta formulación alternativa permite establecer un vínculo estrecho entre: (i) la mecánica de medios continuos clásica (sección 1.3.2) y (ii) las estrategias que incorporan discontinuidades embebidas (como se detalló anteriormente). Si bien desde sus comienzos estas dos metodologías evolucionaron en forma disjunta, mediante la incorporación de unos pocos ingredientes conceptuales, la *CSDA* hace viable el planteamiento del problema de fractura material en un marco teórico unificado tal que, partiendo de la descripción estándar regular se llega (consistentemente) a modelar interfaces de discontinuidad y mecanismos de degradación y falla.

En este contexto de análisis, se postula que tanto la relación deformación desplazamiento como las ecuaciones constitutivas son las mismas que para los modelos continuos. Luego, dado que se asume posible la presencia de discontinuidades en el campo de desplazamiento, se debe generalizar el espacio cinemático admisible para considerar magnitudes singulares en el tensor de deformación compatible.

Otro aspecto relevante de la formulación, y que merece especial atención, es la regularización subyacente en el modelo constitutivo, condición necesaria para mantener acotado el estado tensional aun para medidas no acotadas de la deformación en la interface. Esto último se logra reinterpretando el módulo de ablandamiento H en un sentido distribucional.

Teniendo en cuenta la generalidad y buenos resultados ya documentados en relación a la resolución de problemas en mecánica de falla mediante la *CSDA*, se ha adoptado tal estrategia numérica como marco teórico para el estudio y formulación de modelos en una parte importante de esta tesis (véase en particular el capítulo 3).

1.4. Objetivos

A lo largo del presente trabajo de investigación se pretende encarar un estudio general del problema de falla en materiales, abarcando principalmente los aspectos teóricos y computacionales más relevantes. Por esta razón, en el contenido del mismo se discuten distintas estrategias numéricas de aproximación como así también la performance de diversas formulaciones de elementos finitos. El estudio no se restringe a un único tipo de material, sino por el contrario se estudian los dos comportamientos constitutivos típicos a través de las leyes más sencillas: plasticidad y daño isótropo.

Basándose en esta filosofía, el listado siguiente puede considerarse como representativo de los objetivos globales de la tesis:

- Obtener un conocimiento teórico generalizado sobre las diferentes estrategias de análisis aplicables a la mecánica de falla en materiales, reconocer ventajas y limitaciones de cada una de ellas.
- Estudio crítico de las formulaciones más reconocidas en la bibliografía con especial énfasis en aspectos algorítmicos para su implementación computacional.

- Estudio del problema de inestabilidad material y bifurcación discontinua causado por leyes de evolución dotadas de ablandamiento por deformación.
- Obtención de herramientas numéricas eficientes para la simulación computacional del proceso completo de degradación material, incluyendo en esta descripción fenómenos de localización de deformaciones, generación de mecanismos de colapso y cómputo de la carga límite asociada.

En particular, se plantean una serie de fines específicos, tendientes a la obtención de resultados y conclusiones originales a partir de estrategias existentes como así también el desarrollo, planteo matemático e implementación de nuevas estrategias numéricas. En este sentido, la línea de investigación que se presenta puede bifurcarse en dos caminos bien definidos:

(i) aplicaciones a modelos de daño para simular la degradación y propagación de fisuras en materiales cuasi-frágiles

(ii) aplicaciones a problemas de plasticidad para el modelado de bandas de deslizamiento en materiales de comportamiento dúctil.

Los objetivos asociados al primer ítem (daño) son los siguientes:

- Desarrollo e implementación de familias de modelos de daño basados en una formulación implícita de gradientes, para la simulación de fractura en hormigones.
- Implementación de elementos finitos con discontinuidades fuertes embebidas de soporte elemental (*E-FEM*) en el contexto de la *CSDA*.
- Implementación de elementos finitos con discontinuidades fuertes embebidas de soporte nodal (*X-FEM*) en el contexto de la *CSDA*.
- Aplicación de estos elementos a la resolución de casos 3D y a problemas de propagación de fisuras múltiples.
- Estudio crítico comparativo de las dos tecnologías cinemáticas *E-FEM* y *X-FEM*, abordando aspectos cruciales en la simulación computacional de falla.

Los objetivos vinculados al segundo punto (plasticidad) se presentan a continuación:

- Estudio de problemas de bloqueo por incompresibilidad en plasticidad isocórica bajo régimen de ablandamiento por deformación.
- Estudio e implementación de un esquema de estabilización para aliviar el bloqueo volumétrico en la etapa previa a la bifurcación material.
- Desarrollo, formulación e implementación de un nuevo elemento finito estabilizado y cinemáticamente mejorado basado en la aproximación por discontinuidades fuertes del continuo, para el modelado de bandas de deslizamiento.

1.5. Hipótesis

Los conceptos, desarrollos y modelos discutidos en esta tesis se fundamentan en el contexto teórico de la *Mecánica de Medios Continuos*. La aplicación de los mismos queda restringida a situaciones en las cuales se verifiquen las siguientes hipótesis básicas:

- Régimen cuasi estático e isotérmico.
- Pequeños desplazamientos, deformaciones y rotaciones.
- Material continuo, homogéneo e isótropo.
- Comportamiento material gobernado por modelos invíscidos de plasticidad y daño.
- Material susceptible de presentar inestabilidad a nivel constitutivo inducida por leyes de evolución con ablandamiento por deformación.

1.6. Contenidos

Esta tesis se ha organizado en siete capítulos más cuatro anexos. La disposición de capítulos intenta establecer la línea principal de investigación en un desarrollo lógico. Los apéndices incluyen aportes adicionales a la estructura básica del trabajo, por ende se considera de importancia el contenido de los mismos.

En un principio, el problema de falla material se aborda haciendo uso de esquemas de *Gradientes de alto orden de Deformación*. En este contexto se ha propuesto el desarrollo e implementación de una familia de leyes constitutivas de daño isótropo con teoría de gradientes y en particular se considera una formulación *implícita*, debido a su especial atractivo desde el punto de vista computacional, ver apéndice A. A partir de dicho análisis ([SSH03]) surgen algunas desventajas propias de este tipo de metodologías, también reportadas por numerosos investigadores en publicaciones recientes.

El paso siguiente ha sido investigar estrategias alternativas al problema. Con esta idea en mente se encara el estudio de modelos discretos cohesivos, dotados además de una cinemática enriquecida capaz de simular, en forma objetiva y viable computacionalmente, la falla material mediante la introducción de discontinuidades en el campo de desplazamiento. Este tipo de formulación, denominada tradicionalmente como *Aproximación por Discontinuidades Fuertes*, se ha adoptado como metodología principal frente al fenómeno de localización y fallo, tanto para materiales frágiles como dúctiles, y por tal motivo el cuerpo de la tesis se dedica a su estudio.

Con el objeto de establecer una plataforma teórica básica, en el capítulo siguiente presentamos el problema de localización de deformaciones, planteado en el contexto clásico de la mecánica de medios continuos para leyes constitutivas locales y con ablandamiento por deformación. Se pretenden abordar aquellos aspectos vinculados con la existencia de bifurcación en la solución a nivel de las ecuaciones diferenciales de gobierno. Se detallan además las expresiones constitutivas para los modelos de plasticidad y daño utilizados en

el resto de la tesis, aplicando sobre los mismos el correspondiente análisis de bifurcación discontinua.

El capítulo 3 está dedicado a introducir los conceptos e ingredientes en los cuales se fundamenta la *Aproximación por Discontinuidades Fuertes del Continuo (CSDA)*, adoptada en este trabajo como metodología particular para simular el proceso completo de degradación material. Se describe el modelo conceptual y algunos detalles de importancia relacionados con la implementación numérica del mismo. A partir de este punto, el contenido de la tesis se direcciona específicamente a estudiar aplicaciones y nuevos desarrollos en el contexto de la *CSDA*. Siguiendo esta filosofía, se ha trabajado paralelamente sobre los dos comportamientos materiales típicos: (i) modelado de fractura frágil y (ii) simulación de problemas de falla dúctil.

La implementación de elementos finitos para leyes de daño (fractura frágil) se trata extensamente en el capítulo 4. Presentamos además un exhaustivo y original estudio comparativo ([OHS, SOHS05]) entre las dos formulaciones con modos discontinuos enriquecidos, aquí denominadas *E-FEM* y *X-FEM*, que representan las tecnologías actuales potencialmente más eficaces para problemas de falla cuasi-frágil. Este análisis intenta cubrir los tópicos más relevantes en mecánica de fractura computacional, entre los cuales se mencionan: precisión en la respuesta, exactitud, robustez, convergencia, velocidad de convergencia y costo computacional. Actualmente, existe una marcada falencia en cuanto a la cuantificación de estas medidas que gobiernan la performance algorítmica, y por este motivo se dedica un capítulo completo para tal fin. En este mismo apartado, se discuten también las estrategias numéricas adicionales en la cual se sustenta la implementación computacional de la *CSDA*, como ser: algoritmo de integración temporal, trazado geométrico de discontinuidades en la malla, reglas de integración, etc. El resultado es un esquema global muy robusto.

Esto último (robustez del algoritmo global) queda incluso más en evidencia a partir de los resultados reportados en el apéndice D. Allí se extiende la aplicación de la *CSDA* realizando un análisis paramétrico de probabilidad de falla. Este trabajo forma parte de un proyecto interdisciplinario más ambicioso ([PPL+05]), aún en desarrollo, y representa una de las primeras aplicaciones de la mecánica de fractura material mediante modelos discretos cohesivos, tendiente a la estimación precisa de vulnerabilidad y determinación de índices de integridad en estructuras complejas.

En el contexto del modelado de falla dúctil por discontinuidades fuertes, el desarrollo alcanzado por la tecnología de elementos es ciertamente limitado. Especialmente en lo concerniente a elementos símplices de bajo orden, útiles para la simulación en gran escala (como por ejemplo casos de fisuración múltiple en 3D). Por este motivo, en los capítulos 5 y 6 se avanza en esta línea de investigación. De este modo, abordamos el modelado numérico de mecanismos de falla inducidos por el desarrollo de bandas corte para leyes constitutivas elasto-plásticas de tipo J_2 .

En esta clase de problemas es conocida la falta de precisión que posee la formulación irreducible en desplazamientos, en la etapa previa a la inestabilidad material, y ante la situación de cuasi incompresibilidad generada por el predominio de deformaciones plásticas desviadoras. Por ello, primeramente en el capítulo 5, se introduce un esquema mixto y estabilizado (*PGP*) como alternativa para el tratamiento de la incompresibilidad. En

particular el estudio se direcciona a evaluar la performance de esta metodología para capturar bandas de localización de deformaciones en régimen post-crítico de ablandamiento, [SSH04b, SHS04]. De este capítulo surgen dos anexos: (i) el apéndice B dedicado a brindar una justificación conceptual de la técnica de estabilización adoptada en el marco teórico de multi-escalas (sub-escalas ortogonales) y (ii) el anexo C en donde se describe la implementación de la estrategia mixta estabilizada en un entorno de cálculo distribuido, [SSH04b, SHS04].

Tras reconocer algunas limitaciones en la formulación PGP para modelar modos de colapso de manera objetiva en relación a la direccionalidad de la malla, en el capítulo 6 desarrollamos una nueva familia de elementos finitos (denominada $PGPSD$) que se basa en acoplar consistentemente dicho esquema de estabilización con una cinemática de discontinuidades fuertes embebidas de soporte local, [SSHO06, SSH04a]. Se presentan ejemplos de aplicación que muestran un desempeño satisfactorio del modelo propuesto en cuanto a la respuesta cualitativa. A su vez, desde el punto de vista cuantitativo y a manera de validación, el comportamiento numérico de la estrategia desarrollada se compara con soluciones analíticas y numéricas de referencia.

Finalmente, en el apartado 7, se resumen las conclusiones, se destacan los aportes originales y las propuestas de investigación a futuro que vislumbramos a partir del presente trabajo.

Capítulo 2

Localización de deformaciones

2.1. Introducción

Como se mencionó en el capítulo precedente, el proceso acumulativo de deformaciones en bandas de espesor reducido, fenómeno aquí denominado *Localización de Deformaciones* (*Strain Localization*), es considerado como el factor responsable (*detonante*) a partir del cual se llega a la falla estructural por degradación material y agotamiento de su resistencia.

La existencia de un modo o patrón localizado de deformación está directamente asociado a características intrínsecas de las ecuaciones de gobierno del continuo y en particular a inestabilidades a nivel constitutivo [RR75]. Para poner en evidencia el carácter material de este tipo de inestabilidad debe considerarse que, aun para un estado homogéneo de tensión (y bajo ciertas circunstancias que se discutirán a lo largo de este capítulo), pueden coexistir dos soluciones posibles, ambas compatibles con las ecuaciones que gobiernan el problema y las condiciones de contorno, a saber: (i) la *solución cuasi homogénea en deformaciones* que representa un mapeo directo entre los espacios duales tensión-deformación; (ii) la *solución localizada*, que se caracteriza por la presencia de una región sometida a deformación homogénea asociada a estados tensionales de descarga elástica y otra porción del dominio con deformaciones altamente localizadas y evolución de mecanismos inelásticos. Se concluye de esta forma que existe una *bifurcación en la solución* causada por la descripción macroscópica constitutiva del material. En especial, los modelos locales con ablandamiento por deformación o bien con potenciales no asociativos, son particularmente susceptibles de presentar este tipo de inestabilidad [OR91]. El instante de tiempo para el cual la solución puede no ser única se denominará de aquí en adelante tiempo de bifurcación $t_B \in [0, T]$

Algunas aproximaciones al problema de falla redefinen (enriquecen o generalizan) el modelo continuo estándar para evitar bifurcaciones en la respuesta independientemente del comportamiento constitutivo supuesto, (véase sección 1.3.3); de esta forma el problema matemático permanece siempre bien formulado (en cuanto a unicidad de solución) y las bandas de localización propagan naturalmente a partir de la evolución de ciertas variables regularizadas definidas para ese modelo. En el apéndice A se ha avanzado en esta línea de análisis. Allí se presenta la formulación matemática, implementación computacional y validación numérica de un modelo de daño formulado según la teoría de *Gradientes de Deformación*.

Por el contrario, en aquellos modelos basados en la *Mecánica Local de Medios Con-*

tinuos, el análisis de *bifurcación material* representa uno de los criterios más utilizados para detectar el instante de inicio y dirección de propagación de discontinuidades en el sólido, de allí la importancia de su estudio.

En este capítulo, se presenta como objetivo general el planteo formal matemático del problema de localización de deformaciones a través del análisis clásico de *Bifurcación Discontinua*. El estudio se restringe a deformaciones infinitesimales, para modelos locales, independientes de la velocidad de deformación y en régimen cuasi estático de carga [ROP91, RR80]. En particular se obtendrán las condiciones críticas bajo las cuales las leyes de evolución constitutivas predicen la pérdida de elipticidad y por ende falta de unicidad de la solución a nivel del modelo continuo.

Inicialmente, sección 2.2, se define parte de la nomenclatura básica que se utilizará en el resto de la tesis. En la sección 2.3 se introducen los conceptos clásicos de bifurcación material, detallando su análisis. Seguidamente, apartados 2.4, 2.5 y 2.6, se discuten las ecuaciones básicas de tres modelos constitutivos: plasticidad J_2 , daño escalar estándar, y daño sólo tracción, que sirven como fundamento para desarrollos posteriores. Por último, en la sección 2.7, mencionamos una estrategia que permite obtener soluciones simples al problema de bifurcación material para una amplia gama de leyes constitutivas, el mismo se basa en una interpretación geométrica del estado tensional en el momento incipiente a la singularidad del tensor de localización.

2.2. Nomenclatura básica

Considérese la existencia una configuración de referencia Ω asociada al sólido en estudio. Más específicamente, $\Omega \subset \mathbb{R}^{ndim}$ es un conjunto abierto y acotado con frontera suave Γ , siendo $ndim$ la dimension del espacio. Dado que el presente estudio se restringe al contexto de geometría lineal, es válida la siguiente aproximación: $\Omega \approx \Omega_{(t)}$, donde $\Omega_{(t)}$ es la configuración deformada al instante t . Por este motivo y apelando a cuestiones de simplicidad en la escritura, sólo se utilizará la simbología Ω en todos los desarrollos siguientes. La posición de un punto arbitrario \mathbf{x} ($\mathbf{x} \in \Omega$) queda representado por el vector¹ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{ndim}$, véase Figura 2.1, para el cual se pueden definir funciones o campos tensoriales que brindan información referente al estado mecánico del material. Considérese además un intervalo de tiempo² $[0, T] \in \mathbb{R}_0^+$.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, la función campo de desplazamientos ($\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$) y campo de velocidades³ ($\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$), para una partícula material $\mathbf{x} \in \Omega$ y al tiempo $t \in [0, T]$, pueden conceptualmente pensarse de la forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim} \quad (2.1)$$

¹Nótese que utiliza la misma simbología para denotar un punto material \mathbf{x} en la configuración de referencia ($\mathbf{x} \in \Omega$) y su vector posición \mathbf{x} en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{ndim} ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{ndim}$). Se adopta este criterio debido a la dualidad que existe entre el punto material y su vector posición, con la intención de simplificar la notación.

²Dado que el estudio se restringe a modelos cuasi estáticos invíscidos, la variable tiempo “ t ” deberá considerarse sólo como un parámetro auxiliar para el planteo tradicional “*en tasas*” de las ecuaciones constitutivas.

³Se considera $\dot{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} |_{\mathbf{x}=cte}$, donde $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ es cualquier campo tensorial.

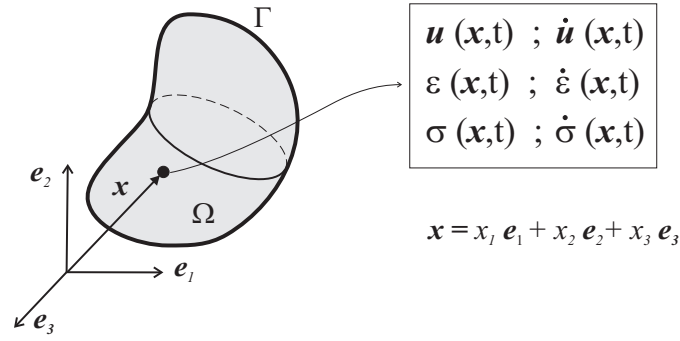


Figura 2.1: Configuración de referencia. Conjunto de variables mecánicas y cinemáticas asociadas a un punto material \mathbf{x} .

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim} \quad (2.2)$$

El tensor de deformaciones infinitesimales (y su tasa), compatible con el campo de desplazamientos (2.1), se escribe entonces:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^{(2)sym} \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \mathbf{u})^{sym} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] = \frac{1}{2}[\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}] \quad (2.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \frac{1}{2}[\nabla \dot{\mathbf{u}} + (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T] = \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}] \quad (2.5)$$

donde \otimes simboliza un producto tensorial (externo), $\mathbb{T}^{(2)}$ y $\mathbb{T}^{(2)sym}$ representan el espacio de tensores de segundo orden y tensores simétricos de segundo orden respectivamente, los cuales están dotados de producto interno⁴:

$$\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} = \xi_{ij} \xi_{ij} \quad ; \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{T}^{(2)} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} &> 0 \quad ; \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} &= 0 \quad ; \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.7)$$

y norma euclídea asociada:

$$\|\boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}} \quad ; \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{T}^{(2)} \quad (2.8)$$

además en 2.4-2.5 se ha considerado que el operador $(\bullet)^{sym}$ implica parte simétrica del argumento (\bullet) , y $(\bullet)^T$ transpuesta de (\bullet) , ambos definidos sobre $\mathbb{T}^{(2)}$.

⁴En aquellas expresiones tensoriales con subíndices i, j, \dots , si no se especifica lo contrario, se asume notación indicial o de Einstein.

El tensor de tensiones de Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^{(2)sym} \quad (2.9)$$

para el caso de leyes constitutivas locales e independientes de la velocidad de deformación, puede obtenerse a partir de la relación incremental:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) &= \mathfrak{R}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\ &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \\ &= C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \end{aligned} \quad (2.10)$$

relativo a una base ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}$ de \mathbb{R}^{ndim} , donde \mathbf{C} es el tensor constitutivo tangente de cuarto orden ($\mathbf{C} \in \mathbb{T}^{(4)}$) también denominado operador tangente incremental, en general no simétrico y, para nuestro propósito, independiente de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, como se deduce de 2.10. A su vez, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)$ y $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)$ representan la tasa del tensor de deformaciones y tensiones respectivamente:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^{(2)sym} \quad (2.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^{(2)sym} \quad (2.12)$$

2.3. Bifurcación material

2.3.1. Ecuaciones de compatibilidad cinemática

Sea un campo vectorial arbitrario $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ continuo sobre el dominio Ω , pero cuyas derivadas primeras pueden presentar discontinuidades a través de una superficie \mathcal{S} ($\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ posee continuidad $C^0 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$) que divide a Ω en dos conjuntos disjuntos Ω^+ y Ω^- ($\Omega^+ \subset \Omega$; $\Omega^- \subset \Omega$ tal que $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \mathcal{S}$ y $\Omega \setminus \mathcal{S} = \Omega^+ \cup \Omega^-$), ver figura 2.2.

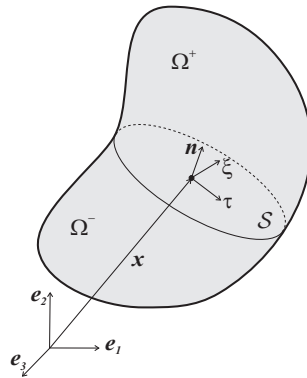


Figura 2.2: Dominio material Ω subdividido por la superficie \mathcal{S} a través de la cual un campo arbitrario puede presentar discontinuidades en sus derivadas.

Sobre cada punto $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ se considera un sistema cartesiano ortonormal con base $\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}\}$ de \mathbb{R}^{ndim} , véase figura 2.2. En particular, \mathbf{n} es ortogonal a \mathcal{S} en \mathbf{x} mientras que

$\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\xi}$ están contenidos en un plano imaginario tangente a \mathcal{S} en \boldsymbol{x} . Nótese que la definición de Ω^+ está asociada a la dirección positiva del vector \boldsymbol{n} .

Debido a la continuidad del campo $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t)$ en Ω , su derivada direccional respecto a los vectores $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\xi}$ deberá ser uniforme, en consecuencia se puede escribir:

$$\begin{aligned} \llbracket \partial_{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{a} \rrbracket &= \llbracket \nabla \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \rrbracket = \llbracket (\boldsymbol{a} \otimes \nabla) \cdot \boldsymbol{\tau} \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \\ \llbracket \partial_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{a} \rrbracket &= \llbracket \nabla \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\xi} \rrbracket = \llbracket (\boldsymbol{a} \otimes \nabla) \cdot \boldsymbol{\xi} \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

en donde se ha definido el operador salto o discontinuidad de la siguiente forma:

$$\llbracket (\bullet) \rrbracket = (\bullet)|_{(\boldsymbol{x} \in \Omega^+)} - (\bullet)|_{(\boldsymbol{x} \in \Omega^-)} \quad (2.14)$$

siendo $\partial_{\boldsymbol{\tau}}(\bullet)$ (ó $\partial_{\boldsymbol{\xi}}(\bullet)$) la derivada direccional de (\bullet) en dirección $\boldsymbol{\tau}$ (ó $\boldsymbol{\xi}$), y en general:

$$\partial_{\boldsymbol{p}}(\bullet) = \nabla(\bullet) \cdot \boldsymbol{p} \quad ; \quad \forall \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{ndim} \quad (2.15)$$

Observación 1 con la simbología $\boldsymbol{x} \in \Omega^+$ hacemos referencia a un punto material \boldsymbol{x} perteneciente al dominio Ω^+ infinitamente próximo a \mathcal{S} . Igual razonamiento se aplica a la nomenclatura $\boldsymbol{x} \in \Omega^-$.

De 2.13 se desprende que el salto del gradiente de $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t)$ sólo podrá tener componentes en la dirección normal al plano de discontinuidad:

$$\llbracket \nabla \boldsymbol{a} \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket \cdot \boldsymbol{\tau} + \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket \cdot \boldsymbol{\xi} + \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket \cdot \boldsymbol{n} \quad (2.16)$$

$$\llbracket \nabla \boldsymbol{a} \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{n} \quad (2.17)$$

donde $\boldsymbol{\beta}$ es un vector definiendo la dirección y magnitud del salto del gradiente.

Considerando ahora que el campo funcional arbitrario supuesto $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t)$ representa el desplazamiento del punto \boldsymbol{x} ($\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$), el salto en tasa de deformaciones compatible, de acuerdo a 2.5, podrá expresarse:

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket = \llbracket \nabla \dot{\boldsymbol{u}} \rrbracket^{sym} = (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{n})^{sym} = \frac{1}{2} [(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{n} \otimes \dot{\boldsymbol{\beta}})] \quad (2.18)$$

la cual se conoce clásicamente como ecuación de compatibilidad o restricción cinemática de *Maxwell*.

En términos de la expresión 2.14, otra forma de interpretar 2.18 es la siguiente:

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^+}}_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}|_{(\boldsymbol{x} \in \Omega^+)}} - \underbrace{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-}}_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}|_{(\boldsymbol{x} \in \Omega^-)}} \quad (2.19)$$

con $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^+}$ y $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-}$ representando la tasa de deformación a un lado y otro de la interface de discontinuidad respectivamente, luego de 2.19 y 2.18 se deduce que el tensor tasa de deformación medido muy próximo a \mathcal{S} se expresa:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^+} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-}}_{(\nabla \dot{\boldsymbol{u}})^{sym}} + \underbrace{(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{n})^{sym}}_{[\nabla \dot{\boldsymbol{u}}]^{sym}} \quad (2.20)$$

2.3.2. Condiciones de bifurcación

Se pretende en esta sección investigar las razones específicas por la cual la descripción constitutiva macroscópica induce una bifurcación en la respuesta material. Este estudio corresponde a la teoría general de localización de deformaciones tratada extensamente por numerosos investigadores en los últimos años [RR75, Ric76, OR91].

El problema en cuestión puede plantearse de la siguiente forma: dado un material sujeto a un estado (tasa) de tensión homogéneo en Ω para el instante de tiempo t , encontrar las condiciones críticas necesarias para que la tasa de deformación $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, en un principio también homogénea, se torne repentinamente no uniforme a través de una superficie \mathcal{S} , mientras que en el resto del sólido ($\Omega \setminus \mathcal{S}$) permanece uniforme, véase figura 2.2. Esta es precisamente la hipótesis introducida en [RR75, Ric76] donde es admisible una discontinuidad en $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ mientras que el campo de velocidad $\dot{\boldsymbol{u}}$ conserva su regularidad (*discontinuidad débil*).

Para formular matemáticamente el problema se deben considerar las condiciones de compatibilidad cinemática discutidas en la sección previa juntamente con la ecuación de equilibrio a través de la banda de localización que establece la continuidad de (la tasa de) tracciones en el instante inminente de la bifurcación t_B . En consecuencia, la inestabilidad material tendrá lugar en un punto $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ para $t = t_B \in [0, T]$ si existe algún vector $\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{0}$ tal que se verifique simultáneamente:

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rrbracket = (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{n})^{sym} \rightarrow \text{restricción cinemática} \quad (2.21)$$

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{T}} \rrbracket = \llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket \cdot \boldsymbol{n} = \mathbf{0} \rightarrow \text{restricción de equilibrio} \quad (2.22)$$

donde se ha definido además el vector tasa de tracciones $\dot{\boldsymbol{T}}$ mediante:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_{\Omega^+} = (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+}) \cdot \boldsymbol{n} \quad (2.23)$$

$$\dot{\boldsymbol{T}}_{\Omega^-} = (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-}) \cdot \boldsymbol{n} \quad (2.24)$$

y por extensión directa:

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{T}} \rrbracket = \dot{\boldsymbol{T}}_{\Omega^+} - \dot{\boldsymbol{T}}_{\Omega^-} = \underbrace{(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-})}_{\llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket} \cdot \boldsymbol{n} \quad (2.25)$$

Si se asume un comportamiento incrementalmente lineal del material (excluyendo la dependencia temporal o viscosidad), la tasa de tensión puede expresarse en términos de la tasa de deformación a través de una relación constitutiva como aquella dada en la ecuación 2.10. La restricción de equilibrio 2.22, se puede entonces reescribir convenientemente de la forma:

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{T}} \rrbracket = \llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket \cdot \boldsymbol{n} = \underbrace{(\boldsymbol{C}_{\Omega^+} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Omega^+})}_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+}} - \underbrace{(\boldsymbol{C}_{\Omega^-} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Omega^-})}_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-}} \cdot \boldsymbol{n} = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

A partir de la ecuación anterior surgen dos situaciones factibles, dependiendo del comportamiento constitutivo a cada lado de la interface \mathcal{S} . En Rice et al. [RR80] se

propone una distinción entre bifurcación continua y discontinua de acuerdo al siguiente criterio:

- *Bifurcación continua*: Comportamiento inelástico de carga tanto en Ω^+ como en Ω^- , esto implica: $\mathbf{C}_{\Omega^+} = \mathbf{C}_{\Omega^-}$
- *Bifurcación discontinua*: Comportamiento inelástico de carga en (por ejemplo) Ω^+ y comportamiento elástico de descarga (o carga neutra) en Ω^- , es decir: $\mathbf{C}_{\Omega^+} \neq \mathbf{C}_{\Omega^-}$

Bifurcación continua

Esta situación particular representa el primer modo probable de bifurcación donde se asume que todo punto material permanece en régimen de carga inelástica, verificándose en consecuencia $\mathbf{C}_{\Omega^+} = \mathbf{C}_{\Omega^-} = \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$, luego se puede expresar:

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-} = \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} : \underbrace{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^+} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-})}_{[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]} \quad (2.27)$$

Dado que $\llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket \in \mathbb{T}^{(2)sym}$ y $\llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket \in \mathbb{T}^{(2)sym}$, luego $\mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ posee al menos simetría menor⁵ en el espacio de tensores de cuarto orden $\mathbb{T}^{(4)}$, es decir:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{ijlk} \\ C_{ijkl} &= C_{jikl} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Introduciendo 2.27 en la ecuación de equilibrio de tracciones 2.26, teniendo en cuenta 2.18 y 2.28, surge naturalmente la igualdad siguiente:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

o bien:

$$\mathbf{Q}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{n}) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

donde $\mathbf{Q}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{n}) \in \mathbb{T}^{(2)}$ es el tensor de localización valuado en un punto $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}$ infinitamente próximo a \mathcal{S} , y se define como:

$$\mathbf{Q}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{R}^{ndim} \quad (2.31)$$

Para que existan soluciones no triviales ($\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{0}$) del sistema de ecuaciones 2.30, se requiere que el tensor de localización resulte singular:

$$\det(\mathbf{Q}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{n})) = \det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (2.32)$$

para al menos una dirección no trivial \mathbf{n} , es decir la condición de bifurcación está asociada con las propiedades espectrales de $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$.

La ecuación 2.32 debe interpretarse como condición *necesaria* para que en un punto material $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}$ (que tiende a \mathcal{S}) el campo tasa de deformación pueda resultar discontinuo ($\llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket \neq \mathbf{0}$ lo que implica $\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{0}$) a través de la superficie \mathcal{S} cuya normal es \mathbf{n} . Debe

⁵La simetría mayor de un tensor constitutivo \mathbf{C} definida mediante: $C_{ijkl} = C_{klij}$ está directamente relacionada con la asociatividad del potencial inelástico.

destacarse sin embargo que la singularidad de $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ no representa una condición *suficiente* para que se desarrolle un modo global de bifurcación material, ya que las condiciones de sustentación o de borde pueden evitar este fenómeno.

Bifurcación discontinua

Otro posible modo de bifurcación se corresponde con un comportamiento diferente del material a ambos lados de \mathcal{S} . Esta pérdida de continuidad en la respuesta constitutiva se debe a que, por ejemplo, el material en Ω^- no permanece en régimen de carga inelástica, de hecho se asume que descarga en forma elástica (o carga neutra). La bifurcación discontinua se caracteriza entonces mediante una desigualdad de la forma $\mathbf{C}_{\Omega^+} \neq \mathbf{C}_{\Omega^-}$, en consecuencia puede escribirse:

$$\begin{aligned} \llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket &= \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-} = \mathbf{C}_{\Omega^+} : \left(\overbrace{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} + \llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^+}} \right) - \mathbf{C}_{\Omega^-} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} \\ &= \mathbf{C}_{\Omega^+} : \left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} + (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym} \right) - \mathbf{C}_{\Omega^-} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde además $\mathbf{C}_{\Omega^-} \equiv \mathbf{C}_{\Omega^-}^e$, siendo $\mathbf{C}_{\Omega^-}^e$ el tensor constitutivo elástico valuado en $\mathbf{x} \in \Omega^-$.

Introduciendo 2.33 en la condición de equilibrio de tracciones 2.26 se tiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{C}_{\Omega^+} - \mathbf{C}_{\Omega^-}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_{\Omega^+} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{C} \rrbracket : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.34)$$

y luego:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{Q}_{\Omega^+}^{-1} \cdot \{ \mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{C} \rrbracket : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} \} \quad (2.35)$$

para lo cual se ha definido $\llbracket \mathbf{C} \rrbracket = \mathbf{C}_{\Omega^+} - \mathbf{C}_{\Omega^-}$ como el salto de cada componente del tensor constitutivo a ambos lados de la discontinuidad.

Las condiciones necesarias para la aparición un modo de bifurcación discontinuo han sido extensamente investigadas en los últimos años, véase por ejemplo los trabajos publicados de Rice & Rudnicki 1980 [RR80] y Ottosen & Runesson 1991 [OR91], entre otros. A partir de estos estudios se extraen conclusiones importantes. Tal vez la más trascendente es que el modo continuo puede considerarse como una situación límite (y de hecho la más desfavorable) de bifurcación discontinua. En vista de este resultado la bifurcación en régimen de carga plástica-carga plástica ocurre antes que la situación carga plástica-descarga elástica, luego la singularidad del tensor $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ (ecuación 2.32), también conocida como condición de localización o criterio de localización de Rice, será finalmente la condición crítica a verificar para detectar bifurcaciones en la respuesta material.

Como referencia a futuro, a continuación se introducen las ecuaciones básicas de los modelos constitutivos que se utilizarán en los capítulos más avanzados: (i) plasticidad J_2 estándar, (ii) daño escalar isótropo y (iii) una versión particular de la ley de daño tal que la degradación se produce sólo bajo tensiones de tracción. Luego se presenta la estrategia numérica que utilizamos en este trabajo para el correspondiente estudio de localización de deformaciones formulada en el contexto clásico del análisis de *Bifurcación Material*.

2.4. Modelo de plasticidad J_2

En esta sección, se resumen las ecuaciones que conforman el modelo constitutivo isotropo de plasticidad de Von Mises (J_2) independiente de la velocidad de deformación y con especial énfasis en su formato asociativo, véase Simo & Hughes [SH98], Runesson [Run98]. Los fundamentos físicos, conceptuales y termodinámicos del presente modelo pueden consultarse en la bibliografía clásica [Hil50, Lub90, LC90] donde se trata el tema en mayor profundidad.

2.4.1. Ecuaciones básicas

En primera instancia, se asume como es común en el contexto de pequeñas deformaciones, la descomposición aditiva del tensor de deformaciones totales:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}, t) \quad (2.36)$$

el cual está compuesto por una parte elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ (reversible) y una plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ (no reversible).

La respuesta elástica del modelo puede obtenerse a partir de la definición de un potencial de densidad de energía libre ψ , también conocido como potencial de Helmholtz:

$$\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \alpha) = \psi^e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(\alpha) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \frac{1}{2} \alpha H \alpha \quad (2.37)$$

donde ψ^e representa la componente reversible de la energía total expresada como una función cuadrática de las deformaciones elásticas⁶ y ψ^p aquella fracción irreversible dependiente de variables internas α , definidas para el modelo.

El tensor de tensiones puede considerarse como una variable termodinámicamente conjugada a la deformación elástica a través del potencial ψ , con lo cual queda establecida una relación constitutiva (y su forma incremental) válida durante el régimen elástico del material:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.38)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (2.39)$$

donde \mathbf{C}^e representa el tensor elástico isotropo de cuarto orden:

$$\mathbf{C}^e = \lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{II} \quad (2.40)$$

definido en términos de las constantes de Lamé, λ y μ , del tensor identidad de segundo orden $\mathbb{I} = \delta_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ y del tensor identidad simétrico de cuarto orden $\mathbb{II} = \frac{1}{2} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$. Nótese que δ_{ij} simboliza el operador de Kronecker tal que: $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Como se deduce de 2.40, \mathbf{C}^e es definido positivo y presenta simetría mayor y menor.

⁶Esta forma cuadrática del potencial ψ^e , el cual puede entenderse como la energía de deformación almacenada en el seno del material, responde al contexto teórico de los modelos *Hiperelásticos*.

Para el caso del modelo isótropo en estudio, la función escalar de fluencia ϕ , formulada en el espacio de tensiones, se expresa como función del propio estado tensional $\boldsymbol{\sigma}$ y de una única variable interna escalar tipo tensión q :

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - (\sigma_y - q) \leq 0 \quad (2.41)$$

siendo $J_2 = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{S} : \mathbf{S})}$ una medida del tensor desviador de tensiones \mathbf{S} ($= dev(\boldsymbol{\sigma})$) y σ_y la tensión umbral de fluencia del material que restringe el espacio admisible de variación de q de acuerdo a:

$$q \in (-\infty, \sigma_y] \quad (2.42)$$

La introducción de variables internas en el modelo implica la necesidad de regular su evolución conforme algún criterio específico dependiente del tipo de material. En este sentido se plantea:

$$\dot{q} = -H(\alpha) \dot{\alpha} \rightarrow \text{Ley de endurecimiento/ablandamiento} \quad (2.43)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \gamma \mathbf{M} \rightarrow \text{Regla de flujo} \quad (2.44)$$

$$\dot{\alpha} = \gamma N \quad (2.45)$$

teniendo en cuenta las siguientes definiciones: γ es el multiplicador plástico que define la magnitud de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ y \mathbf{M} es un tensor gobernando su dirección de evolución, α simboliza una variable interna tipo deformación que representa la deformación plástica equivalente acumulada, $N \geq 0$ es simplemente un factor de proporcionalidad entre $\dot{\alpha}$ y γ , por último $H(\alpha)$ es el módulo de endurecimiento/ablandamiento del material.

En el caso particular de plasticidad asociativa que nos ocupa, \mathbf{M} y N pueden escribirse de la forma:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}, q) = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} \quad (2.46)$$

$$N(\boldsymbol{\sigma}, q) = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial q} = 1 \quad (2.47)$$

La ecuación 2.46 indica que la dirección de evolución de la deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ es normal a la superficie de fluencia en el espacio de tensiones.

La particularidad esencial que caracteriza el proceso disipativo de flujo plástico es la irreversibilidad del mismo. Esta noción se traduce a nivel matemático mediante las condiciones de carga y descarga. De esta manera, y para que el modelo constitutivo quede completamente definido, se introducen a continuación las condiciones complementarias y la restricción de consistencia o persistencia plástica:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0 \quad ; \quad \gamma \geq 0 \quad ; \quad \gamma \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (2.48)$$

$$\gamma \dot{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (2.49)$$

En el caso de carga plástica, el valor numérico del multiplicador $\gamma > 0$ puede obtenerse a partir de la ecuación de consistencia 2.49 ($\dot{\phi} = 0$):

$$\gamma = \frac{\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M} + \mathbf{N} \mathbf{H} \mathbf{N}} \quad (2.50)$$

2.4.2. Tensor Constitutivo Incremental

Sustituyendo 2.50 en la relación elástica incremental 2.39, teniendo en cuenta además la definición de regla de flujo 2.44, se obtiene la expresión del tensor elasto-plástico tangente \mathbf{C}^{ep} de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \\ &= \left(\mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e : \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} : \mathbf{C}^e}{\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M} + \mathbf{N} \mathbf{H} \mathbf{N}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde:

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e : \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} : \mathbf{C}^e}{\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M} + \mathbf{N} \mathbf{H} \mathbf{N}} \quad (2.52)$$

Para el caso de descarga elástica o carga neutra ($\gamma = 0$), la ley constitutiva incremental se expresa directamente como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.53)$$

Luego, considerando entonces las dos posibilidades mencionadas, puede escribirse una relación incremental general del tipo:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad ; \quad \mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{C}^e & \text{si } \gamma = 0 \quad (\text{descarga elástica o carga neutra}) \\ \mathbf{C}^{ep} & \text{si } \gamma > 0 \quad (\text{carga plástica}) \end{cases} \quad (2.54)$$

2.5. Modelo de daño escalar

Se introducen a continuación las ecuaciones básicas que definen la ley de daño continuo utilizada en este trabajo. La misma pertenece a una familia de modelos simples de degradación isótropa como el presentado por Simo et al. [SJ87] y Oliver et al. [OCOL]. Aspectos físicos y termodinámicos de estos modelos pueden consultarse en Lemaitre & Chaboche [LC90].

2.5.1. Ecuaciones básicas

La degradación elástica isótropa puede formularse mediante la introducción de una única variable escalar, también denominada variable de daño $d \in [0, 1]$ [Kac86]. En este contexto, $d = 0$ implica que las propiedades elásticas no han sufrido degradación alguna (material indemne), mientras que $d = 1$ caracteriza la pérdida completa de integridad material.

Una opción posible para definir la función densidad de energía libre de Helmholtz, contemplando la posibilidad de degradación isotrópica, es la siguiente:

$$\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, d) = (1 - d) \overbrace{\frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon})}^{\psi^e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})} \quad ; \quad d \in [0, 1] \quad (2.55)$$

donde ψ^e representa la energía de deformación elástica almacenada en el material no degradado.

La variable de daño puede a su vez definirse en términos de una variable interna tipo deformación r :

$$d(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (2.56)$$

siendo q una variable tipo tensión termodinámicamente conjugada a r . Se asume que antes de la aplicación de las cargas el material está intacto, es decir no degradado, cumpliéndose necesariamente $d = 0$. Luego, según la definición previa (2.56), los valores iniciales de $r_0 = r|_{(t=0)}$ y $q_0 = q|_{(t=0)}$ deben ser coincidentes. Considérese además que dicho valor inicial es una propiedad intrínseca del material:

$$r_0 = q_0 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}} \quad (2.57)$$

dependiente de la tensión última uniaxial σ_y y el módulo de elasticidad longitudinal E .

La expresión 2.55 permite derivar una relación tensión deformación (y su variante incremental) de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - d(r)) \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.58)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d(r)) \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{d}(r) \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.59)$$

Otra alternativa para escribir la relación constitutiva 2.58 es introduciendo el concepto de tensión efectiva $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.60)$$

donde se advierte que la variable de daño d , relaciona el estado tensional real del sólido $\boldsymbol{\sigma}$ con un estado de tensión ficticio asociado al material no degradado $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$.

La ley de evolución para la variable interna tipo deformación r simplemente puede plantearse:

$$\dot{r} = \gamma \quad (2.61)$$

con $r \in [r_0, \infty)$ y donde γ representa, en este contexto, el multiplicador o parámetro de consistencia de daño.

La función criterio de degradación $\phi(\boldsymbol{\sigma}, q)$ se plantea de la forma:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = \tau_{\boldsymbol{\sigma}} - q \leq 0 \quad (2.62)$$

donde τ_{σ} representa cierta medida del tensor de tensiones ($\tau_{\sigma} \geq 0 \wedge \tau_{\sigma} = 0 \Leftrightarrow \sigma = \mathbf{0}$), que, en nuestro caso particular, se define en términos de una métrica asociada al tensor de elasticidad inverso:

$$\tau_{\sigma} = \|\sigma\|_{C^{e-1}} = \sqrt{\sigma : C^{e-1} : \sigma} \quad (2.63)$$

notando además que:

$$\tau_{\sigma} = (1-d) \|\bar{\sigma}\|_{C^{e-1}} = (1-d) \sqrt{\bar{\sigma} : C^{e-1} : \bar{\sigma}} = (1-d) \tau_{\bar{\sigma}} \quad (2.64)$$

$$= (1-d) \|\varepsilon\|_{C^e} = (1-d) \sqrt{\varepsilon : C^e : \varepsilon} = (1-d) \tau_{\varepsilon} \quad (2.65)$$

En otras palabras, este modelo permite establecer un criterio de degradación que puede formularse indistintamente en el espacio de tensiones o deformaciones [SJ87]:

$$\phi(\sigma, q) = \tau_{\sigma} - q \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(\varepsilon, r) = \tau_{\varepsilon} - r \leq 0 \quad (2.66)$$

La evolución de la variable interna tipo tensión $q(r)$, desde su valor inicial $q_0 = r_0 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}}$, queda regulada mediante la ley:

$$\dot{q} = H(r)\dot{r} \quad ; \quad q \in [0, q_0] \quad (2.67)$$

siendo $H(r)$ el módulo de endurecimiento/ablandamiento del continuo, que representa la pendiente de la curva en coordenadas $r - q(r)$, es decir, $H(r) = q(r)' = \frac{dq(r)}{dr}$.

En este sentido, definimos dos familias de leyes de ablandamiento por deformación que se utilizarán a lo largo de esta tesis (véase figura 2.3):

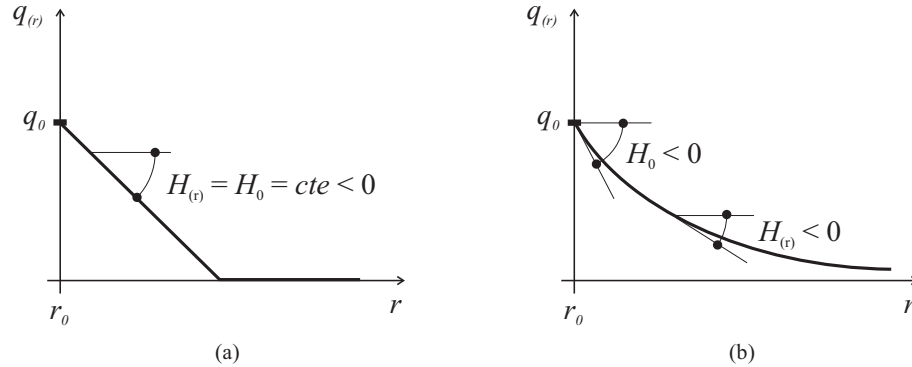


Figura 2.3: Leyes de ablandamiento para el modelo de daño escalar representadas en el espacio de variables internas ($r - q$): (a) Lineal. (b) Exponencial.

$$H(r) = \frac{dq(r)}{dr} = H_0 = \text{cte} < 0 \quad \rightarrow \text{Ley de ablandamiento lineal} \quad (2.68)$$

$$H(r) = \frac{dq(r)}{dr} = H_0 e^{\frac{H_0(r-r_0)}{q_0}} < 0 \quad \rightarrow \text{Ley de ablandamiento exponencial} \quad (2.69)$$

donde $H_0 = H|_{r=r_0}$.

Para completar la formulación del modelo es necesario introducir las restricciones unilaterales compatibles con las relaciones de carga-descarga:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0 \quad ; \quad \gamma \geq 0 \quad ; \quad \gamma \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (2.70)$$

garantizando la condición de consistencia o persistencia de daño:

$$\gamma \dot{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (2.71)$$

Una de las características más interesantes de esta formulación es que la ley de evolución de r , ecuación 2.61, puede integrarse en forma cerrada. Considérese para ello el caso de carga inelástica, es decir $\dot{r} = \gamma > 0$. Luego, por las condiciones complementarias (2.70) se debe satisfacer $\phi = 0$ y de acuerdo a 2.66 se tiene $r = \tau_\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}}$. Además dado el carácter irreversible del proceso, véase ecuaciones 2.70 y 2.71, r crece en magnitud durante carga inelástica y no cambia en régimen elástico o de descarga. De esta forma es posible escribir:

$$r = r|_{t=t} = \max_{\chi \in [0, t]} \{r_0, \tau_\varepsilon(\chi)\} \quad (2.72)$$

la cual representa una forma cerrada para evaluar r en términos de las propiedades del material (σ_y, E) y del estado de deformación actual $\boldsymbol{\varepsilon}$ a través de la norma $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathbf{C}^e} = \tau_\varepsilon$.

Si se considera además que la regla de ablandamiento es conocida, luego todas las ecuaciones del modelo pueden evaluarse.

2.5.2. Tensor Constitutivo Incremental

En este apartado, se pretende encontrar la expresión de un operador constitutivo tangente \mathbf{C} tal que la relación tensión deformación (en tasas) pueda expresarse como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d(r)) \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{d}(r) \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.73)$$

En el caso de descarga elástica (o carga neutra), no hay evolución de la variable de daño, con lo cual $\dot{d} = 0$, obteniéndose en consecuencia:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d(r)) \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{C} = (1 - d(r)) \mathbf{C}^e \quad (2.75)$$

Cuando se activan los mecanismos disipativos, las variables internas del modelo evolucionan ($\dot{r} = \gamma > 0 \Rightarrow \dot{d} \neq 0$) y, como se demostró en la sección previa, esto implica $r = \tau_\varepsilon$, luego podemos escribir:

$$\dot{r} = \dot{\tau}_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\tau_\varepsilon} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.76)$$

Teniendo en cuenta la definición de la variable de daño en términos de r y $q(r)$, ecuación 2.56, es fácil demostrar que:

$$\dot{d} = \frac{\partial}{\partial t} \left[1 - \frac{q(r)}{r} \right] = - \left[\frac{\dot{q}(r) r - q(r) \dot{r}}{r^2} \right] = \left[\frac{q(r) - H(r) r}{r^2} \right] \dot{r} \quad (2.77)$$

Reemplazando 2.76 y 2.77 en 2.73 y operando algebraicamente se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (1 - d(r)) \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left[\frac{q(r) - H(r) r}{r^2} \right] \frac{\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tau_\varepsilon} \overbrace{\mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}}^{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \\ &= \left\{ (1 - d(r)) \mathbf{C}^e - \left[\frac{q(r) - H(r) r}{r^3} \right] \overline{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}} \right\} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}\quad (2.78)$$

de donde deducimos que el tensor constitutivo incremental para daño y en régimen de carga inelástica viene dado por:

$$\mathbf{C}^d = (1 - d(r)) \mathbf{C}^e - \left[\frac{q(r) - H(r) r}{r^3} \right] \overline{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.79)$$

La expresión general del operador tangente, considerando los dos comportamientos mecánicos posibles, puede formularse de la siguiente manera:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad ; \quad \mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{C}^e & \text{si } \gamma = 0 \quad (\text{descarga elástica o carga neutra}) \\ \mathbf{C}^d & \text{si } \gamma > 0 \quad (\text{carga inelástica}) \end{cases} \quad (2.80)$$

2.6. Modelo de daño sólo tracción

Muchos materiales de importancia tecnológica, tales como hormigones y morteros cementicios en general, tienen un comportamiento bien diferenciado ante esfuerzos de compresión o tracción. Se introduce ahora una ley fenomenológica de daño continuo, basado en el modelo descrito anteriormente, donde la evolución de mecanismos disipativos ($\dot{r} > 0$) se permite sólo para tensiones de tracción [OCOL]. Esto se logra definiendo la *contraparte positiva* $\boldsymbol{\sigma}^\oplus$ del tensor de tensiones mediante una simple modificación en la descomposición espectral del mismo:

$$\boldsymbol{\sigma}^\oplus = \sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i \quad (2.81)$$

en donde σ_i y \mathbf{p}_i representan los valores propios y autovectores del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ respectivamente. El símbolo $\langle \bullet \rangle$ es conocido como operador de Macaulay:

$$\langle \bullet \rangle = \frac{\| \bullet \| + \bullet}{2} \quad (2.82)$$

Podemos entonces definir una función de daño alternativa de la forma:

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{\sigma}^\oplus, q)^\oplus &= \tau_{\boldsymbol{\sigma}}^\oplus - q \leq 0 \\
&= \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^\oplus : \mathbf{C}^{e^{-1}} \boldsymbol{\sigma}} - q \leq 0 \\
&= (1-d) \sqrt{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} : \mathbf{C}^{e^{-1}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}}} - q \leq 0 \\
&= \sqrt{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} : \mathbf{C}^{e^{-1}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}}} - r \leq 0 \\
&= \tau_{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\oplus - r \leq 0
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Nótese, una vez más, que el criterio de degradación puede formularse en tensiones totales o efectivas. Razonando de igual forma que en los apartados anteriores, en régimen inelástico de carga se debe verificar $r = \tau_{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\oplus$, además considerando que $\mathbf{C}^{e^{-1}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\varepsilon}$ es posible escribir:

$$\dot{r} = \dot{\tau}_{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\oplus = \frac{\partial \tau_{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\oplus}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}}{\tau_{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\oplus} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.84}$$

Observación 2 para deducir la ecuación previa se toma en cuenta que $\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}(\boldsymbol{\varepsilon})$ es una función homogénea de grado uno (esto implica que $\chi \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}(\chi \boldsymbol{\varepsilon})$; $\forall \chi > 0$) con lo cual, según el teorema de Euler, se puede expresar:

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.85}$$

Reemplazando 2.84 y 2.77 en la forma incremental 2.73 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (1-d(r)) \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left[\frac{q(r) - H(r)r}{r^2} \right] \frac{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tau_{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\oplus} \overbrace{\mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}}^{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \\
&= \left\{ (1-d(r)) \mathbf{C}^e - \left[\frac{q(r) - H(r)r}{r^3} \right] \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}} \right\} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

luego el operador tangente para el modelo de daño sólo tracción y para $\dot{d} \neq 0$ se define mediante:

$$\mathbf{C}^d = (1-d(r)) \mathbf{C}^e - \left[\frac{q(r) - H(r)r}{r^3} \right] \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}} \tag{2.87}$$

Como antes, la situación general considerando carga inelástica o descarga elástica se expresa como sigue:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad ; \quad \mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{C}^e & \text{si } \gamma = 0 \quad (\text{descarga elástica o carga neutra}) \\ \mathbf{C}^d & \text{si } \gamma > 0 \quad (\text{carga inelástica}) \end{cases} \tag{2.88}$$

Observación 3 a diferencia del modelo de plasticidad J_2 y de la ley de daño escalar isotrópica de las secciones 2.4 y 2.5 respectivamente, en este caso particular el tensor constitutivo tangente resulta no simétrico.

2.7. Análisis de bifurcación discontinua

El estudio de bifurcación discontinua (sección 2.3) busca las restricciones en el estado local de tensión compatibles con la presencia de saltos en el campo (tasa) de deformaciones, resultando una estrategia rigurosa para detectar el inicio y dirección de propagación de discontinuidades en el sólido. En el contexto de los modelos discretos cohesivos, este análisis puede considerarse como un criterio viable para introducir en forma consistente una cinemática con modos mejorados de deformación. Seguidamente, particularizamos el problema para los modelos constitutivos presentados en las secciones 2.4-2.6.

A partir de la ecuación 2.32 se había establecido que una condición necesaria para la aparición de bifurcación en un punto material $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}$, muy próximo a \mathcal{S} , es la singularidad del tensor de localización \mathbf{Q} , considerado como una función del vector unitario \mathbf{n} normal a la superficie de discontinuidad y el módulo de ablandamiento H :

$$\det(\mathbf{Q}(\mathbf{n}, H)) = \det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(H) \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (2.89)$$

Observación 4 *nótese que el planteo se realiza sin especificar en que parte del dominio $\Omega \setminus \mathcal{S}$ se formulan las ecuaciones (Ω^+ ó Ω^-). La situación crítica corresponde al caso carga inelástica-carga inelástica a ambos lados de \mathcal{S} , luego se tiene: $\mathbf{C}_{\Omega^+} = \mathbf{C}_{\Omega^-} = \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$, véase sección 2.3.*

Para operar sobre 2.89, consideremos una expresión generalizada del operador constitutivo incremental, como por ejemplo:

$$\mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(H) = \vartheta \mathbf{C}^e - \frac{1}{\xi(H)} \mathbf{P} \otimes \mathbf{R} \quad (2.90)$$

que, como es sencillo de demostrar, incluye las leyes materiales de plasticidad y daño discutidas si se definen en forma adecuada los parámetros escalares ϑ y $\xi(H)$ y los tensores \mathbf{P} y \mathbf{R} , véase la parte superior del cuadro 2.1.

En vista de la ecuación 2.90 el tensor \mathbf{Q} puede escribirse:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{n}, H) &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \\ &= \vartheta \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{\xi(H)} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P} \otimes \mathbf{R}) \cdot \mathbf{n} \\ &= \vartheta \mathbf{Q}^e - \frac{1}{\xi(H)} (\mathbf{p}_n \otimes \mathbf{r}_n) \end{aligned} \quad (2.91)$$

en donde se han definido los vectores $\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$, $\mathbf{r}_n = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}$ y \mathbf{Q}^e como el tensor de localización elástico. Dado que \mathbf{Q}^e es simétrico e invertible, la expresión 2.91 puede reformularse de una manera más conveniente:

$$\mathbf{Q} = \vartheta \mathbf{Q}^e [\mathbb{I} - \xi(H)^{-1} (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}}) \otimes \mathbf{r}_n] \quad (2.92)$$

Aplicando el operador determinante a 2.92 e igualando a cero, llegamos a la siguiente condición:

$$\det(\mathbf{Q}) = \underbrace{\mathcal{J}^{ndim}}_{>0} \underbrace{\det(\mathbf{Q}^e)}_{>0} \det(\mathbb{I} - \xi(H)^{-1} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \otimes \mathbf{r}_n) = 0 \quad (2.93)$$

La única posibilidad para que se satisfaga 2.93 es que:

$$\det(\mathbb{I} - \xi(H)^{-1} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \otimes \mathbf{r}_n) = 1 - \xi(H)^{-1} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot \mathbf{r}_n = 0 \quad (2.94)$$

donde debe notarse que por propiedad de la función $\det(\bullet)$ se tiene: $\det(\mathbb{I} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; $\forall \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{ndim}$. Deducimos entonces que el coeficiente $\xi(H)$ debe ser igual a:

$$\xi(H) = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot \mathbf{r}_n \quad (2.95)$$

permitiéndonos obtener una expresión analítica de la función $\hat{H}(\mathbf{n})$, representando los valores admisibles del módulo de ablandamiento H que hacen singular el tensor de localización \mathbf{Q} :

- para plasticidad:

$$\xi(H) = \mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M} + H \quad (\text{véase cuadro 2.1}) \quad (2.96)$$

$$\hat{H}(\mathbf{n}) = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot \mathbf{r}_n - \mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M} \quad (2.97)$$

- para daño:

$$\xi(H) = \frac{r^3}{q - Hr} \quad (\text{véase cuadro 2.1}) \quad (2.98)$$

$$\hat{H}(\mathbf{n}) = \frac{q}{r} \left[1 - \frac{r^2}{\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot \mathbf{r}_n} \right] \quad (2.99)$$

2.7.1. Módulo de ablandamiento crítico y ángulo de bifurcación

Asumamos que $\hat{H}(\hat{\mathbf{n}})$ (ver ecuaciones 2.97 ó 2.99) representa el conjunto de todas las posibles magnitudes del módulo de ablandamiento que satisfacen la singularidad de \mathbf{Q} o equivalentemente la nulidad de la expresión 2.94, para direcciones unitarias $\hat{\mathbf{n}}$ normales a \mathcal{S} . El problema que se plantea entonces es encontrar un valor particular de $\hat{H}(\hat{\mathbf{n}})$, denominado H^{crit} , definido como el máximo de $\hat{H}(\hat{\mathbf{n}})$ respecto a variaciones en su argumento $\hat{\mathbf{n}}$. De esta forma se asegura que para $H > H^{crit}$ el material permanece en régimen estable (sin bifurcación). En consecuencia, el módulo crítico de ablandamiento por deformación para un instante dado $t \in [0, T]$ y un punto arbitrario \mathbf{x} surge de un proceso de maximización, que matemáticamente se plantea de la forma:

$$H^{crit} = \max_{\hat{H} \in \mathcal{J}} \{ \hat{H}(\hat{\mathbf{n}}) \} \quad \text{sujeto a} \quad \|\hat{\mathbf{n}}\| = 1 \quad (2.100)$$

siendo \mathcal{J} el conjunto de valores admisibles para $\hat{H}(\hat{\mathbf{n}})$:

$$\mathcal{J} = \{\hat{H}(\hat{\mathbf{n}}) \in \mathbb{R}; \hat{H}(\hat{\mathbf{n}}) \text{ satisface la ecuación 2.97 ó 2.99} \wedge \|\hat{\mathbf{n}}\| = 1\} \quad (2.101)$$

La orientación de la trayectoria de discontinuidad \mathbf{n}^{crit} , compatible con H^{crit} , viene dada por la expresión:

$$\mathbf{n}^{crit} = \arg_{\|\hat{\mathbf{n}}\|=1} \left[\underset{\hat{H} \in \mathcal{J}}{\text{máx}} \{ \hat{H}(\hat{\mathbf{n}}) \} \right] \quad (2.102)$$

es decir: $\mathbf{n}^{crit} = \hat{\mathbf{n}}$ tal que $\hat{H}(\hat{\mathbf{n}}) = H^{crit}$ y $\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1$

Definición 4 *el instante de tiempo en el cual se verifica por primera vez la condición $H = H^{crit}$ para un punto material arbitrario \mathbf{x} , se denomina tiempo de bifurcación $t_B \in [0, T]$. A partir de dicho instante, el campo tasa de deformaciones puede resultar discontinuo en \mathbf{x} ; matemáticamente: $[[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]]_{(\mathbf{x}, t \geq t_B)} \neq \mathbf{0}$.*

En la descripción del fenómeno de falla mediante la aproximación por discontinuidades fuertes embebidas que se postula en esta tesis, el hecho de evaluar las condiciones de bifurcación material representa un ingrediente clave de la formulación dado que, como se verá en el capítulo 3, al verificarse la condición $t \geq t_B$ se incorpora una cinemática con saltos en desplazamientos y, por ende, el modelo constitutivo debe regularizarse de tal manera que el estado tensional resulte acotado aun para medidas singulares de deformación. Por este motivo debemos ser capaces de resolver correctamente 2.100.

Este problema de maximización con restricciones (2.100) fue extensamente estudiado en los últimos años y puede ser resuelto por distintos procedimientos clásicos [WS87]. En Ottosen & Runesson [OR91], por ejemplo, se proponen soluciones analíticas para 3D utilizando multiplicadores de Lagrange. En Ortiz et al. [OLN87], se postula una estrategia numérica de maximización local. No obstante, en problemas grandes, y especialmente en casos 3D, estos métodos pueden resultar costosos desde el punto de vista computacional.

Por tal motivo, adoptamos una forma alternativa equivalente de solución basada en una interpretación gráfica de las condiciones de bifurcación material. Esta estrategia representa una generalización del trabajo de William [Wil00], permitiendo la obtención de fórmulas cerradas y simples de evaluar para una amplia gama de modelos constitutivos, véase [OH04]. Nos limitamos aquí a reescribir las expresiones finales que se obtienen tras aplicar dicho procedimiento, sin pretender el desarrollo del mismo. Para mayor detalle en cuanto a sus fundamentos teóricos se recomienda consultar [OH04] y [Cha03]. Como se verá más adelante estos resultados son de utilidad para el planteamiento de los algoritmos de trazado de discontinuidades en el modelo discretizado por elementos finitos.

En este contexto de análisis, la dirección crítica \mathbf{n}^{crit} puede evaluarse en términos del ángulo θ^{crit} , de la forma:

$$\mathbf{n}^{crit} = \cos(\theta^{crit}) \mathbf{X}_1 + \sin(\theta^{crit}) \mathbf{X}_3 \quad (2.103)$$

Definición 5 *entendemos por ángulo crítico de bifurcación θ^{crit} a aquel que forma la normal \mathbf{n} con la primer dirección principal \mathbf{X}_1 de \mathbf{X} , véase cuadro 2.1.*

En el cuadro siguiente, se resumen las expresiones que permiten determinar H^{crit} y θ^{crit} para los modelos constitutivos en estudio.

	Plasticidad J_2	Daño estándar	Daño sólo tracción
ϑ	1	$(1 - d)$	
$\xi(H)$	$M : C^e : M + H$	$\left[\frac{r^3}{q - H r} \right]$	
P	$C^e : M$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}^\oplus$
R	$M : C^e$	$\bar{\sigma}$	
X	$signo(C^e : M) \sqrt{C^e : M \cdot M : C^e}$	$signo(\bar{\sigma}) \sqrt{\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}}$	$signo(\bar{\sigma}^\oplus) \sqrt{\bar{\sigma}^\oplus \cdot \bar{\sigma}^\oplus}$
X_i	$\underbrace{\{X_1 \geq X_2 \geq X_3\}}_{\text{autovalores de } X}$		
X_i	$\underbrace{\{X_1; X_2; X_3\}}_{\text{autovectores de } X}$		
H^{crit}	$Z^{crit} + \frac{\nu}{E} (X_1 + X_2 + X_3)^2 - \frac{1+\nu}{E} (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$	$(1 - d) - \frac{r^2}{Z^{crit}}$	
Z^{crit}	$\frac{1+\nu}{E} [(1 - \nu) (X_1 + X_3)^2 - 2 X_1 X_3]$	$\frac{1+\nu}{(1-d)E} [(1 - \nu) (X_1 + X_3)^2 - 2 X_1 X_3]$	
$\tan^2(\theta^{crit})$	$0 \leq -\frac{X_3 - [\nu/(1-\nu)] X_1}{X_1 - [\nu/(1-\nu)] X_3}$		

Cuadro 2.1: Expresiones analíticas cerradas para determinar el módulo de ablandamiento crítico (H^{crit}) y el ángulo de bifurcación (θ^{crit}) en los modelos de plasticidad y daño utilizados.

Capítulo 3

Aproximación por discontinuidades fuertes del continuo

Es un hecho bien aceptado que la falla en materiales se describe como la acumulación gradual de procesos disipativos en zonas localizadas los cuales pueden, eventualmente, generar mecanismos macroscópicos observables en forma de superficies de discontinuidad en el medio [BP98]. Dependiendo del contexto, estas interfaces reciben diversos nombres: fisuras, fracturas, bandas de corte o de deslizamiento. Teniendo en cuenta tal evidencia física, la formulación de modelos que consideren discontinuidades en el campo de desplazamiento parece una elección natural.

Por otro lado, y desde el punto de vista de la mecánica de medios continuos locales, se ha visto que el fenómeno de localización se asocia con la existencia de una región en donde el campo tasa de deformaciones se torna discontinuo (discontinuidad débil). Debido a la ausencia de una longitud interna característica, y como caso límite, la banda de localización colapsa en una superficie originando un salto en desplazamientos. Nuevamente, aproximaciones que introduzcan discontinuidades fuertes surgen como adecuadas para representar este fenómeno singular.

3.1. Introducción

En el trabajo de Simo et al. [SOA93] se mostró que bajo ciertas circunstancias, un modelo discreto cohesivo puede interpretarse como la situación límite de un modelo continuo, al considerar la localización de deformaciones mediante la incorporación de discontinuidades fuertes. En ese último caso, para que las ecuaciones de gobierno conserven consistencia física y matemática, el inverso del módulo de ablandamiento debe considerarse en un sentido distribucional. Una consecuencia de esta aproximación es que la disipación mecánica, que en los modelos clásicos de continuo es proporcional al volumen, no es nula aun cuando se desarrolla en una zona de medida nula (superficie de falla). El proceso disipativo que tiene lugar en la interface puede caracterizarse en términos de propiedades del material, como por ejemplo la energía de fractura G_f .

Siguiendo tal filosofía, en Oliver [Oli00] se demostró además que, en régimen de discontinuidad fuerte, la ecuación constitutiva del continuo (tensión-deformación) origina, natural y consistentemente, una ley discreta (tracción-salto) proyectada en la interface.

Estas ideas marcaron un enfoque alternativo y viable para resolver el problema de falla, postulando que es posible obtener una ecuación que gobierne la evolución en la zona de progreso de fractura combinando una cinemática singular con un modelo constitutivo del continuo. De esta forma se evita tener que seleccionar una ley cohesiva independiente del material no degradado, y por ende algo arbitraria si se quiere, para controlar la apertura de la discontinuidad.

La metodología descrita anteriormente representa el modelo conceptual que hemos adoptado en parte importante de la presente disertación, y se la denomina *Aproximación por Discontinuidades Fuertes del Continuo* (*Continuum Strong Discontinuity Approach CSDA*), dado que puede formularse íntegramente en formato clásico de medios continuos, tanto desde el punto de vista de la descripción cinemática como del comportamiento constitutivo material.

El objetivo que se busca en este apartado es discutir los aspectos más importantes en los que se basa la *CSDA*. No se pretende un desarrollo meticuloso de cada tópico particular, sino simplemente disponer de un fundamento conceptual para la correcta interpretación de los resultados finales. De otra forma la redacción del capítulo se extendería innecesariamente en detalles que ya son bien conocidos y aceptados en el contexto de la mecánica de falla, y que además pueden consultarse en las referencias propuestas.

El contenido del capítulo se organiza como sigue: en la sección 3.2 se discute el modelo conceptual de *CSDA* (cinemática, ecuaciones de gobierno y regularización constitutiva), enfatizando las principales diferencias con los esquemas discretos clásicos. Aspectos puntuales de implementación se tratan en la sección 3.3, donde se presenta además una interpretación del modelo numérico. Finalmente en el apartado 3.4 investigamos las restricciones que se deben satisfacer tras incorporar una descripción cinemática basada en modos mejorados de deformación en el formato clásico de modelos constitutivos del continuo. Dicho estudio se denomina análisis de discontinuidad fuerte, y está especialmente direccionado a leyes de daño escalar.

3.2. Modelo conceptual de la *CSDA*

La idea básica subyacente en el modelo conceptual de la *CSDA* postula que todo punto \boldsymbol{x} del sólido en estudio, incluyendo aquellos ubicados sobre una superficie \mathcal{S} en la cual se verifican discontinuidades en desplazamientos, se considera “*un punto material*” en el sentido que sobre el mismo es posible medir variables cinemáticas y establecer el comportamiento constitutivo en términos de una ley de tipo tensión-deformación clásica. Para dar formalismo a esta visión particular del problema se requiere la incorporación de ciertas hipótesis e ingredientes básicos, a saber: (i) adopción de la mecánica de medios continuos como contexto teórico de base, (ii) descripción cinemática consistente con la presencia discontinuidades fuertes, dotada además de una generalización para contemplar magnitudes singulares en el campo de deformaciones, (iii) *re-definición* del módulo de ablandamiento como una función generalizada, ésta es precisamente la regularización a nivel constitutivo introducida en la formulación y que garantiza magnitudes acotadas de tensión en \mathcal{S} ($\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}$) aun para medidas singulares de deformación, manteniendo de esa forma la buena postura matemática del problema. En esta sección detallamos estos tópicos distintivos de la formulación.

3.2.1. Descripción cinemática con discontinuidades fuertes

La CSDA hace uso de una cinemática discontinua con saltos en desplazamientos definida en el formato estándar de medios continuos, considerando que el tensor de deformaciones (infinitesimal) se computa como el gradiente simétrico generalizado (en el sentido de derivada generalizada) del campo de desplazamientos. Esto implica que el espacio admisible de las deformaciones debe incorporar funciones de distribución.

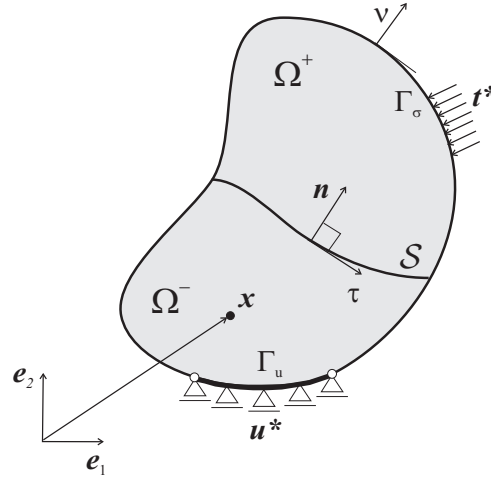


Figura 3.1: Definición del problema mecánico exhibiendo discontinuidades fuertes.

Considérese para ello un problema mecánico (cuasi estático), el cual puede describirse utilizando la siguiente nomenclatura (ver figura 3.1): Ω es la (ya definida) configuración de referencia, $\mathcal{S} \subset \Omega$ es una superficie material (superficie de discontinuidad) con normal \mathbf{n} a través de la cual pueden presentarse saltos en el campo de velocidades $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ (para ser consistentes con la nomenclatura introducida en el capítulo 2 denotamos $[[\dot{\mathbf{u}}]] \equiv \dot{\boldsymbol{\beta}}$), Γ es la frontera de Ω que se divide en dos conjuntos Γ_u y Γ_σ donde se prescriben las condiciones de contorno esenciales y naturales tal que: $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$ y $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$, siendo $\boldsymbol{\nu}$ el vector unitario (exterior) normal a Γ . Además se definen los subdominios Ω^+ y Ω^- como las regiones de $\Omega \setminus \mathcal{S}$ apuntadas por los versores \mathbf{n} y $-\mathbf{n}$ respectivamente.

Las ecuaciones (en tasas) consistentes con una cinemática discontinua en desplazamientos, a través de la línea material \mathcal{S} , pueden plantearse como sigue, véase también figura 3.2:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{continuo}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{discontinuo}} \quad (3.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \underbrace{(\nabla \dot{\bar{\mathbf{u}}})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}: \text{regular}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\nabla \dot{\boldsymbol{\beta}})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\delta: \text{singular}} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}}(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\delta: \text{singular}} \quad (3.2)$$

donde $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$ y $\delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$ son las funciones escalón y Delta de Dirac colocadas en \mathcal{S} respectivamente, tal que:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \quad \wedge \quad \nabla \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \quad (3.3)$$

además los campos tasa de desplazamiento regular $\dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)$ y salto $\dot{\beta}(\mathbf{x}, t)$:

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim} \quad (3.4)$$

$$\dot{\beta}: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim} \quad (3.5)$$

se asumen continuos (al menos funciones del tipo C^0) sobre Ω , en consecuencia $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, en la ecuación 3.2, a lo sumo puede presentar discontinuidades acotadas. Por otro lado, una vez activa la discontinuidad fuerte, la componente no acotada de la deformación ($\boldsymbol{\varepsilon}_\delta$) adquiere un carácter distribucional (singular).

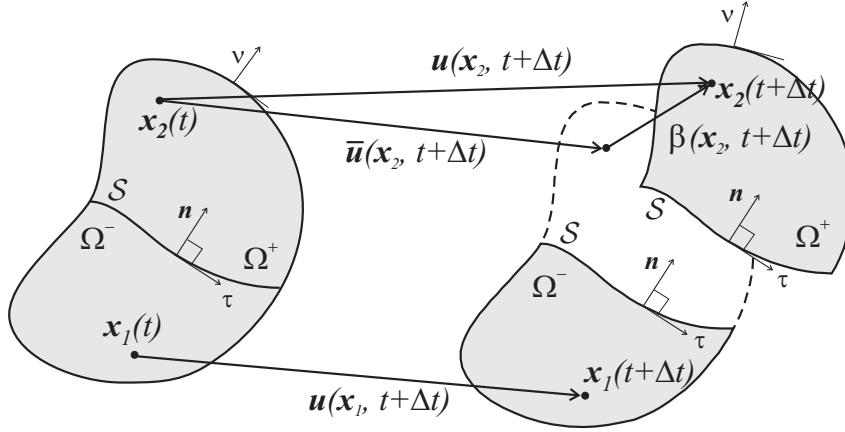


Figura 3.2: Descripción cinemática compatible con discontinuidades en el campo de desplazamientos al tiempo $t + \Delta t$. Configuración inicial y final.

3.2.2. Ecuaciones de gobierno

La forma fuerte del problema de valores de contorno (en tasas) para modelos cohesivos con saltos en desplazamientos, y en el contexto de la *CSDA*, puede formularse como sigue:

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{ecuación de equilibrio}) \quad (3.6)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (\text{condición de contorno cinemática}) \quad (3.7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu} = \dot{\mathbf{t}}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \quad (\text{condición de contorno mecánica}) \quad (3.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathfrak{R}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{r}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{relación constitutiva}) \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^{sym} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{compatibilidad cinemática}) \quad (3.10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{S} \quad (\text{continuidad externa de tracciones}) \quad (3.11)$$

$$\dot{\mathcal{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (\text{continuidad interna de tracciones}) \quad (3.12)$$

donde el vector \mathbf{b} representa un campo de fuerzas por unidad de masa, ρ es la densidad material, \mathfrak{R} simboliza alguna ley constitutiva que define el estado tensional $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ en función del campo tasa de deformación $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y variables internas \dot{r} . Considérese además a \mathcal{T} como el vector de tracciones en la interface, es decir: $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}|_{(\mathbf{x} \in \mathcal{S})}$. Recordamos que

$(\bullet)_{\Omega^+}$, $(\bullet)_{\Omega^-}$ y $(\bullet)_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$, son magnitudes evaluadas en Ω^+ , Ω^- y $\Omega \setminus \mathcal{S}$ respectivamente, infinitamente próximas a \mathcal{S} .

A partir del conjunto de ecuaciones 3.6-3.12, se extraen algunas observaciones importantes:

- la expresión de equilibrio estándar (3.6) está formulada sólo en el dominio regular $\Omega \setminus \mathcal{S}$ del material.
- el equilibrio a través de \mathcal{S} , regulado por la ecuación 3.11, se conoce también como restricción de *continuidad externa de tracciones*.
- como característica principal de la aproximación por discontinuidades fuertes utilizada, debe destacarse que tanto la función constitutiva $\mathfrak{R}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{r})$ (fórmula 3.9) como la ecuación de compatibilidad cinemática (3.10), son válidas en todo el dominio de análisis Ω , incluyendo por ende la superficie de discontinuidad \mathcal{S} .
- el hecho de adoptar un *modelo cohesivo* implica la existencia de fuerzas de interacción en la interface. Surge la necesidad entonces de formular una ecuación que asegure el equilibrio entre las tracciones en la discontinuidad y su entorno, ver expresión 3.12. Esta restricción de equilibrio se la reconoce con el nombre de ecuación de *continuidad interna de tracciones*. A diferencia de los modelos discretos clásicos, la CSDA asume además que que tales fuerzas cohesivas se evalúan a partir de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$.

La ecuación 3.12 es de especial importancia en la formulación del modelo en estudio. La misma asegura el carácter acotado del tensor (tasa) de tensión en la superficie de fallo ($\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$), pudiéndose deducir luego las condiciones matemáticas que hacen compatible un modelo constitutivo de continuo con la inclusión de discontinuidades fuertes. Para demostrar que $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$ es acotado se sigue el siguiente razonamiento. En primer lugar debe notarse que, como la tasa de deformación en el dominio regular $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ es acotada, véase ecuación 3.2, el modelo constitutivo 3.9 necesariamente retornará tensiones $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ acotadas. Según 3.12, el vector tasa de tracción en la discontinuidad $\dot{\boldsymbol{T}}$ también debe ser acotado. Utilizando el concepto de descomposición espectral, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$ puede plantearse:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{i=3} \dot{\sigma}_{\mathcal{S}i} (\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i) \quad (3.13)$$

donde $\dot{\sigma}_{\mathcal{S}i}$ son los autovalores de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$ y \mathbf{p}_i los correspondientes vectores propios. A partir de 3.12 y 3.13 se tiene además:

$$\underbrace{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}}_{\text{acotado}} = \dot{\boldsymbol{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\sigma}_{\mathcal{S}1} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{p}_1 + \dot{\sigma}_{\mathcal{S}2} (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{p}_2 + \dot{\sigma}_{\mathcal{S}3} (\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{p}_3 \quad (3.14)$$

La dirección de falla \mathbf{n} es dependiente del modelo constitutivo utilizado. La ecuación 3.14 sin embargo es válida para cualquier ley material ya que representa una condición de equilibrio entre puntos ubicados en \mathcal{S} y su proximidad. El análisis ha plantearse entonces como si \mathbf{n} fuese arbitrario ($\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} \neq 0$). Luego, para que 3.14 conserve consistencia

matemática, cada valor propio $\dot{\sigma}_{\mathcal{S}i}$ debe permanecer acotado, así como $\dot{\sigma}_{\mathcal{S}}$, en vista de 3.13.

Por extensión directa $\sigma_{\mathcal{S}}$ y las variables internas como *tensión* valuadas en \mathcal{S} ($\dot{q}_{\mathcal{S}}$, $q_{\mathcal{S}}$), conservan este carácter regular.

3.2.3. Regularización del modelo constitutivo

Se ha demostrado que, por condiciones de equilibrio, todas las magnitudes de tipo tensión necesariamente deben ser acotadas. El problema se focaliza ahora en establecer una adecuada *regularización* del modelo constitutivo para satisfacer esta última condición y que al mismo tiempo resulte compatible con la descripción cinemática (3.1-3.2), admitiendo deformaciones singulares en la discontinuidad. Considérese para ello una ecuación general de evolución para las variables internas de un modelo arbitrario, como por ejemplo:

$$\dot{q}_{\mathcal{S}} = H(r) \dot{r}_{\mathcal{S}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (3.15)$$

donde q y r representan magnitudes de tipo tensión y deformación respectivamente, siendo H el módulo de ablandamiento material. La ecuación 3.15 caracteriza una gran variedad de leyes constitutivas, entre éstas los tres modelos discutidos en el capítulo 2, ver secciones 2.4-2.6. En un estado de carga inelástica, podemos pensar que tales variables internas se evalúan de la forma:

$$\dot{q}_{\mathcal{S}} \approx \|\dot{\sigma}_{\mathcal{S}}\| \quad \rightarrow \quad \text{regular} \quad (3.16)$$

$$\dot{r}_{\mathcal{S}} \approx \|\dot{\epsilon}_{\mathcal{S}}\| \quad \rightarrow \quad \text{singular (según 3.2)} \quad (3.17)$$

Luego, para que 3.15 conserve consistencia matemática, el módulo de ablandamiento H debe poseer una estructura particular, tal que $1/H$ resulte una función generalizada sobre \mathcal{S} , es decir:

$$H(r) = \delta_{\mathcal{S}}^{-1} \bar{H} \quad (3.18)$$

$$H(r)^{-1} = \delta_{\mathcal{S}} \bar{H}^{-1} \quad (3.19)$$

donde $\bar{H} < 0$ (acotado) es el denominado *módulo de ablandamiento discreto o intrínseco*, el cual puede considerarse como una propiedad material ($\bar{H} = f(E, \sigma_y, G_f)$). La estimación de este nuevo parámetro se fundamenta en garantizar que la energía disipada durante el proceso de degradación y falla (G_f) sea aquella correspondiente al material en estudio [Oli6a].

A manera de resumen, en el cuadro 3.1 se esquematiza el modelo conceptual de *CSDA* presentado en esta sección. Se incluye además un diagrama similar correspondiente a un modelo cohesivo discreto clásico (cuadro 3.2), con el fin de enfatizar las diferencias.

Hipótesis 1:

Mecánica del Continuo estándar como marco teórico subyacente para todo el dominio de análisis Ω , incluyendo la interface de discontinuidad \mathcal{S} .

Hipótesis 2:

Adopción de una cinemática con discontinuidades fuertes:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{continuo}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{discontinuo}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \underbrace{(\nabla \dot{\bar{\mathbf{u}}})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}: \text{ regular}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\nabla \dot{\boldsymbol{\beta}})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}: \text{ regular}} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}}(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\delta}: \text{ singular}}$$

Descripción de la ecuación de equilibrio en \mathcal{S} :

Condición de continuidad de tracciones en la interface \mathcal{S} planteada en términos del tensor de tensiones valuado en \mathcal{S} ($\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$):

$$\dot{\mathcal{T}} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}}_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}|_{(\mathbf{x} \in \mathcal{S})}} \cdot \mathbf{n} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}}_{\text{acotada}} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \text{ debe ser una magnitud acotada}$$

Consecuencia 1:

Regularización Constitutiva:

Para que $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{R}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\delta}, \dot{r})$ sea una aplicación que retorne tensiones $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$ regulares, es necesario reinterpretar el módulo de ablandamiento en el siguiente sentido distribucional:

$$\underbrace{\dot{q}_{\mathcal{S}}}_{\approx \|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}\|} = H \underbrace{\dot{r}_{\mathcal{S}}}_{\approx \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\delta}\|}$$

$$H = \delta_{\mathcal{S}}^{-1} \bar{H}$$

Consecuencia 2:

Ley discreta inducida:

El análisis de admisibilidad del estado de tensión-deformación en \mathcal{S} y el de un punto vecino en $\Omega \setminus \mathcal{S}$, determina una ley discreta proyectada de tipo:

$$\dot{\mathcal{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \Sigma(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{\alpha})$$

compatible con el comportamiento constitutivo del continuo.
(ver análisis de discontinuidad, más adelante, sección 3.4.2)

Cuadro 3.1: Modelo conceptual de la Aproximación mediante Discontinuidades Fuertes del Continuo (*CSDA*).

<p>Hipótesis 1: Mecánica del Continuo estándar como marco teórico subyacente sólo para el dominio regular de análisis $\Omega \setminus \mathcal{S}$.</p>
<p>Hipótesis 2: Adopción de una cinemática con discontinuidades fuertes:</p> $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{continuo}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{discontinuo}}$ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \underbrace{(\nabla \dot{\bar{\mathbf{u}}})^{sym}}_{\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}: \text{regular}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\nabla \dot{\boldsymbol{\beta}})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\delta}: \text{no se considera}} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}}(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\delta}: \text{no se considera}}$
<p>Descripción de la ecuación de equilibrio en \mathcal{S}: Condición de continuidad de tracciones en la interface \mathcal{S} planteada de la forma:</p> $\dot{\mathcal{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}$
<p>Consecuencia 1: Para evaluar el vector de tracción en \mathcal{S} (\mathcal{T}), se debe adicionar una ecuación cohesiva discreta del tipo: $\dot{\mathcal{T}} = \mathfrak{R}(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{r})$, independiente del comportamiento constitutivo del continuo.</p>

Cuadro 3.2: Modelo conceptual de la Aproximación mediante un Modelo Discreto Cohesivo Estándar.

A partir de lo expuesto, surgen algunos comentarios relevantes:

- la *CSDA* utiliza el contexto formal de la mecánica del continuo, para la descripción cinemática y constitutiva en todo el dominio de análisis Ω , incluido \mathcal{S} .
- la ecuación de continuidad de tracciones se plantea en forma diferenciada. En un modelo cohesivo estándar la fuerza en la interface surge de una *ley constitutiva adicional* del tipo $\dot{\mathbf{T}} = \Sigma(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{r})$, mientras que en la *CSDA* dicha ley discreta se proyecta naturalmente sobre \mathcal{S} al verificarse un régimen de discontinuidad fuerte y a partir del modelo continuo (ver sección 3.4.2), con lo cual las fuerzas de interacción cohesivas en \mathcal{S} derivan de un campo tensional $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$.
- en ambos modelos la disipación de energía en la interface de discontinuidad resulta una magnitud objetiva con respecto a la direccionalidad y tamaño de los elementos.
- en la *CSDA* se introduce el concepto de *regularización constitutiva*. Esto conlleva a una reinterpretación del módulo de ablandamiento en un sentido distribucional. De esta forma se garantiza la compatibilidad entre el modelo continuo y la cinemática singular.

3.3. Aspectos de implementación de la *CSDA*

3.3.1. Cinemática regularizada

La aparición de términos singulares en la cinemática discutida en la sección 3.2.1, puede adaptarse convenientemente para que su tratamiento algorítmico resulte posible. En este sentido se incorpora a la formulación un factor de penalidad $h(t)$ [OCM97], el cual permite definir una versión regularizada de la distribución Delta en términos de la función de colocación $\mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$:

$$\delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h(t)} \mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) ; \text{ siendo } \mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}^h \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}^h \end{cases} \quad (3.20)$$

donde $\mathcal{S}^h \supset \mathcal{S}$ representa una banda en la cual pueden originarse discontinuidades en el campo de deformaciones (discontinuidad débil), de *espesor aparente* $h(t)$, limitada por las curvas \mathcal{S}^+ y \mathcal{S}^- próximas a \mathcal{S} (ver figura 3.3).

Teniendo en cuenta (3.20), las expresiones (3.1-3.2) pueden ahora describirse de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\dot{\tilde{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{continuo}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{discontinuo}} \quad (3.21)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{(\nabla \dot{\tilde{\mathbf{u}}})^{sym} + \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\nabla \dot{\boldsymbol{\beta}})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}: \text{regular}} + \underbrace{\mu_{\mathcal{S}} \frac{1}{h(t)} (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}}: \text{singular si } h \rightarrow 0} \quad (3.22)$$

Observación 5 para $h(t) \rightarrow 0$ las ecuaciones 3.21-3.22 colapsan en 3.1-3.2, recuperándose la cinemática estándar singular de discontinuidades fuertes.

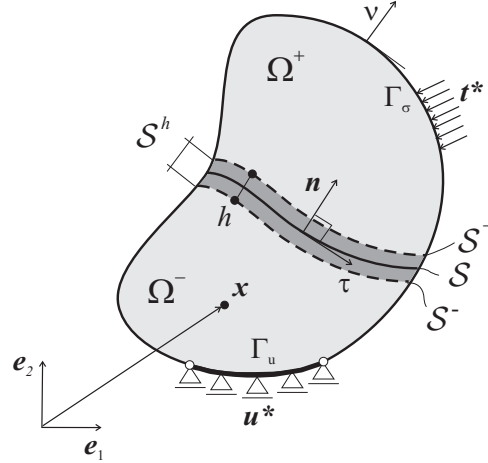


Figura 3.3: Descripción de la cinemática de discontinuidades fuertes regularizada.

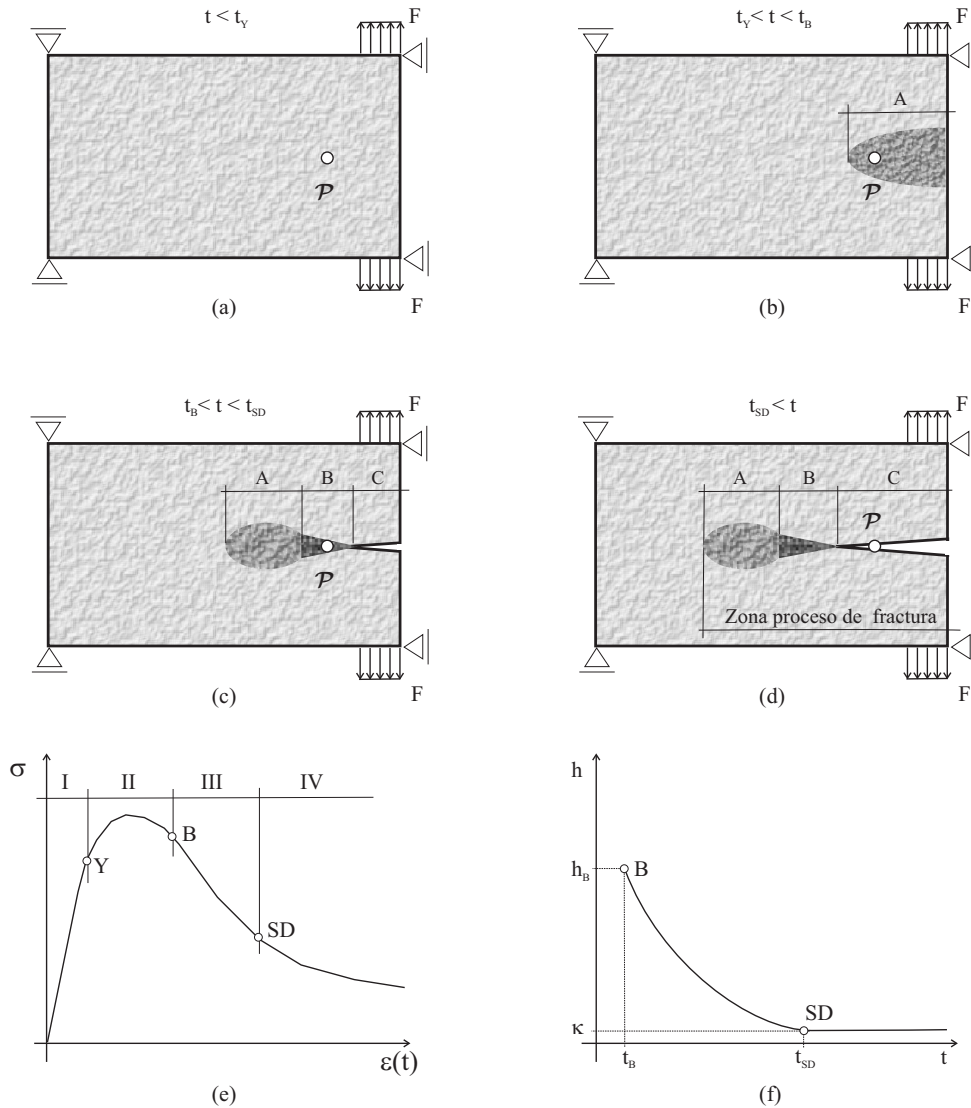
3.3.2. Interpretación de la cinemática suavizada

La cinemática descrita por las ecuaciones (3.21-3.22), regularizada mediante el parámetro de penalidad $h(t) \neq 0$, incorpora en la formulación el concepto de una *aparente* discontinuidad débil ([Oli98, OCM99]). El salto $\dot{\beta}$ puede interpretarse entonces como la diferencia entre en el campo (tasa) de desplazamiento entre \mathcal{S}^+ y \mathcal{S}^- (figura 3.3). En estas circunstancias la velocidad de deformación $\dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t)$ es discontinua pero permanece acotada.

Nótese que, si bien numéricamente asumimos que $h(t)$ puede ser no nulo, este coeficiente se introduce sólo a efectos algorítmicos y *no se refiere a una longitud característica* introducida en el modelo conceptual de la *CSDA*. En rigor, no existe espesor de banda de localización, ya que la misma se modela mediante la introducción de una interface de falla \mathcal{S} , por tal motivo la utilización del término *aparente discontinuidad débil*. Esta aproximación es lícita siempre y cuando h resulte suficientemente pequeño comparado con las dimensiones globales de la estructura (\mathcal{S}^h despreciable frente a Ω), lo cual generalmente se satisface.

En este contexto, el modelo numérico propuesto permite introducir una interpretación algorítmica del mecanismo completo de generación de fisuras en un medio inicialmente continuo. Para ello analizamos la evolución temporal del estado de tensión en un punto material \mathcal{P} (figura 3.4-(e)). Una primera etapa (fase I) corresponde, como es usual, a un comportamiento elástico válido en el intervalo $t < t_Y$, definiendo t_Y como el tiempo en el cual se sobrepasa el límite elástico material (ver también figura 3.4-(a)). A medida que progresa el estado de carga, se desarrollan procesos inelásticos irreversibles (daño, plasticidad) pero estables desde el punto de vista constitutivo (fase II en la figura 3.4-(e), $t_Y < t < t_B$), con lo cual las variables cinemáticas aún conservan su suavidad; esta situación se corresponde también con la figura 3.4-(b). Inmediatamente superado el instante de bifurcación ($t_B < t$) el campo (tasa) de deformación se torna discontinuo, luego la cinemática alternativa propuesta en la ecuación 3.22 con $h(t) \neq 0 \wedge \dot{\beta} \neq 0$, resulta adecuada para representar el inicio de una (pseudo) discontinuidad débil en la historia de respuesta (fase III y figura 3.4-(c)). Conforme avanza el estado de sollicitación, $h(t)$ decrece gobernada por alguna ley de evolución como lo muestra la figura 3.4-(f), hasta alcanzar un valor nulo (por razones computacionales un valor muy pequeño $h = \kappa \rightarrow 0$)

al alcanzar el tiempo t_{SD} caracterizando el inicio de una cinemática de discontinuidades fuertes (fase IV, figura 3.4-(d)).



- A: régimen inelástico irreversible estable
- B: régimen de bifurcación discontinua (discontinuidad débil), $h > 0$
- C: régimen de discontinuidad fuerte, $h = \kappa \rightarrow 0$

Figura 3.4: Mecanismo de fallo inducido por la cinemática de discontinuidades fuertes regularizada: (a)-(d) Proceso de formación de fractura. (e) Curva tensión deformación del punto \mathcal{P} . (f) Variación del factor de penalidad $h(t)$ en función del tiempo.

Observación 6 adviértase que la cinemática enriquecida se incorpora al tiempo t_B (bifurcación material) con un factor $h \neq 0$ para imponer una discontinuidad acotada en el campo de deformaciones. Luego el mecanismo de transición del parámetro de penalidad se torna un ingrediente importante para poder alcanzar el régimen de discontinuidad fuerte en forma consistente, dado que generalmente $t_B < t_{SD}$.

3.4. Análisis de discontinuidad fuerte

Denominamos *Análisis de Discontinuidad Fuerte* al estudio de las condiciones que hacen compatible la introducción de una cinemática con discontinuidades en el campo de desplazamientos ($\dot{\beta} \neq 0$) en un modelo constitutivo de continuo (σ vs. ε). Para cada ley material, estas expresiones de consistencia son diferentes.

3.4.1. Condición de discontinuidad fuerte en daño

En este apartado investigamos las restricciones que se inducen en la relación tensión-deformación cuando la ley de daño continuo discutida en la sección 2.5 (y resumida por practicidad en el cuadro 3.3), se particulariza para un punto ubicado sobre la superficie de interface \mathcal{S} cuya cinemática contiene modos singulares de deformación, véase Oliver [Oli00].

Densidad de energía libre		
$\varphi(\varepsilon, r) = \frac{1}{2} (1 - d) (\varepsilon : C^e : \varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{q(r)}{r} (\lambda tr^2(\varepsilon) + 2\mu \varepsilon : \varepsilon)$	(3.23)	
Relación tensión-deformación		
$\sigma = \frac{\partial \varphi(\varepsilon, r)}{\partial \varepsilon} = \frac{q(r)}{r} C^e : \varepsilon = (1 - d(r)) \bar{\sigma} \quad ; \quad C^e = \lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{I}$	(3.24)	
$\bar{\sigma} = C^e : \varepsilon$		(3.25)
$\dot{\sigma} = (1 - d(r)) C^e : \dot{\varepsilon} - \dot{d}(r) (C^e : \varepsilon)$		(3.26)
Criterio de degradación		
$\phi(\sigma, q) = \tau_\sigma - q \leq 0$		(3.27)
$\tau_\sigma = \sqrt{\sigma : (C^e)^{-1} : \sigma} = (1 - d(r)) \underbrace{\sqrt{\bar{\sigma} : C^{e-1} : \bar{\sigma}}}_{\bar{\tau}}$		(3.28)
Ley de endurecimiento/ablandamiento		
$\dot{r} = \gamma \quad ; \quad r_0 = r _{t=0} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}}$		(3.29)
$\dot{q} = H(r) \dot{r} \quad ; \quad q_0 = q _{t=0} = r_0$		(3.30)
Condiciones complementarias de carga-descarga		
$\phi(\sigma, q) \leq 0 \quad ; \quad \gamma \geq 0 \quad ; \quad \gamma \phi(\sigma, q) = 0$		(3.31)

Cuadro 3.3: Ecuaciones básicas del modelo de daño escalar.

De acuerdo a la relación elástica 3.24, para un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ es posible escribir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{S}} = \underbrace{\frac{r_{\mathcal{S}}}{q_{\mathcal{S}}}}_{1/(1-d)} \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}} \quad (3.32)$$

Si se considera 3.32 y la cinemática (regularizada) 3.22, surge entonces una ecuación de consistencia que se traduce en la siguiente igualdad:

$$\frac{r_{\mathcal{S}}}{q_{\mathcal{S}}} \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (3.33)$$

Premultiplicando por h ambos miembros en 3.33, y asumiendo que se desarrolla un régimen de discontinuidad fuerte ($h \rightarrow 0$, $t \geq t_{SD}$), se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[h r_{\mathcal{S}} \underbrace{\frac{1}{q_{\mathcal{S}}}}_{\text{acotado}} \underbrace{\mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}}_{\text{acotado}} \right] = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} h \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{=0} + \lim_{h \rightarrow 0} (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} = (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad (3.34)$$

Dado que $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}$ y $q_{\mathcal{S}}$ deben ser términos acotados, para que la expresión 3.34 tenga sentido cuando $\boldsymbol{\beta} \neq 0$, se ha de verificar:

$$\lim_{h \rightarrow 0} h r_{\mathcal{S}} \neq 0 \quad \forall \boldsymbol{\beta} \neq 0 \quad (3.35)$$

Recordando que $r_{\mathcal{S}} = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{S}} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{S}}}$ (sección 2.5), luego 3.35 resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} h r_{\mathcal{S}} &= \lim_{h \rightarrow 0} h \sqrt{\left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \right] : \mathbf{C}^e : \left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \right]} \\ &= \sqrt{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta}} = \Delta \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde $\Delta \bar{\alpha}$ simboliza una variable interna discreta (acotada), cuya regla de evolución es:

$$\dot{\bar{\alpha}} = h \dot{r}_{\mathcal{S}} \quad \forall t > t_B \quad (3.37)$$

$$\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}|_{t=t_B} = 0 \quad (3.38)$$

Según la ecuación 3.36, la igualdad 3.34 se describe convenientemente:

$$\frac{\Delta \bar{\alpha}}{q_{\mathcal{S}}} \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}} = (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}, t > t_{SD}, h \rightarrow 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\Delta \bar{\alpha}}{q_{\mathcal{S}}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{S}}^{ef} = (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}, t > t_{SD}, h \rightarrow 0 \quad (3.40)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_S^{ef} = \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \boldsymbol{\varepsilon}$ es la deformación efectiva.

El sistema 3.39 (ó 3.40) se interpreta conceptualmente como una restricción que debe satisfacer el campo tensional $\boldsymbol{\sigma}_S$ (o bien el de deformaciones efectivas $\boldsymbol{\varepsilon}_S^{ef}$) para que el modelo continuo resulte compatible con una descripción cinemática caracterizada por la presencia de saltos en desplazamientos, y por este motivo se lo conoce con el nombre de *Ecuaciones de Discontinuidad Fuerte*. El instante en el cual se verifica dicha condición se denomina t_{SD} .

Observación 7 en este estado de avance, podemos remarcar un punto importante. Nótese que, según la redefinición del módulo de ablandamiento $H = \delta_S^{-1} \bar{H}$ y la incorporación (sólo por cuestiones numéricas) de la secuencia regularizada $\delta_S = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}$, se puede escribir:

$$H = \lim_{h \rightarrow 0} h \bar{H} \quad (3.41)$$

Reemplazando 3.41 en la ley de evolución para las variables internas, ecuación 3.30, y considerando la igualdad 3.36, llegamos a formular:

$$\dot{q}_S = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} h \dot{r}_S}_{\Delta \dot{\alpha} : \text{regular}} \bar{H} = \underbrace{\bar{H} \Delta \dot{\alpha}}_{\text{regular}} \quad (3.42)$$

Este hecho le da consistencia a la versión algorítmica del modelo de CSDA¹, en el sentido que la magnitud \dot{q}_S nuevamente resulta acotada.

3.4.2. Modelo constitutivo discreto (tracción-salto) inducido

Estamos interesados en descubrir la estructura que posee la relación constitutiva de continuo, una vez activos los modos discontinuos en un punto material sobre la superficie de falla, [Oli00, OH04]. El estado tensional $\boldsymbol{\sigma}_S$ compatible con este mecanismo cinemático singular se obtiene de considerar el caso límite cuando $h \rightarrow 0$. En vista de 3.39 se puede plantear:

$$\boldsymbol{\sigma}_S = \frac{q_S}{\Delta \alpha} \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad (3.43)$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S \\ &= \frac{q_S}{\Delta \alpha} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \\ &= \frac{q_S}{\Delta \alpha} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\beta} \\ &= \frac{q_S}{\Delta \alpha} \mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (3.44)$$

¹La consistencia del *modelo conceptual de CSDA* se ha demostrado en la sección 3.2.3

Por simplicidad, introducimos una nueva magnitud $\omega \in (-\infty, 1]$, denominada variable discreta de daño, $\omega = 1 - \frac{q_S}{\Delta\bar{\alpha}}$, y la expresión 3.44 se escribe:

$$\mathcal{T} = (1 - \omega) \mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (3.45)$$

Adviértase que la ecuación 3.45 representa una ley constitutiva discreta relacionando el vector salto de desplazamientos con la fuerza cohesiva en la interface ($\mathcal{T} = \Sigma(\boldsymbol{\beta}, \omega)$). También debe notarse que $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ induce necesariamente un valor no nulo y acotado de \mathcal{T} , dado que: (i) q_S y $\Delta\bar{\alpha}$ como ya se mencionó, son magnitudes regulares y no nulas para $t > t_{SD}$, (ii) el tensor de localización elástico \mathbf{Q}^e es, por definición, no singular y en consecuencia $\mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta} \neq 0$, a menos que $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

En función de 3.43 y 3.44, la norma de tensiones dada por la ecuación 3.28, se expresa ahora mediante:

$$\begin{aligned} \tau_\sigma &= \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_S : \mathbf{C}^{e-1} : \boldsymbol{\sigma}_S} \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \\ &= \left\{ \left[\frac{q_S}{\Delta\bar{\alpha}} \right]^2 (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} : \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \right\}^{1/2} \\ &= \frac{q_S}{\Delta\bar{\alpha}} \sqrt{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta}} = \sqrt{\mathcal{T} \cdot \mathbf{Q}^{e-1} : \mathcal{T}} = \tau_{\mathcal{T}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

con lo cual el criterio de daño puede describirse en la interface \mathcal{S} :

$$\phi_S(\mathcal{T}, q_S) = \tau_{\mathcal{T}} - q_S \leq 0 \quad (3.47)$$

Finalmente, al considerar 3.37, definimos el parámetro de consistencia de daño γ_S :

$$\dot{r}_S = \gamma_S = \frac{\bar{\gamma}}{h} = \frac{\dot{\bar{\alpha}}}{h} \quad (3.48)$$

haciendo posible formular las condiciones de carga-descarga en su versión discreta:

$$\phi_S(\mathcal{T}, q_S) \leq 0 \quad ; \quad \bar{\gamma} \geq 0 \quad ; \quad \bar{\gamma} \phi_S(\mathcal{T}, q_S) = 0 \quad (3.49)$$

En síntesis, se ha demostrado que el modelo de daño continuo (cuadro 3.3) induce consistentemente sobre la discontinuidad, y en régimen de discontinuidad fuerte, uno de tipo discreto cohesivo, ver cuadro 3.4.

Relación tracción-salto	
$\mathcal{T} = \frac{q_S}{\Delta \bar{\alpha}} \mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta} = (1 - \omega) \mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta}$	(3.50)
Criterio de degradación discreto	
$\phi_S(\mathcal{T}, q_S) = \tau_{\mathcal{T}} - q_S$	(3.51)
$\tau_{\mathcal{T}} = \sqrt{\mathcal{T} \cdot (\mathbf{Q}^e)^{-1} \cdot \mathcal{T}}$	(3.52)
Ley de endurecimiento/ablandamiento discreta	
$\dot{\bar{\alpha}} = \bar{\gamma} \quad ; \quad \alpha_0 = \alpha _{t=t_B} = 0$	(3.53)
$\dot{q}_S = \bar{H} \dot{\bar{\alpha}} \quad ; \quad q_0 = q _{t=t_B}$	(3.54)
Condiciones complementarias de carga-descarga, en formato discreto	
$\phi_S(\mathcal{T}, q_S) \leq 0 \quad ; \quad \bar{\gamma} \geq 0 \quad ; \quad \bar{\gamma} \phi_S(\mathcal{T}, q_S) = 0$	(3.55)

Cuadro 3.4: Ecuaciones básicas del modelo de daño proyectado sobre la interface \mathcal{S} .

Al momento de la implementación numérica surgen dos opciones posibles:

- una implementación continua de 3.50-3.55 ($\boldsymbol{\sigma}$ vs. $\boldsymbol{\varepsilon}$). Este es el procedimiento que sigue la aproximación *Continua de Discontinuidades Fuertes (CSDA)* [OHPC02]. La ley discreta cohesiva se impone implícitamente a medida que el factor de penalidad h decrece ($h \rightarrow 0$, $h \rightarrow k \approx 0$ para propósitos de simulación) y las medidas de deformación se tornan singulares. En consecuencia, no es necesario deducir el modelo proyectado, el cual dependiendo del caso pudiera resultar difícil de obtener. Simplemente basta con utilizar la ley constitutiva de continuo que gobierna el comportamiento del material estable, ya que la misma degenera en forma natural a una de tipo tracción-salto (\mathcal{T} vs. $\boldsymbol{\beta}$) sobre \mathcal{S} . El único requerimiento es el uso de una cinemática suavizada adecuada, como por ejemplo la descrita en 3.21-3.22, e introducir el concepto de regularización del módulo de ablandamiento ($H = \lim_{h \rightarrow 0} h \bar{H}$)
- una implementación discreta, basada en la sustitución del modelo 3.50-3.55 (\mathcal{T} vs. $\boldsymbol{\beta}$), o bien otro independiente (con ello nos referimos a que no necesariamente sea inducido por el modelo continuo), en el término $\boldsymbol{\sigma}_S$ de la ecuación de continuidad interna de tracciones 3.12. Esta es la metodología seguida por la aproximación *Discreta Clásica de Discontinuidades Fuertes*.

Observación 8 *el correspondiente análisis de discontinuidad fuerte en el contexto de modelos constitutivos de plasticidad se trata en el capítulo 6.*

Capítulo 4

Elementos con enriquecimiento nodal y elemental para fractura frágil.

A continuación presentamos aspectos relacionados con la formulación e implementación computacional de elementos finitos con discontinuidades fuertes embebidas para la simulación de fractura en materiales cuasi-frágiles, utilizando para ello la aproximación por discontinuidades fuertes del continuo (*CSDA*) y los modelos de daño escalar discutidos anteriormente. Este estudio se direcciona principalmente a realizar un análisis crítico comparativo sobre dos tecnologías de elementos finitos, que según nuestro conocimiento, representan las herramientas numéricas más eficaces en la actualidad para capturar el fenómeno de falla, véase también [OHS, SOHS05].

4.1. Motivación

Desde hace ya varios años, los elementos finitos con discontinuidades embebidas han ganado un creciente interés en la comunidad científica, particularmente en el contexto del modelado de falla material, debido a la capacidad específica que poseen, a diferencia de los elementos estándar, para capturar la cinemática asociada con la existencia de discontinuidades fuertes. Esencialmente estas tecnologías consisten en enriquecer los modos *continuos* de desplazamiento de las formulaciones clásicas aportando modos adicionales *discontinuos*, ideados para modelar en forma realista singularidades físicamente observables a nivel macroscópico tales como fracturas, fisuras, bandas de deslizamiento, etc. Este enriquecimiento se logra incorporando nuevos grados de libertad al modelo numérico. La trayectoria de discontinuidad se introduce en el interior de los elementos independientemente del tamaño y orientación de los mismos. Luego, las conocidas limitaciones en aquellas estrategias formuladas con elementos estándar en el modelado de fallo, como ser la dependencia espúrea con respecto a la direccionalidad y densidad de discretización, pueden eliminarse en forma eficiente. Otro aspecto favorable es que el refinamiento de malla ya no representa un aspecto estrictamente necesario para capturar tales discontinuidades, con lo cual el modelo discreto puede generarse con un tamaño característico de elemento relativamente grande. El uso de esta metodología, juntamente con algunos ingredientes adicionales, permite actualmente la simulación de problemas que involucran la propagación de múltiples fisuras en sólidos tridimensionales, en un ordenador personal

y a un costo computacional razonable.

Teniendo en cuenta la técnica de enriquecimiento utilizada, pueden distinguirse dos familias de elementos en función del *soporte* que poseen los modos mejorados discontinuos en desplazamientos, definiendo de esta forma el carácter *local* o *global* de los grados de libertad adicionales:

- *Enriquecimiento elemental* [DnG90, Alf03, AG96, GH98, GH03, Jir00, MM03, MM04, Oli6b, OH04, BR00, SS03]: el soporte de cada modo incompatible es un único elemento finito, ver figura 4.1-(a). Tradicionalmente, esta metodología numérica se ha enmarcado en los llamados métodos de deformaciones mejoradas *EAS* (*Enhanced Assumed Strain*) [SR90]. En especial, dentro de esta categoría, adoptamos una versión simétrica y cinemáticamente óptima de la formulación (*KOS* [Jir00]). Con el objeto de identificar esta clase particular de modelo, en el resto del presente trabajo se utilizará la denominación *E-FEM* (*Embedded Finite Element Method*).
- *Enriquecimiento nodal* [BCXZ03, BMUP01, MP03, MSMT00, Sim04, WS01]: el soporte de cada modo discontinuo es aquel dado por la función de forma nodal, es decir aquellos elementos en el entorno de un nodo específico, véase figura 4.1-(b). La mayoría de estas formulaciones han sido desarrolladas en el contexto de los métodos de partición de la unidad, y bajo la sigla *X-FEM* (*eXtended Finite Element Method*) [BMUP01].

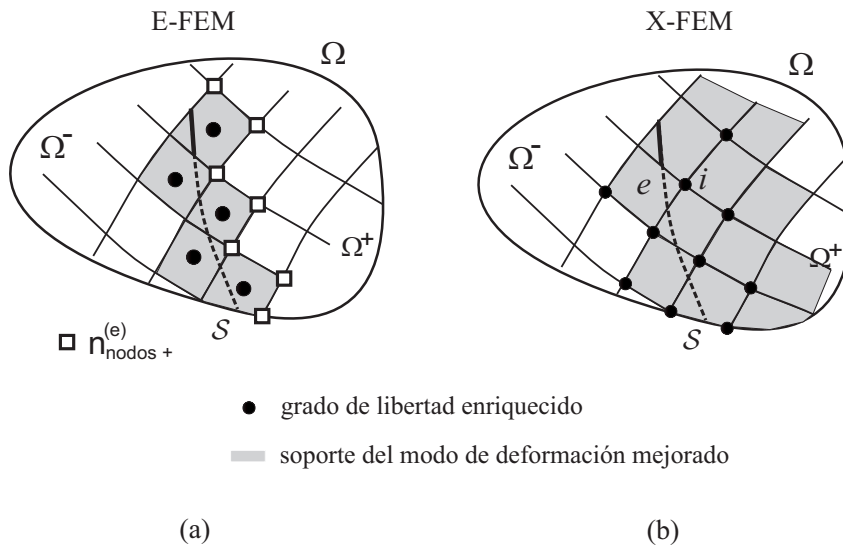


Figura 4.1: Enriquecimiento nodal y elemental. Soporte de los modos discontinuos: (a) Formulación *E-FEM*. (b) Formulación *X-FEM*.

Si bien en la literatura especializada existe una gran cantidad de trabajos que presentan validaciones y el desempeño numérico individual de cada formulación respectivamente, pensamos que un estudio serio y riguroso sobre estas familias de elementos, ideado para medir la performance relativa, es un tópico que todavía no se ha tratado en profundidad. Sólo pueden encontrarse algunas nociones, algo especulativas si se quiere, acerca de aspectos comparativos entre estos modelos basándose en la experiencia particular de cada autor; sin embargo, aspectos cuantitativos tales como errores relativos, velocidad de

convergencia con refinamiento de malla y costo computacional, son características fundamentales de los elementos y que no están suficientemente claras en la actualidad. Este es precisamente el objetivo básico de este capítulo: estimar la performance relativa de ambos tipos de enriquecimientos en términos de aquellos items que pueden ser cuantificados a través de ejemplos numéricos y simulaciones, cubriendo un amplio espectro de situaciones, a saber: casos bidimensionales y tridimensionales, propagación de una sola o múltiples fisuras en el medio.

Para realizar esta comparación tan objetiva como sea posible, se ha intentado la implementación más eficiente para cada caso en el mismo código de elementos finitos. En este sentido, se utiliza un nuevo y robusto algoritmo denominado *esquema implícito-explicito* [OHBL05, OHP⁺04b, OHP⁺04a] para integrar en el tiempo el modelo constitutivo. En esta novedosa estrategia la matriz de rigidez asociada a la aproximación de primer orden del problema resulta definida positiva y constante (por paso de tiempo) aun en presencia de ablandamiento por deformación. La convergencia del problema no lineal se logra siempre en una sola iteración por paso de tiempo, en consecuencia, el proceso de avance temporal es completamente robusto garantizando la misma cantidad de iteraciones para cada implementación, si imponemos idéntico número de intervalos de tiempo, con lo cual las medidas de costo computacional son absolutamente representativas.

El análisis se plantea en términos de un conjunto de ejemplos numéricos. Los respectivos resultados se obtienen utilizando igual tipología de elementos (triángulos o tetraedros lineales) y la misma estructura de datos: malla de elementos finitos, propiedades del material, parámetros del algoritmo de avance temporal, número de pasos de tiempo, procedimiento de linealización, etc. Finalmente, a partir de este estudio, trazamos curvas representativas de respuesta que permiten estimar medidas de error y precisión como así también cuadros comparativos del costo computacional insumido por cada estrategia numérica.

La estructura general del capítulo es la siguiente: en la sección 4.2 se presentan los fundamentos teóricos de la cinemática con modos embebidos mediante enriquecimiento nodal (*X-FEM*) y elemental (*E-FEM*), en la sección 4.3 brindamos detalles específicos asociados al contexto de comparación en términos del modelo constitutivo y aspectos relevantes de implementación computacional. Seguidamente, apartado 4.4, los resultados cuantitativos obtenidos utilizando ambas tecnologías, se comparan en función de la precisión, convergencia, tasa de convergencia y costo de la simulación, para un número representativo de casos de interés. Por último, en la sección 4.5 presentamos algunos comentarios que se extraen de los temas discutidos en este capítulo.

4.2. Formulación del problema

Consideremos un problema típico de falla material en mecánica de sólidos exhibiendo discontinuidades en forma de fisuras o fracturas en el dominio espacial Ω , ver figura 4.2, el cual como se vio en el capítulo 3, puede describirse mediante la cinemática siguiente para un instante arbitrario $t \in [0, T]$ de la historia de carga:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}_S(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}); \quad \mathcal{H}_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ y $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$ representan la componente regular y el salto del campo de desplazamiento total $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, respectivamente.

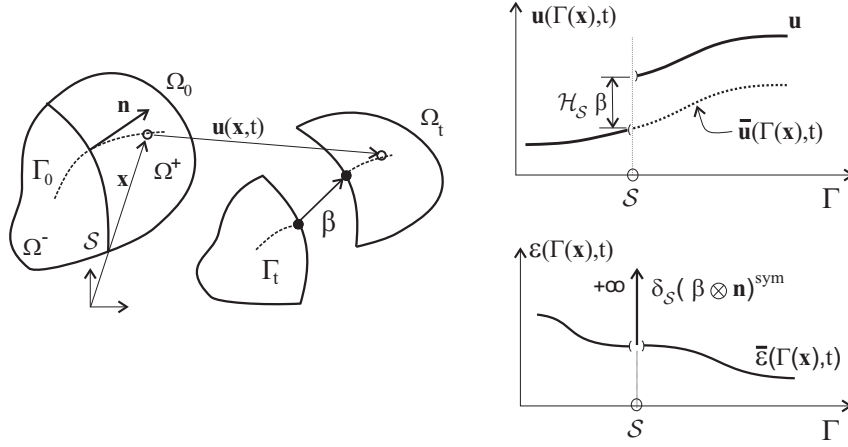


Figura 4.2: Descripción cinemática de discontinuidades fuertes.

Para el caso de geometría lineal e introduciendo el espacio de funciones generalizadas, el campo de deformaciones compatible viene dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = (\nabla \mathbf{u})^{sym} = (\nabla \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}))^{sym} + \mathcal{H}_S(\mathbf{x}) (\nabla \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}))^{sym} + \delta_S [\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})]^{sym} \quad (4.2)$$

siendo \mathbf{n} un vector unitario y normal a \mathcal{S} y δ_S la función de distribución de Dirac. Para el dominio discretizado Ω^h , las ecuaciones variacionales de gobierno, en forma estándar y en ausencia de fuerzas de cuerpo (por simplicidad), se expresan:

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{t}^* d\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} \quad ; \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_0^h \quad (4.3)$$

donde $\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}$ es la frontera con tracciones impuestas \mathbf{t}^* y \mathcal{V}_0^h es el espacio admisible para las variaciones en desplazamiento \mathbf{w}^h , el cual debe ser definido en forma adecuada. Tanto el campo de desplazamiento (ecuación 4.1), como el espacio de aproximación \mathcal{V}_0^h , vienen representados de manera diferente dependiendo del tipo de enriquecimiento por discontinuidades fuertes propuesto (nodal o elemental).

4.2.1. Enriquecimiento de tipo *X-FEM*

En este caso los espacios funcionales para el desplazamiento discontinuo \mathbf{u}^h y su perturbación admisible \mathbf{w}^h se definen mediante:

$$\mathcal{V}^{h(X-FEM)} = \left\{ \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) \mid \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{nodo}} (N_i(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}_i + \mathcal{H}_S N_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}_i) \right\} \quad (4.4)$$

$$\mathcal{V}_0^{h(X-FEM)} = \left\{ \mathbf{w}^h(\mathbf{x}) \mid \mathbf{w}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{nodo}} (N_i(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{w}}_i + \mathcal{H}_S N_i(\mathbf{x}) \delta \boldsymbol{\beta}_i); \right. \\ \left. \delta \boldsymbol{\beta}_i|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \wedge \hat{\mathbf{w}}_i|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \right\} \quad (4.5)$$

en términos de las funciones de forma estándar de elementos finitos N_i (para nuestro estudio asumimos polinomios lineales), el vector de desplazamiento regular $\hat{\mathbf{u}}_i$ en el nodo (i) y el vector de saltos nodales $\boldsymbol{\beta}_i$. Consideramos además que \mathbf{u}^* son desplazamientos impuestos sobre Γ_u y n_{nodo} es la cantidad total de nodos en la malla. El campo de deformación cinemáticamente consistente se escribe entonces como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{x}) = (\nabla \mathbf{u}^h)^{sym} = \sum_{i=1}^{n_{nodo}} [(\nabla N_i \otimes \hat{\mathbf{u}}_i)^{sym} + \mathcal{H}_S (\nabla N_i \otimes \boldsymbol{\beta}_i)^{sym} + \\ + \delta_S (\mathbf{n} \otimes N_i \boldsymbol{\beta}_i)^{sym}] \quad (4.6)$$

Observación 9 *nótese que ambas componentes del campo \mathbf{u}^h satisfacen la siguiente condición: $(N_i(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}_i) \in H^1_{(\Omega^h)}(ndim)$ y $(N_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}_i) \in H^1_{(\Omega^h)}(ndim)$, siendo $H^1_{(\Omega^h)}(ndim)$ el espacio de funciones con derivadas primeras cuadrado integrables de dimensión $ndim$, en consecuencia la discontinuidad se introduce debido a la presencia de la función escalón \mathcal{H}_S actuando sólo sobre el dominio Ω^+ , ver ecuación 4.1 y figura 4.2.*

Si tomamos variaciones respecto a los parámetros independientes $(\hat{\mathbf{u}}_i, \boldsymbol{\beta}_i)$ en la expresión 4.3, se llega al siguiente conjunto de ecuaciones de equilibrio:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\int_{\Omega} (\nabla N_i \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (N_i \mathbf{t}^*) d\Gamma_{\sigma} \right] \cdot \hat{\mathbf{w}}_i = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{w}}_i; \quad i = 1, \dots, n_{nodo} \quad (a) \\ \left[\int_{\Omega} (\mathcal{H}_S \nabla N_i \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega + \int_{\mathcal{S}} (N_i \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{S} \right] \cdot \delta \boldsymbol{\beta}_i = 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\beta}_i; \quad i = 1, \dots, n_{nodo} \quad (b) \end{array} \right. \quad (4.7)$$

donde recordamos que $\boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} = \mathcal{T}$ puede interpretarse como una tracción cohesiva actuando sobre la superficie de discontinuidad y, por ende, la ecuación 4.7-(b) representa un equilibrio ponderado en \mathcal{S} .

4.2.2. Enriquecimiento de tipo *E-FEM*

Para esta metodología, el campo de desplazamiento discreto \mathbf{u}^h , y su variación compatible \mathbf{w}^h , se interpolan utilizando los espacios de aproximación dados a continuación:

$$\mathcal{V}^{h(E-FEM)} = \left\{ \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) \mid \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{nodo}} N_i(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}_i + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \mathcal{M}_S^e \boldsymbol{\beta}^e \right\} \quad (4.8)$$

$$\mathcal{V}_0^{h(E-FEM)} = \left\{ \mathbf{w}^h(\mathbf{x}) \mid \mathbf{w}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{nodo}} N_i(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{w}}_i + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \mathcal{M}_S^e \delta \boldsymbol{\beta}^e; \hat{\mathbf{w}}_i|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \right\} \quad (4.9)$$

siendo n_{elem} el número de elementos de la discretización y $\mathcal{M}_S^e(\mathbf{x})$ la denominada función salto unitario [OHS03], cuyo soporte es un dominio arbitrario Ω_φ que incluye a \mathcal{S} ($\mathcal{S} \subset \Omega_\varphi$):

$$\mathcal{M}_S^e(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_S(\mathbf{x}) - \varphi^e(\mathbf{x}) \quad (4.10)$$

y donde $\varphi^e(\mathbf{x})$ representa una función continua en Ω que satisface:

$$\varphi^e(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in (\Omega \setminus \Omega_\varphi) \cap \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in (\Omega \setminus \Omega_\varphi) \cap \Omega^+ \end{cases} \quad (4.11)$$

Observación 10 típicamente en el contexto del MEF, Ω_φ estará formado por el conjunto de elementos finitos atravesados por la interface de discontinuidad \mathcal{S} .

En particular, si adoptamos la siguiente definición para la función $\varphi^e(\mathbf{x})$:

$$\varphi^e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{nodo+}} N_i^e(\mathbf{x}) \quad (4.12)$$

\mathcal{M}_S^e queda definida en forma compacta asociada a un único elemento Ω^e (de allí el supraíndice e) luego, el modo enriquecido ($\mathcal{M}_S^e \boldsymbol{\beta}^e$) posee soporte local quedando desacoplado del resto de los modos discontinuos activos, con lo cual es factible realizar una condensación estática del mismo a nivel elemental. En 4.12 se considera además que n_{nodo+} representa la cantidad de nodos del elemento en estudio ubicados sobre la porción del dominio Ω^+ .

Las funciones $\mathcal{H}_S(\mathbf{x})$, $\varphi^e(\mathbf{x})$ y $\mathcal{M}_S^e(\mathbf{x})$, para el caso particular de elementos triangulares e interpolación lineal, pueden observarse en la figura 4.3.

El tensor de deformación se expresa ahora mediante:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{x}) &= (\nabla \mathbf{u}^h)^{sym} = \sum_{i=1}^{n_{nodo}} (\nabla N_i \otimes \hat{\mathbf{u}}_i)^{sym} - \\ &- \sum_{e=1}^{n_{elem}} [(\nabla \varphi^e \otimes \boldsymbol{\beta}^e)^{sym} - \delta_S (\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\beta}^e)^{sym}] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Observación 11 en vista de 4.8 se establece que: $(N_i(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}_i) \in H_{(\Omega^h)}^{1(ndim)}$ y $\boldsymbol{\beta}^e \in L_{2(\Omega^h)}^{(ndim)}$, donde $L_{2(\Omega^h)}^{(ndim)}$ es el espacio de funciones cuadrado integrables de dimensión $ndim$.

Observación 12 en la formulación E-FEM y para una aproximación lineal por tramos del desplazamiento regular $\bar{\mathbf{u}}$, a partir de 4.13 se deduce que el tensor de deformaciones, una vez activa la cinemática singular, es el mismo a ambos lados de la discontinuidad ($\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega^-} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega^+}$). Por el contrario, en el modelo X-FEM, éste es distinto ($\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega^-} \neq \boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega^+}$) debido al término $\mathcal{H}_S(\nabla N_i \otimes \boldsymbol{\beta}_i)^{sym}$ en 4.6.

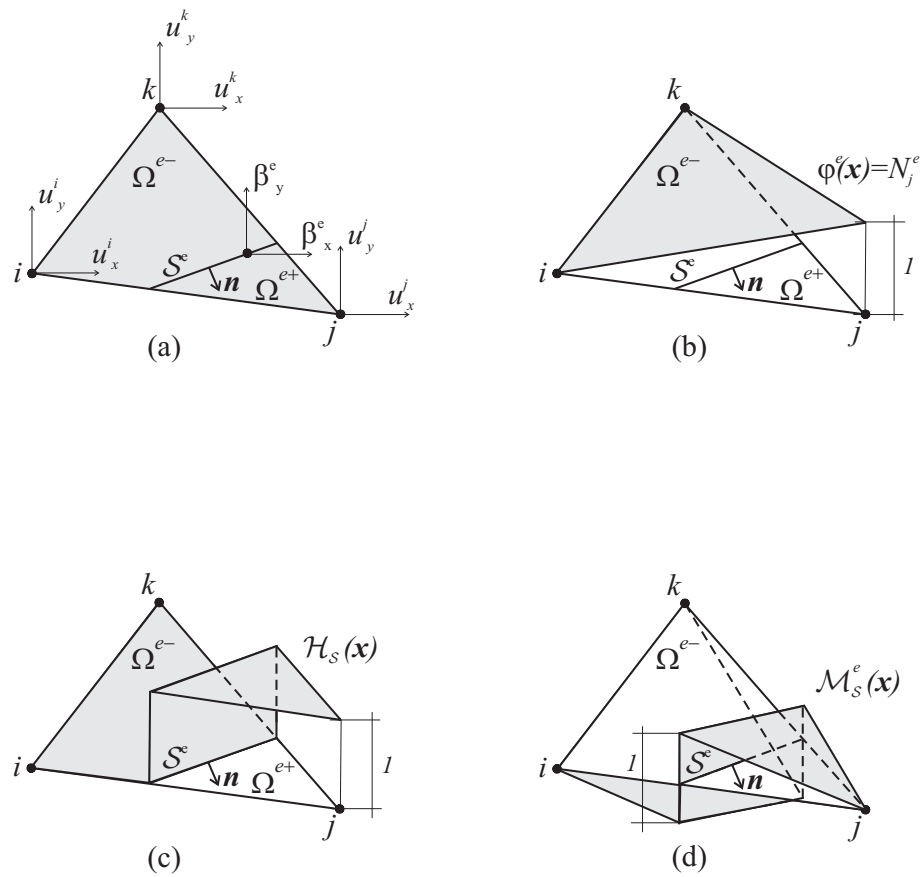


Figura 4.3: Interpolación del campo de desplazamientos para la formulación E -FEM. Caso particular de triángulo con interpolación lineal: (a) Grados de libertad del elemento. (b) Función $\varphi^e(\mathbf{x})$. (c) Función escalón $\mathcal{H}_S(\mathbf{x})$. (d) Función salto unitario $\mathcal{M}_S^e(\mathbf{x})$.

Al igual que en el caso previo, tomando variaciones con respecto a los parámetros linealmente independientes que gobiernan el modelo $(\hat{\mathbf{u}}_i, \boldsymbol{\beta}^e)$, obtenemos las ecuaciones equilibrio que definen una formulación *E-FEM cinemáticamente consistente* (*variacionalmente consistente*) [Jir00, LRO93]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\int_{\Omega} (\nabla N_i \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (N_i \mathbf{t}^*) d\Gamma_{\sigma} \right] \cdot \hat{\mathbf{w}}_i = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{w}}_i; \quad i = 1, \dots, n_{nodo} \quad (a) \\ \left[\int_{\Omega^e} (\nabla \varphi^e \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega + \int_{\mathcal{S}^e} (\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{S} \right] \cdot \delta \boldsymbol{\beta}_e = 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\beta}_e; \quad e = 1, \dots, n_{elem} \quad (b) \end{array} \right. \quad (4.14)$$

El problema se focaliza entonces en resolver 4.7 y 4.14 de manera eficiente y evaluar la performance relativa de cada implementación. Este es el objetivo que nos planteamos en adelante.

4.3. Escenario de comparación

Para realizar un estudio comparativo riguroso entre las dos descripciones cinemáticas discutidas, se debe definir un escenario común y consistente que quedará definido en términos del modelo constitutivo, los algoritmos numéricos utilizados y la implementación de los elementos finitos. Estos aspectos se describen en las secciones siguientes.

4.3.1. Modelo constitutivo: ley cohesiva tracción-salto proyectada

El comportamiento material se idealiza mediante un modelo constitutivo de daño continuo isótropo, equipado con una ley de evolución con ablandamiento por deformación. En particular, y como es común en el modelado de fractura frágil, asumimos que la degradación se produce sólo para tensiones de tracción. En el capítulo 2, se describió una ley adecuada para representar este fenómeno (allí denominada *daño sólo tracción*), y es la que utilizamos en este análisis.

En la sección 3.4.2 del capítulo previo se demostró además que, en el contexto de la aproximación por discontinuidades fuertes del continuo (*CSDA*), el modelo constitutivo del continuo, tras la activación de la cinemática de discontinuidad fuerte 4.2, induce automáticamente una ley discreta cohesiva de tipo tracción-salto (\mathcal{T} vs. $\boldsymbol{\beta}$) en la interface \mathcal{S} [Oli00, OH04]. Este concepto de proyección o degeneración del modelo continuo a discreto es independiente de la formulación a nivel de tipología de elemento, y por ende se mantiene para ambos enriquecimientos.

4.3.2. Implementación por elementos finitos

Como tecnología subyacente de elementos finitos hemos adoptado triángulos y tetraedros lineales, con ello nos referimos al grado de la función polinomial en la interpolación del desplazamiento regular $\bar{\mathbf{u}}$. Dado que uno de los tópicos más relevantes a comparar es la eficiencia computacional, se ha dedicado mucho esfuerzo en intentar un algoritmo numérico suficientemente optimizado para ambos modelos matemáticos.

En este sentido, los grados de libertad asociados al enriquecimiento de tipo *E-FEM* (*locales*) se condensan en forma estática y a nivel de cada elemento. Para el caso de la metodología *X-FEM* esta estrategia no es posible dado el carácter global de los mismos, en consecuencia la optimización se realiza considerando que los grados de libertad nodales, responsables de introducir modos enriquecidos de deformación, se activan exclusivamente para aquellos nodos pertenecientes a elementos de la malla que están intersecados por la superficie de discontinuidad y sólo después que se detecta en ellos el criterio de falla (aquí asumido como el de bifurcación discontinua $t = t_B$). Además, las ecuaciones adicionales a incorporar al sistema global, conforme se agregan modos enriquecidos, se enumeran de forma tal que su impacto sobre la estructura banda de la matriz de rigidez se minimice. El resto de los elementos se computan siguiendo una implementación clásica sin enriquecimiento alguno.

Las reglas de integración utilizadas también merecen un tratamiento distintivo en cada formulación, véase figura 4.4. Para triángulos lineales y enriquecimiento *E-FEM* se consideran dos puntos de integración *PGR1* y *PGS1*, correspondiente al dominio regular $\Omega \setminus \mathcal{S}^e$ y a la parte singular \mathcal{S}^e , respectivamente. Por el contrario el modelo *X-FEM* requiere de cuatro puntos de Gauss, dos regulares (*PGR1* y *PGR2*) y dos singulares (*PGS1* y *PGS2*), cuyos pesos W_{PG} se muestran en la misma figura.

Para los tetraedros lineales se han adoptado dos puntos de muestreo (uno regular *PGR1* y otro singular *PGS1*) en el modelo *E-FEM*, mientras que al menos se hace necesario contar con cinco puntos de integración para la formulación *X-FEM* (dos regulares y tres singulares). La precisión de esta regla de tres puntos en \mathcal{S}^e para los tetraedros *X-FEM*, en el caso particular que el dominio singular es un cuadrángulo, se ha comparado con la regla teóricamente exacta de cuatro puntos, sin encontrar diferencias sustanciales en los resultados cualitativos y cuantitativos. Por este motivo y apelando a razones de simplicidad de programación y tiempo de cálculo, en este análisis se ha considerado la utilización de tres puntos de Gauss para todos los casos independientemente de la topología de la superficie de discontinuidad, en la estrategia *X-FEM*.

Así mismo, y con el fin de minimizar el costo computacional extra que introduce el uso de esquemas de integración de alto orden en ambos modelos, estas cuadraturas específicas se activan sólo para los elementos atravesados por la superficie de falla. El resto de los elementos, es decir aquellos que permanecen en régimen estable material, se integran de forma usual utilizando un único punto de Gauss.

El valor k en la figura 4.4, tan pequeño como lo permita la precisión del ordenador [OH04], es un parámetro que se utiliza en la *CSDA* para regularizar la función delta de Dirac ($\delta_{\mathcal{S}} \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$), en donde se asume que: $h \rightarrow k \approx 0$. Definimos además ℓ^e y \mathcal{A}^e como una magnitud de longitud (2D) y área (3D) de la discontinuidad en el interior del elemento finito, respectivamente.

Teniendo en cuenta el conjunto de especificaciones mencionadas en los párrafos anteriores, ambas formas de enriquecimiento, *E-FEM* y *X-FEM*, se han implementado en el mismo código de análisis mecánico no lineal por elementos finitos. En consecuencia, aquellos ingredientes básicos del proceso de cálculo no asociados específicamente a la descripción cinemática, tales como esquemas de avance temporal, algoritmos de trazado de discontinuidad, métodos de continuación, solver no-lineal, etc., son comunes para los dos modelos y no tendrán efecto alguno sobre las medidas de performance relativa que se pretenden cuantificar.

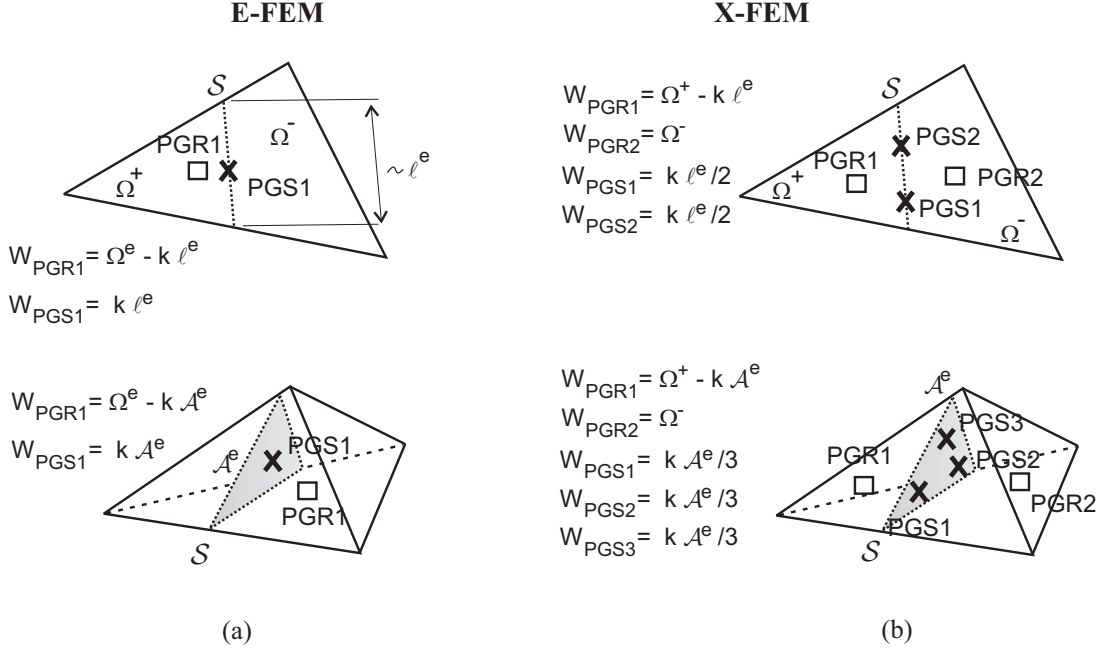


Figura 4.4: Definición de cuadraturas de integración: (a) Reglas para triángulos y tetraedros lineales correspondientes a la formulación *E-FEM*. (b) Reglas para triángulos y tetraedros lineales correspondientes a la formulación *X-FEM*.

4.3.3. Propagación de discontinuidades en el medio

Un aspecto importante en la simulación numérica de problemas de propagación de fisuras mediante discontinuidades fuertes, es la predicción correcta de la trayectoria de discontinuidad y por lo tanto la determinación de los elementos que deben enriquecerse con modos singulares de deformación. Para este propósito existen varias estrategias posibles, denominadas metodologías de trazado de discontinuidad ([BMUP01, FH04, MM03, OH04]). En este trabajo, se adopta un algoritmo global de trazado de discontinuidad [OH04], basado en los ingredientes siguientes:

- el instante de tiempo inicial (t_B), donde la cinemática admite discontinuidades, y el vector normal a la orientación de propagación $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, en cada punto material \mathbf{x} , se determina mediante un estudio de bifurcación discontinua [WS87], basado en las características espectrales del tensor de localización \mathbf{Q} . Para tal fin utilizamos la metodología presentada en el capítulo 2 (sección 2.7.1), que permite la obtención de fórmulas cerradas para el cómputo de la dirección crítica de bifurcación θ^{crit} determinando la dirección $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ para cada paso de tiempo. Una vez que en un elemento finito, el modelo constitutivo pierde el carácter elíptico ($t \geq t_B$), permitiendo bifurcaciones locales en el campo tasa de deformación, el versor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ se fija para el análisis posterior. Debe notarse entonces que el cálculo de θ^{crit} tiene sentido sólo hasta que se alcanza la condición de singularidad de \mathbf{Q} ($det(\mathbf{Q}) = 0$, $t = t_B$).
- para cada paso de tiempo se construye una familia $\mathcal{F} = \{C_i\}$ superficies envolventes al campo vectorial \mathbf{T} , ortogonal a $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Dado que por hipótesis se conoce en cada punto material \mathbf{x} el vector \mathbf{n} normal a la discontinuidad \mathcal{S} , es factible asumir también

la existencia de un nuevo campo vectorial \mathbf{T} , denominado vector de dirección de propagación, tal que éste satisfaga: $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0 \wedge \|\mathbf{T}\| = 1$. Por ejemplo para un caso 2D, en la figura 4.5 se observa la familia \mathcal{F} compuesta por el conjunto de curvas \mathcal{C}_i . Luego, las envolventes a \mathbf{T} representan *posibles* trayectorias de falla, las cuales pueden ser descritas en términos de una función escalar $\xi(\mathbf{x})$, si asumimos que cada \mathcal{C}_i representa una curva de nivel $\xi(\mathbf{x}) = cte$. Con esta idea en mente se demuestra que, desde el punto de vista matemático, la discusión previa adquiere un formato muy similar a la resolución de un problema escalar de conducción de calor estacionario adiabático, siendo $\xi(\mathbf{x})$ la función temperatura¹. Debido a tal analogía, esta estrategia se la conoce también como algoritmo pseudo-térmico [OH04]. Luego aquellos elementos intersecados por el mismo miembro (la misma curva o superficie envolvente \mathcal{C}_i) de la familia \mathcal{F} y que satisfacen la condición de localización ($t \geq t_B$), se enriquecen con modos discontinuos mediante la incorporación de la cinemática 4.6 ó 4.13, de acuerdo al tipo de aproximación *E-FEM* ó *X-FEM* adoptada. Para tal fin, téngase en cuenta un algoritmo como el que indica a continuación:

- determinación del primer elemento *raíz* y la primer fisura activa: el primer elemento que bifurca se lo etiqueta como r_1 (*raíz* 1). La isoterma \mathcal{C}_1 evaluada en el centroide del mismo se considera representativa de la primer trayectoria probable de falla y por ende todos los elementos que comparten esta curva de nivel pertenecen a la misma discontinuidad potencial. Denominamos primer fisura activa a la poligonal $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{C}_1$ compuesta por aquellos segmentos de recta de \mathcal{C}_1 y que además intersecan elementos donde se ha verificado el criterio de falla, véase figura 4.5-(a).
- identificación de nuevas superficies de discontinuidad \mathcal{S}_i : en cada paso de tiempo se verifica si algún nuevo elemento satisface por primera vez la condición de bifurcación. Si así sucede y el mismo no está en el camino probable \mathcal{C}_{i-1} de una fisura activa, razonando de igual forma que en el punto anterior se lo etiqueta como r_i (*raíz* i) originando una nueva trayectoria de discontinuidad \mathcal{S}_i y su correspondiente curva de nivel \mathcal{C}_i , ver por ejemplo la representación esquemática en la figura 4.5-(b).

¹Este problema pseudo-térmico se resuelve a cada paso de análisis mediante *MEF*, obteniendo los valores de temperaturas nodales $\hat{\xi}(\mathbf{x})$. En resumen, se tiene un esquema global de tipo mecánico-térmico desacoplado.

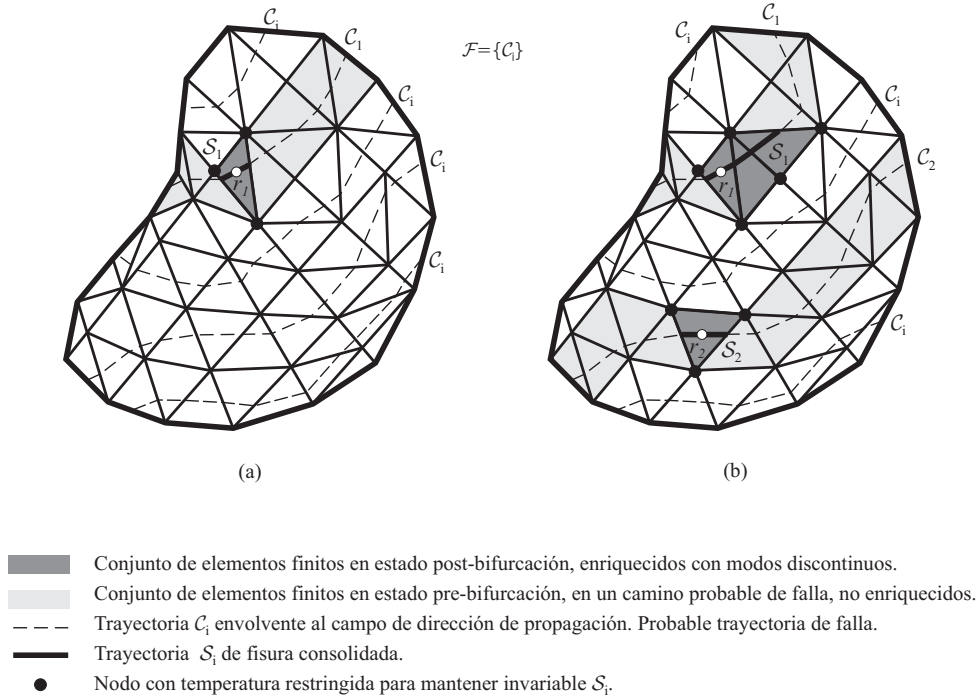


Figura 4.5: Representación esquemática del algoritmo global de trazado de discontinuidad: (a) Primer elemento raíz r_1 y primera fisura activa S_1 . (b) Desarrollo de una nueva fisura activa S_2 .

Observación 13 comparando las figuras 4.5-(a) y 4.5-(b) se advierte que la trayectoria admisible de falla C_i puede variar conforme avanza el tiempo, véase en particular la isoterma C_1 . No obstante una vez que se consolida la fisura, es decir se satisface algún criterio específico de falla, S_i permanece invariable en el análisis.

Consideremos que, mediante el procedimiento descrito anteriormente, hemos detectado al paso de tiempo actual (t) que en el elemento en estudio, denominado por comodidad \mathcal{E}_i , debe incluirse un modo mejorado de deformación. El problema se focaliza ahora en disponer de una lógica adecuada que nos permita establecer qué nodo \bar{n}_i , perteneciente a \mathcal{E}_i , debe activar sus grados de libertad adicionales de saltos en desplazamientos.

Para la formulación $E-FEM$, este procedimiento resulta trivial, debido al soporte interno del enriquecimiento discontinuo a introducir (\bar{n}_i es un nodo interno). En la figura 4.6 se puede observar este proceso, conforme avanza el tiempo, en un parche arbitrario de elementos finitos atravesado por una línea de falla.

En el caso del modelo $X-FEM$, debemos garantizar la continuidad del campo salto de desplazamientos β entre las interfaces de los elementos, y por tal razón se necesita una estrategia algo más elaborada que determine el nodo ($\bar{n}_i \in \mathcal{E}_i$) a enriquecer. Esta es una característica fundamental de la aproximación. El hecho de contar con las familias de curvas (o superficies) probables de discontinuidad (C_i), resultado del esquema pseudo-térmico, facilita en gran medida el planteamiento algorítmico de este problema. La figura 4.6 muestra, para una porción de la malla, la secuencia correcta de activación de nodos a medida que los elementos en la trayectoria de fisura alcanzan la condición de localización. Allí también se observa el soporte espacial de cada modo adicional y la componente realmente significativa que aporta enriquecimiento cinemático actuando sobre Ω^+ .

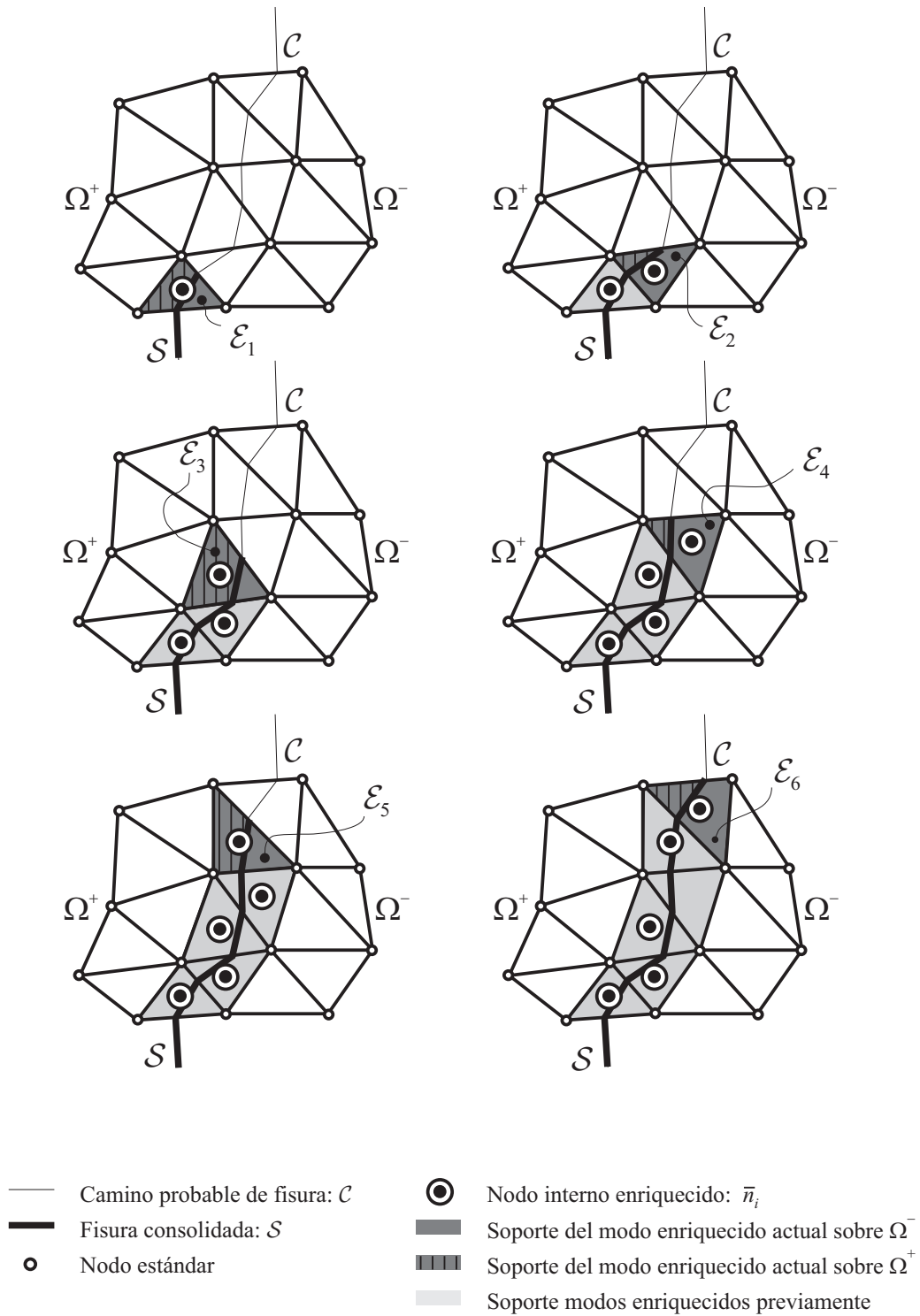


Figura 4.6: Secuencia de activación de los nodos asociados a los grados de libertad de saltos en desplazamientos β para la formulación $E-FEM$.

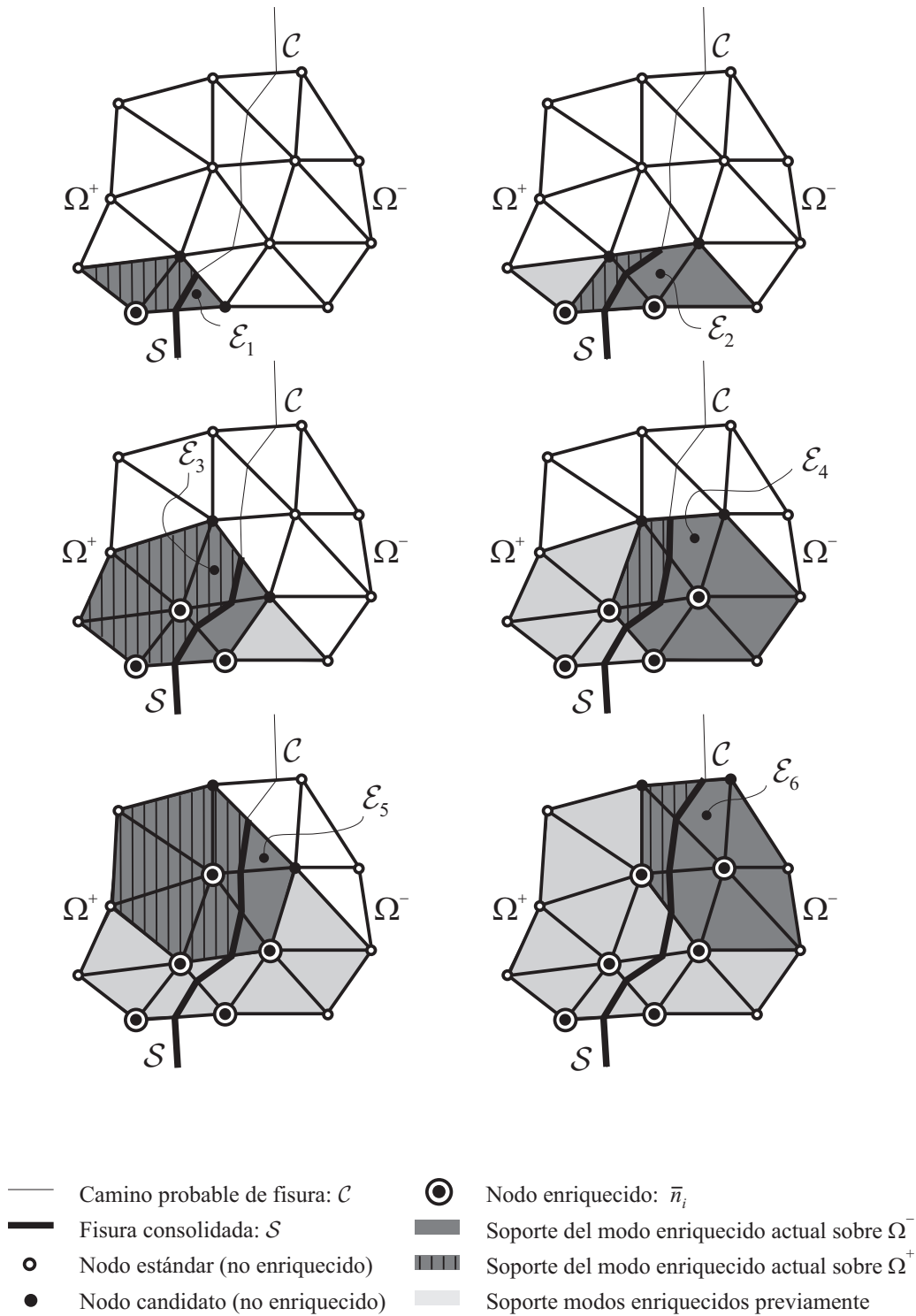


Figura 4.7: Secuencia de activación de los nodos asociados a los grados de libertad de saltos en desplazamientos β para la formulación $X-FEM$.

4.3.4. Robustez. Esquema de integración implícito-explicito

La falta de robustez de los esquemas numéricos al simular problemas que involucran el fenómeno de localización de deformaciones, inducido por leyes evolutivas con ablandamiento, es un hecho bien conocido y reportado en publicaciones, congresos y seminarios de mecánica de fractura. Aun cuando el problema de valores de contorno esté bien formulado desde el punto de vista matemático, la pérdida del carácter *definido positivo* del operador tangente constitutivo, deteriora progresivamente la matriz de rigidez algorítmica del modelo a medida que la falla material propaga a través de la malla de elementos finitos. Como consecuencia directa, se afecta significativamente la robustez del procedimiento utilizado para resolver el problema no lineal, entendida como la facilidad para converger a la solución que predice la estrategia numérica. En la mayoría de los casos esta convergencia sólo puede lograrse mediante el uso de sofisticadas técnicas de control automático del paso de tiempo lo cual, muchas veces, se traduce en un costo computacional excesivo. Para sortear este importante inconveniente, en este estudio se ha adoptado un método denominado *esquema implícito-explicito* ([OHBL05, OHP⁺04b]) para integrar en el tiempo el modelo constitutivo. Dos son las principales ventajas de este procedimiento, a saber:

- el tensor constitutivo tangente algorítmico resultante es siempre *definido positivo*, aun en presencia de ablandamiento por deformación, evitando de esta forma la razón fundamental de la pérdida de robustez. Esto último se logra a expensas de introducir un error adicional en el esquema de integración si lo comparamos con los métodos implícitos estándar. Como consecuencia siempre se obtiene un resultado, independientemente de la longitud del paso de tiempo. La precisión de esta técnica puede incrementarse, y lo que es más importante puede *controlarse*, acortando el intervalo de tiempo.
- el tensor constitutivo tangente algorítmico resultante es constante, por cada paso, para el formato en pequeñas deformaciones adoptado. Luego, la convergencia en el proceso no lineal para equilibrar las fuerzas internas y externas, se logra en *sólo una única iteración por paso de tiempo*.

Los efectos favorables que introduce el uso de esta técnica numérica en el problemas con ablandamiento son realmente significativos, tanto en robustez como en costo computacional, cuando se los compara con resultados obtenidos utilizando estrategias implícitas [OHBL05]. Este es el motivo de haber seleccionado el *esquema implícito-explicito* (a nuestro criterio el algoritmo disponible más eficiente) para ambas formulaciones de elementos, *E-FEM* y *X-FEM*. Además, dado que la robustez está garantizada, podemos asegurar, en cada tecnología cinemática, la misma cantidad de iteraciones requeridas para trazar la respuesta de un problema arbitrario con sólo imponer idéntico número de pasos de tiempo. En estas circunstancias la comparación se torna completamente objetiva en términos de precisión y costo computacional.

4.4. Ejemplos numéricos

El desempeño numérico de cada modelo particular de discontinuidades fuertes, como así también las validaciones frente a informes experimentales, puede consultarse a través de una gran cantidad de trabajos documentados en los últimos años, y por ello no es nuestra meta repetir aquí un estudio similar. Por el contrario, estamos especialmente interesados en una comparación de la performance relativa entre las formulaciones $E-FEM$ y $X-FEM$, teniendo en cuenta para ello el escenario numérico discutido previamente (apartado 4.3). Con este propósito en mente, se propone la resolución de un conjunto representativo de problemas de mecánica de fractura que incluyen casos bidimensionales, tridimensionales, considerando la propagación de una o múltiples fisuras.

A través de este análisis intentamos obtener conclusiones rigurosas en aspectos de singular importancia en lo que concierne al modelado de falla material, como ser: (i) saber si para un mismo problema, las estrategias $E-FEM$ y $X-FEM$ brindan los mismos resultados cualitativos y cuantitativos; (ii) comparación de tales resultados en términos de precisión en la respuesta; (iii) tasa de convergencia a medida que se refina la malla de elementos finitos; (iv) costo computacional relativo.

Todos los ejemplos desarrollados seguidamente, se computaron en un ordenador personal equipado con un procesador Pentium IV-3,0 Ghz, 512 Mb Ram. Para interpretar los reportes comparativos de eficiencia computacional debe considerarse la nomenclatura detallada en el cuadro 4.1.

Nomenclatura	Significado
N_{step}	Número de pasos de tiempo utilizados para el análisis completo.
N_{ei}	Número de ecuaciones iniciales (al inicio del análisis, sin ningún grado de libertad enriquecido).
N_{ef}	Número de ecuaciones finales (al final del análisis, incluyendo los grados de libertad enriquecidos).
RN_e	Relación entre el número de ecuaciones: N_{ef}/N_{ei} .
b_{wi}	Semi ancho de banda promedio inicial de la matriz de rigidez.
b_{wf}	Semi ancho de banda promedio final de la matriz de rigidez.
Rb_w	Relación entre el semi ancho de banda promedio: b_{wf}/b_{wi} .
T_a	Tiempo absoluto de CPU para cada formulación (en segundos).
RCC	Costo computacional relativo: $(T_a(X-FEM)/T_a(E-FEM))$.

Cuadro 4.1: Nomenclatura y definiciones a considerar para el análisis de eficiencia computacional.

4.4.1. Viga doble cantilever. Test con cargas diagonales.

Este ensayo representa un ejemplo clásico en fractura de hormigón. Consiste en una placa cuadrada con una única entalla profunda sometida a un sistema de fuerzas auto equilibradas que inducen cierta inclinación en la trayectoria de propagación de fisura y, en consecuencia, un modo mixto de apertura. Experimentalmente el problema fue estudiado por Kobayashi et al. [KHL85]. En Rots [Rot88] y Oliver et al. [OHPC02] pueden encontrarse además aproximaciones numéricas para el caso 2D. En esta sección reproducimos el test haciendo uso de modelos bidimensionales y tridimensionales.

La figura 4.8 muestra las relaciones geométricas, la distribución espacial y variación temporal de cargas. La fuerza de compresión diagonal (F_2) se materializa mediante un esquema de control de carga mientras que la de apertura (F_1) con control de desplazamiento en su punto de aplicación. Se diferencian claramente dos intervalos. El primero caracterizado por un incremento monótono de ambas fuerzas mientras que, en el segundo, la componente diagonal permanece invariable en el tiempo cuando alcanza el valor umbral 3,78 [KN] (véase en particular la figura 4.8-(b)). Los parámetros mecánicos adoptados para la simulación numérica son los siguientes: $E = 30500$ [MPa] (módulo de Young), $\nu = 0,2$ (relación de Poisson), $G_f = 100$ [N/m] (energía de fractura), $\sigma_y = 3$ [MPa] (tensión última uniaxial). El espesor de la estructura es: $e = 0,0508$ [m]. La ley constitutiva utilizada se corresponde con un modelo constitutivo de daño sólo tracción con ablandamiento exponencial, ver capítulo 2 (sección 2.6).

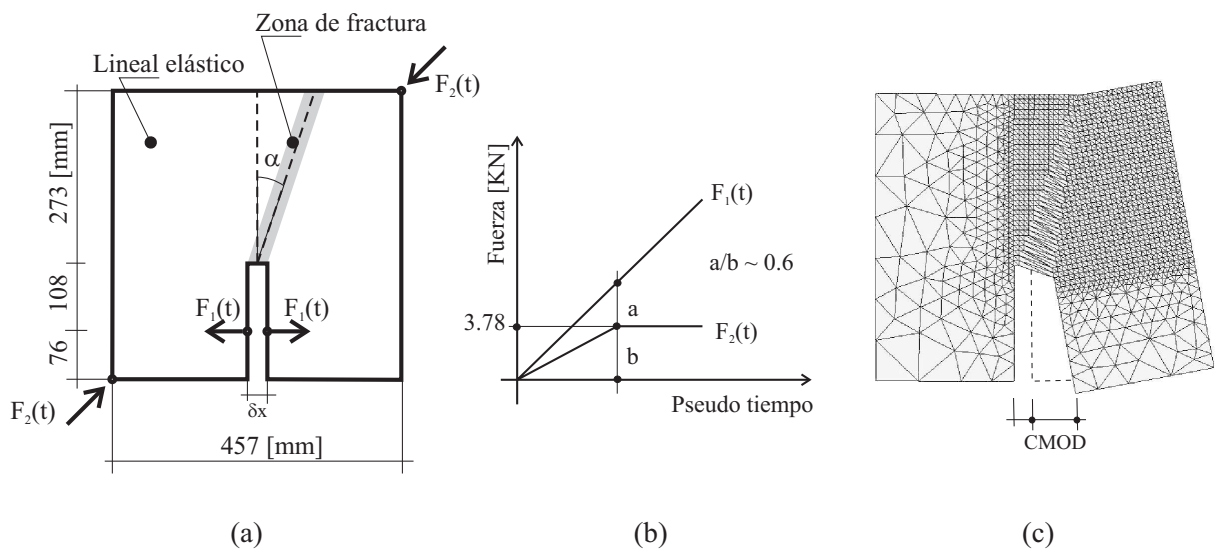


Figura 4.8: Viga doble cantilever. Test con cargas diagonales: (a) Geometría y condiciones de contorno. (b) Historia de carga. (c) Configuración deformada.

El motivo de elegir este test para propósitos de comparación se fundamenta en las razones dadas a continuación:

- la evidencia experimental revela que el camino de fisura sigue una superficie plana inclinada aproximadamente 71° con respecto al eje horizontal. En consecuencia la simulación puede realizarse independientemente del procedimiento de trazado de discontinuidad, si simplemente imponemos esa dirección específica de propagación. Esta hipótesis se ha adoptado para el modelado 2D y 3D sólo de este problema en especial. En el resto de los ejemplos, la trayectoria de falla \mathcal{S} se determina mediante el algoritmo de trazado global de discontinuidad, discutido oportunamente en la sección 4.3.3.
- para el análisis 2D es muy sencillo construir mallas estructuradas de tal forma que la superficie de fallo corte a los elementos en dirección arbitraria. Tales configuraciones de malla representan un desafío para la formulación E -FEM, la cual se sabe que funciona particularmente bien cuando la orientación de la fisura es paralela a algún lado del elemento finito [Jir00].

Modelado 2D.

En esta situación asumimos condición de tensión plana. La convergencia, conforme se refina la discretización, ha sido analizada utilizando una secuencia decreciente de mallas $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ en la zona próxima a la falla, con un tamaño característico de elemento $h_e = 32, 16, 8$ y 4 [mm], ver figura 4.9.

Observación 14 *advértase que para obtener conclusiones rigurosas, se consideran 4 configuraciones uniformes, y en este caso particular además estructuradas, donde el tamaño de los elementos en la zona de fractura se reduce en proporción geométrica sucesivamente a la mitad, aun en las cercanías de la entalla.*

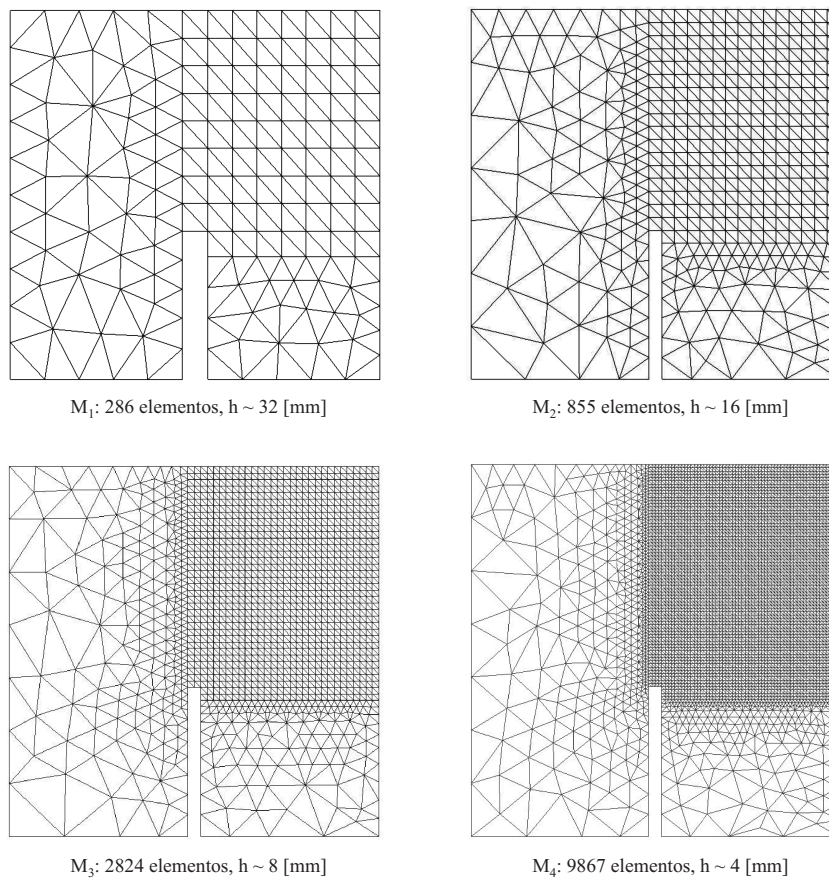


Figura 4.9: Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Secuencia de mallas de elementos finitos $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

La figura 4.8-(c) muestra la geometría en la configuración deformada para un estado avanzado del proceso de falla. El mecanismo dominante de deformación se concentra en una banda de elementos mientras que en el resto del cuerpo puede asumirse un movimiento como sólido rígido. Este mismo modo de colapso se ha obtenido para todas las mallas y para ambas formulaciones de elementos finitos.

Sea $S^{efem} = \{S_1^{efem}, S_2^{efem}, S_3^{efem}, S_4^{efem}\}$ y $S^{xfem} = \{S_1^{xfem}, S_2^{xfem}, S_3^{xfem}, S_4^{xfem}\}$ la secuencia de las curvas solución obtenidas numéricamente (fuerza \mathbf{F}_1 vs. $CMOD^2$) para la formulación $E-FEM$ y $X-FEM$ respectivamente, las cuales se han graficado en la figura 4.10-(a) y 4.10-(b) para cada modelo. En ambos casos, se observa una clara convergencia cualitativa en términos del refinamiento de malla.

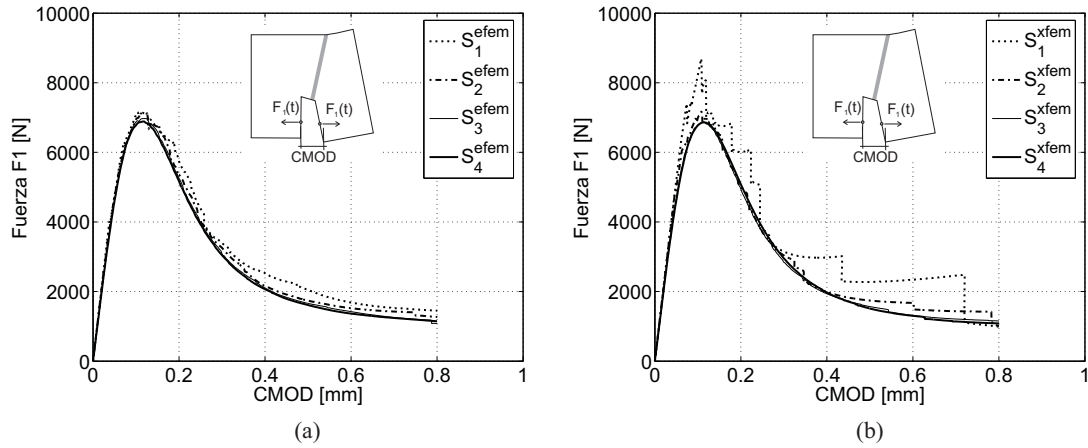


Figura 4.10: Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{F}_1 vs. $CMOD$): (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$.

En la figura 4.11 se comparan por separado cada par de curvas S_i^{efem} vs. S_i^{xfem} ($i = 1, \dots, 4$) obtenidas mediante el procedimiento $E-FEM$ y $X-FEM$ respectivamente. Nótese que las soluciones provistas por ambos métodos convergen una hacia otra, si refinamos suficientemente la malla.

Para transformar estas observaciones cualitativas, en magnitudes numéricas susceptibles de cuantificación y análisis, a continuación se computan medidas de error valuadas en términos de una norma L^2 , mediante la fórmula siguiente:

$$\|e_{CMOD_i}\|_{L^2} = \frac{\|S_i - S_{ref}\|_{L^2}}{\|S_{ref}\|_{L^2}} = \frac{\sqrt{\int_0^\zeta (S_i - S_{ref})^2 d\zeta}}{\sqrt{\int_0^\zeta (S_{ref})^2 d\zeta}} ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.15)$$

donde $\|e_{CMOD}\|_{L^2}$ representa el error relativo de la respuesta S_i , en norma L^2 , con respecto a la solución *exacta* S_{ex} . Dado que no conocemos S_{ex} , aquella obtenida con la configuración de malla más refinada se toma como solución de referencia $S_{ex} \approx S_{ref} \equiv S_4$. El parámetro de integración ζ debe entenderse como el máximo valor del desplazamiento en modo apertura ($\zeta = \max(CMOD)$), que es el mismo para todos los casos.

En la figura 4.12-(a) se ha graficado un clásico diagrama logarítmico de análisis de convergencia, mostrando el error relativo obtenido tras aplicar la ecuación 4.15 en términos del tamaño característico del elemento finito, h_e . Allí se observa una mayor precisión del esquema $E-FEM$, y que ambos métodos exhiben una tasa de convergencia super-lineal, en el sentido que la pendiente de la recta de regresión lineal está comprendida en el intervalo $[1, 2]$.

²Con la sigla $CMOD$ hacemos referencia al modo exclusivo de apertura (Crack Mouth Opening Displacement).

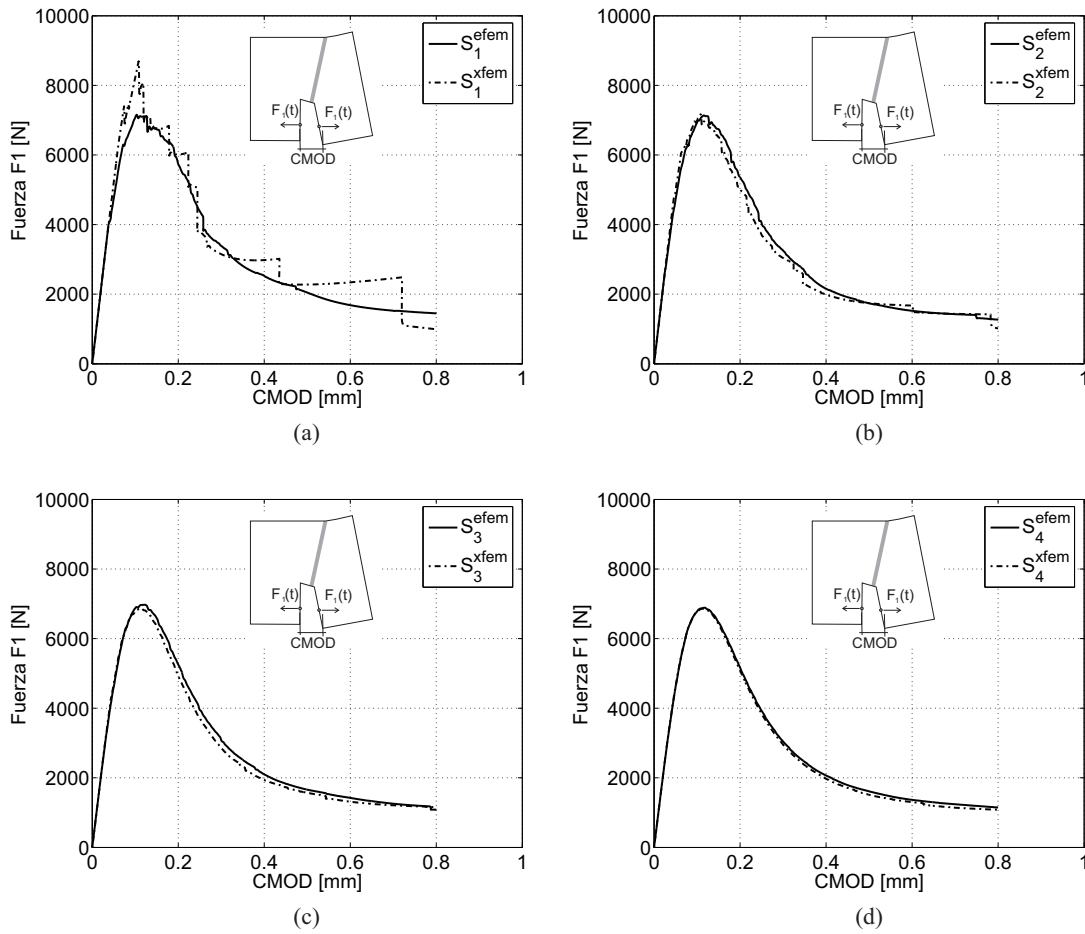


Figura 4.11: Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Fuerza F_1 vs. $CMOD$. Comparación de soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ para cada malla de la secuencia: (a) Malla M_1 . (b) Malla M_2 . (c) Malla M_3 . (d) Malla M_4 .

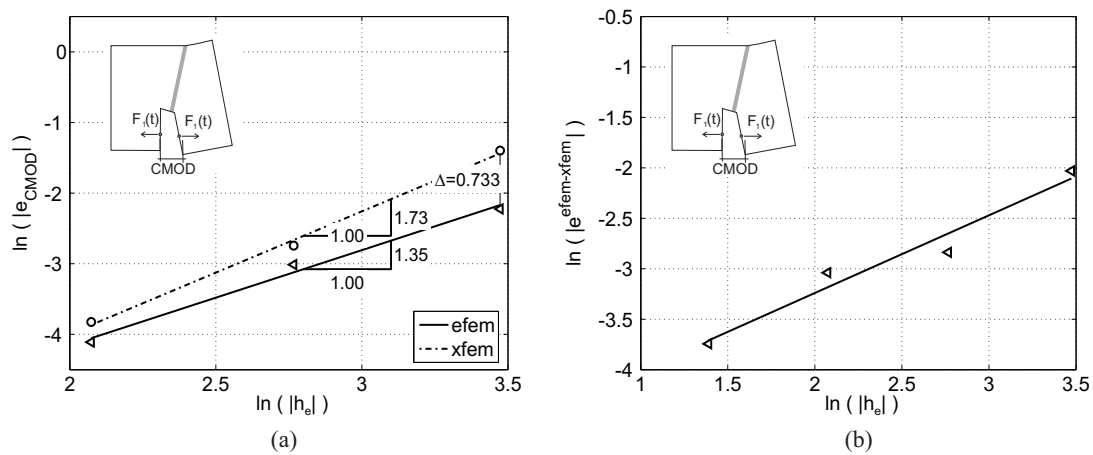


Figura 4.12: Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Diagramas de convergencia en escala logarítmica: (a) Error relativo $\|e_{CMOD}\|_{L^2}$ vs. tamaño característico del elemento h_e . (b) Error relativo $\|e^{efem-xfem}\|_{L^2}$ de la diferencia entre las soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ vs. tamaño característico del elemento h_e .

Dado que el error se ha evaluado en función de la solución más refinada para cada formulación de elementos individualmente, la figura 4.12-(a) sólo demuestra convergencia de ambas sucesiones en forma independiente. Como paso siguiente se estudia si las mismas conducen a un único resultado. El error relativo entre las diferencias de las dos secuencias $S_i^{efem} = \{S_1^{efem}, S_2^{efem}, S_3^{efem}, S_4^{efem}\}$ y $S_i^{xfem} = \{S_1^{xfem}, S_2^{xfem}, S_3^{xfem}, S_4^{xfem}\}$, en norma L^2 , se obtiene como:

$$\begin{aligned} \|e_i^{efem-xfem}\|_{L^2} &= \frac{\|S_i^{efem} - S_i^{xfem}\|_{L^2}}{\|S_i^{xfem}\|_{L^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\int_0^\zeta (S_i^{efem} - S_i^{xfem})^2 d\zeta}}{\sqrt{\int_0^\zeta (S_i^{xfem})^2 d\zeta}} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde ahora $\|e_i^{efem-xfem}\|_{L^2}$ es una medida de la diferencia de soluciones entre *E-FEM* y *X-FEM* para la misma discretización M_i . La figura 4.12-(b) muestra el diagrama de convergencia logarítmico para este caso y su correspondiente recta de regresión lineal. La evidente reducción en la magnitud del error, a medida que se refina el tamaño de elemento, *prueba la convergencia de ambas formulaciones a la misma solución*: $\lim_{h_e \rightarrow 0} (S_i^{efem} - S_i^{xfem}) = 0$. Este tipo de análisis se repite en los ejemplos siguientes.

En el cuadro 4.2 mostramos información referente al estudio de la eficiencia computacional relativa de cada procedimiento, para resolver el problema. Recordamos que en la última columna, la sigla *RCC* se refiere al cociente entre el tiempo (absoluto) en segundos de CPU del modelo *X-FEM* y *E-FEM*. Como era de esperarse, *la estrategia X-FEM es, en todos los casos, más costosa que E-FEM*, aunque el costo relativo decrece con el refinamiento. Esta es la tendencia general observada en todos los ejemplos numéricos presentados en este capítulo.

Malla (1)	N_{step} (2)	Método (3)	N_{ei} (4)	N_{ef} (5)	RN_e (6)= $\frac{(5)}{(4)}$	b_{wi} (7)	b_{wf} (8)	Rb_w (9)= $\frac{(8)}{(7)}$	T_a [seg] (10)	<i>RCC</i> (11)
M_1 (286 elem.)	1415	E-FEM	343	343	1.00	22	22	1.00	26.2	1.24
		X-FEM	343	387	1.13	22	26	1.18	32.6	
M_2 (855 elem.)	1610	E-FEM	935	935	1.00	42	42	1.00	93.1	1.21
		X-FEM	935	1027	1.10	42	47	1.12	113	
M_3 (2824 elem.)	1610	E-FEM	2949	2949	1.00	59	59	1.00	344	1.15
		X-FEM	2949	3127	1.06	59	63	1.07	396	
M_4 (9867 elem.)	1610	E-FEM	10073	10073	1.00	108	108	1.00	1675	1.12
		X-FEM	10073	10431	1.03	108	112	1.04	1882	

Cuadro 4.2: Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Costo computacional relativo (*RCC*: *X-FEM*/*E-FEM*).

Modelado 3D.

Asumiendo ahora un comportamiento mecánico tridimensional, en este apartado se realiza un estudio totalmente análogo al ejemplo previo. La finalidad de ese test es recuperar los resultados obtenidos para el estado plano, principalmente aquellos asociados

a convergencia de la solución. Las características geométricas, condiciones de contorno y propiedades del material son idénticas al caso ya estudiado. Cuatro niveles de discretización (ver figura 4.13), con un tamaño promedio de elemento en la zona de falla de $h_e = 32, 20, 16$ y 8 [mm], se han utilizado para definir una secuencia de mallas no estructuradas $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ ³.

Observación 15 *por razones de disponibilidad de recursos computacionales, se han considerado sólo tres de las progresiones anteriores incorporando un nivel intermedio de discretización para obtener resultados confiables y tendencias correctas de convergencia.*

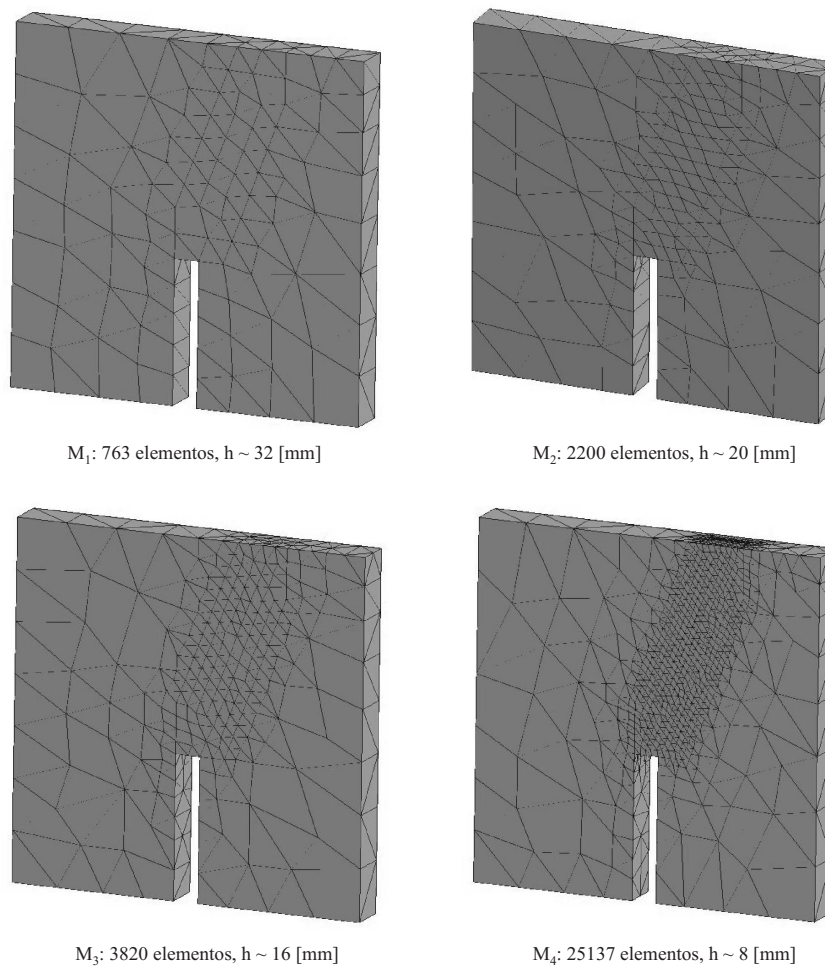


Figura 4.13: Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Secuencia de mallas de elementos finitos $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

La geometría del modelo en la configuración deformada pone en evidencia el mecanismo típico de falla (figura 4.14-(a)) el cual es totalmente consistente con aquel ya discutido en el problema bidimensional. Para un estado avanzado del proceso de localización, correspondiente a la apertura máxima, en la figura 4.14-(b) se observa el grupo de elementos

³En este caso se han considerado mallas uniformes no estructuradas, con un refinamiento localizado en la región donde se espera propague la discontinuidad, sin inducir ningún tipo de direccionamiento preferencial.

atravesados por la superficie de discontinuidad. Nótese además el carácter irregular de la distribución de tetraedros en el espesor de la estructura.

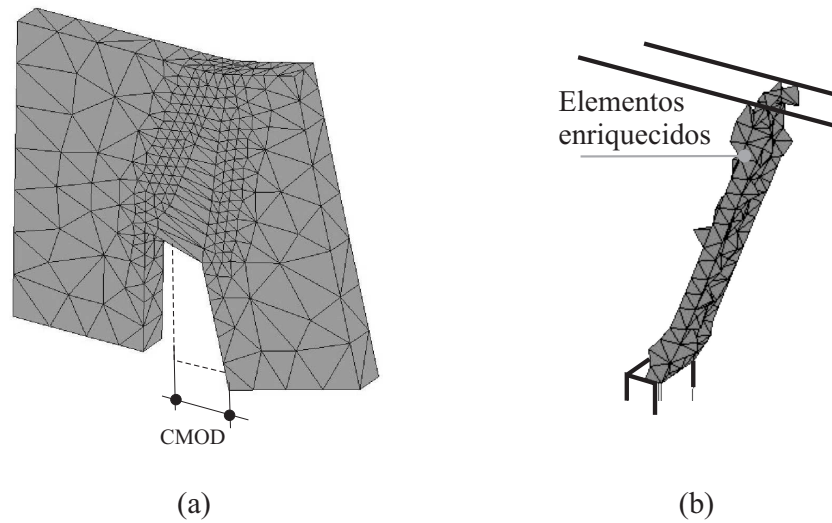


Figura 4.14: Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales: (a) Configuración deformada. (b) Elementos atravesados por la trayectoria de discontinuidad.

Las trayectorias de equilibrio, representadas en función de curvas carga-desplazamiento (\mathbf{F}_1 vs. $CMOD$ promedio) obtenidas con la formulación $E-FEM$ y $X-FEM$ se pueden observar en la figura 4.15-(a) y 4.15-(b) respectivamente, para la secuencia de mallas adoptada.

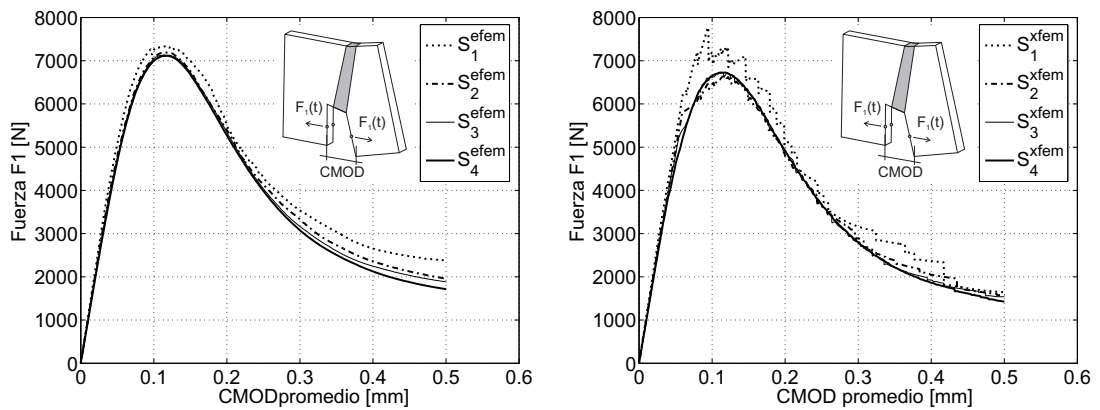


Figura 4.15: Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{F}_1 vs. $CMOD$ promedio): (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$.

En la figura 4.16 se comparan, una a una, las curvas de respuesta que predicen ambas formulaciones y para cada discretización M_i .

El estudio de errores relativos, basado en la aplicación de las fórmulas 4.15-4.16 y en términos de normas L^2 , se muestra en el gráfico 4.17. Una vez más observamos tasa de convergencia similar entre los dos modelos numéricos conforme decrece h_e , y la tendencia hacia una única solución.

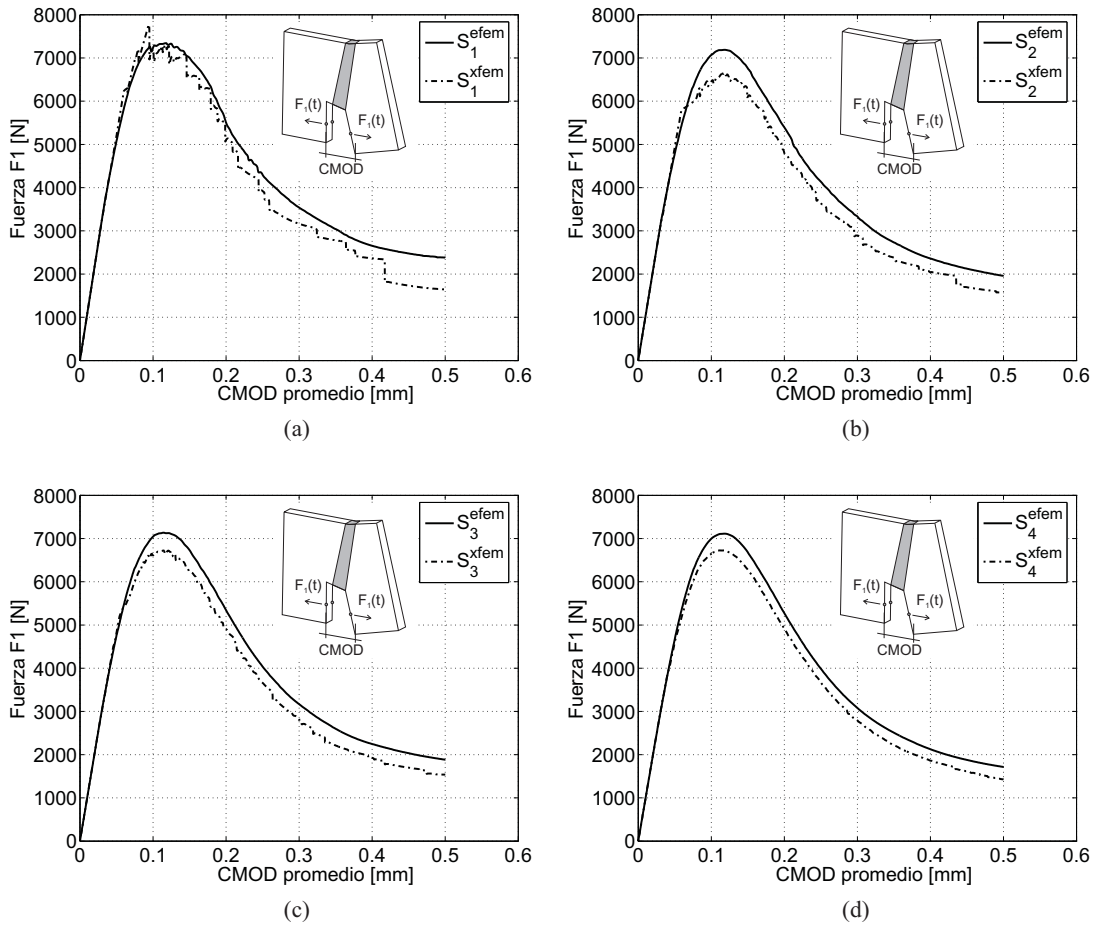


Figura 4.16: Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Fuerza F_1 vs. $CMOD$ promedio. Comparación de soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ para cada malla de la secuencia: (a) Malla M_1 . (b) Malla M_2 . (c) Malla M_3 . (d) Malla M_4 .

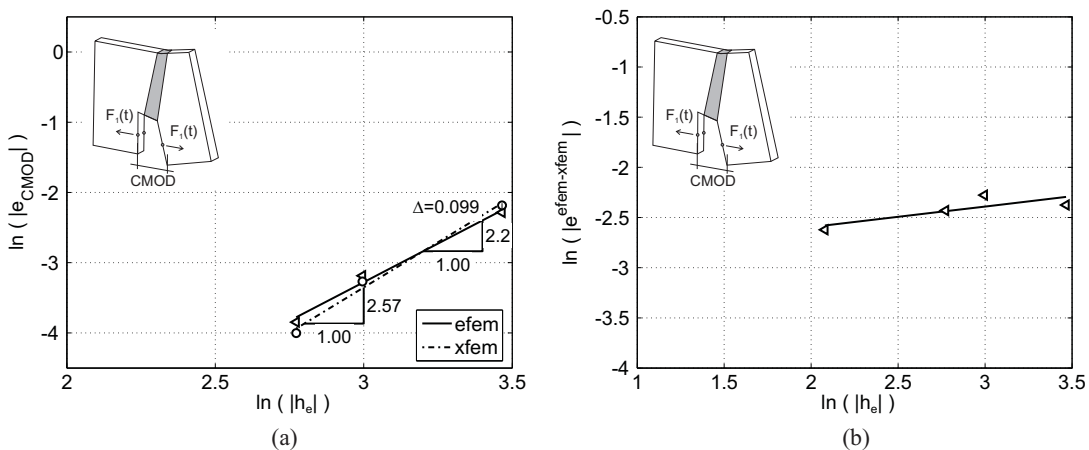


Figura 4.17: Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Diagramas de convergencia en escala logarítmica: (a) Error relativo $\|e_{CMOD}\|_{L^2}$ vs. tamaño característico del elemento h_e . (b) Error relativo $\|e^{efem-xfem}\|_{L^2}$ de la diferencia entre las soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ vs. tamaño característico del elemento h_e .

Finalmente, en el cuadro 4.3 se reporta una comparación en función del costo computacional relativo. Debe notarse que para este caso 3D, se acentúan las diferencias en lo que respecta a eficiencia algorítmica a favor de la estrategia *E-FEM*, dado que la relación *RCC*, en la última columna crece considerablemente.

Malla (1)	N_{step} (2)	Método (3)	N_{ei} (4)	N_{ef} (5)	RN_e (6) = $\frac{(5)}{(4)}$	b_{wi} (7)	b_{wf} (8)	Rb_w (9) = $\frac{(8)}{(7)}$	T_a [seg] (10)	<i>RCC</i> (11)
M_1 (763 elem.)	1200	E-FEM	797	797	1.00	62	62	1.00	136	2.55
		X-FEM	797	977	1.23	62	78	1.26	347	
M_2 (2200 elem.)	1200	E-FEM	1760	1760	1.00	114	114	1.00	450	2.43
		X-FEM	1760	2165	1.23	114	146	1.28	1094	
M_3 (3820 elem.)	1200	E-FEM	2787	2787	1.00	149	149	1.00	867	2.17
		X-FEM	2787	3357	1.20	149	184	1.23	1882	
M_4 (25137 elem.)	1200	E-FEM	14958	14958	1.00	448	448	1.00	16628	1.50
		X-FEM	14958	17266	1.15	448	511	1.14	25055	

Cuadro 4.3: Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Costo computacional relativo (*RCC*: *X-FEM*/*E-FEM*).

4.4.2. Viga de cuatro puntos en modo flexión.

Con la intención de extender nuestro estudio a problemas que involucran trayectorias curvas de discontinuidad, consideramos a continuación el clásico problema de flexión de viga entallada con cargas en cuatro puntos, reportado por Arrea & Ingraffea [AI82] y Rots [RPKB85], entre otros investigadores. La descripción geométrica y condiciones de contorno pueden observarse en la figura 4.18. Para no introducir estados tensionales singulares, tanto el apoyo como la aplicación de la carga en la proximidad de la entalla, se materializan mediante un bloque rígido incluido en el modelo.

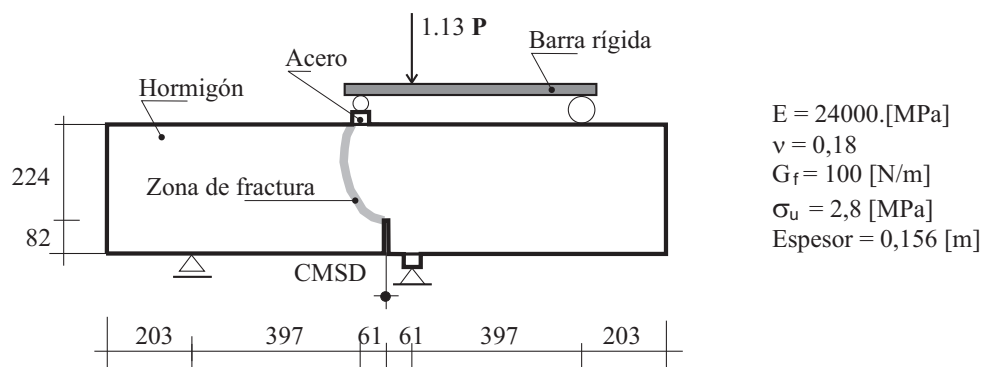


Figura 4.18: Viga de cuatro puntos con simple entalla. Geometría y condiciones de contorno (dimensiones en milímetros).

Las simulaciones numéricas (en 2D y 3D) se realizaron, esta vez, sin imponer a priori el camino de fisura, el cual se obtiene utilizando la metodología discutida en la sección 4.3.3.

Modelado 2D.

Para el análisis numérico de este ejemplo utilizamos la secuencia de mallas no estructuradas $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ que se muestra en la figura 4.19. El tamaño característico promedio de elemento, en la zona próxima al desarrollo de fractura, es $h_e = 32, 16, 8$ y 4 [mm], respectivamente. En el mismo gráfico se observa además la trayectoria de discontinuidad obtenida utilizando los dos esquemas, $E-FEM$ y $X-FEM$, para cada una de las discretizaciones. Debiera notarse que la línea de falla capturada por simulación tiende a ser la misma a medida que se refina la malla.

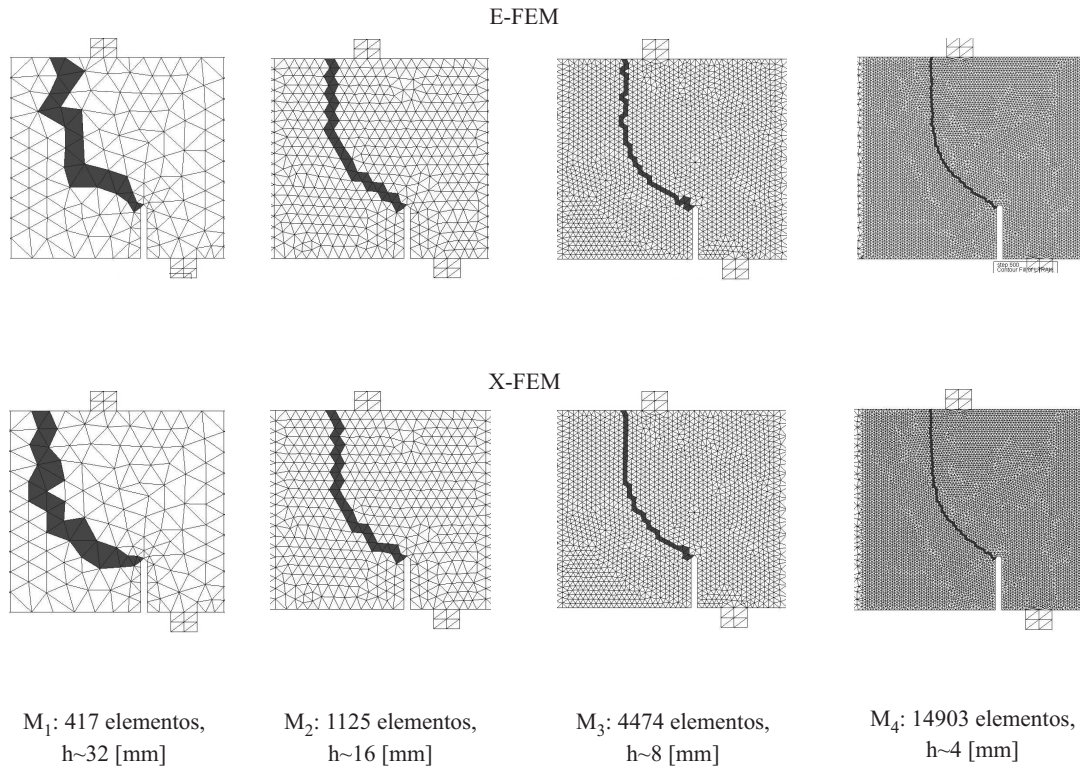


Figura 4.19: Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Secuencia de mallas de elementos finitos $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ y trayectoria de discontinuidad obtenida con la formulación $E-FEM$ y $X-FEM$.

La respuesta estructural descrita mediante las curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{P} vs. $CMSD^4$) $S^{efem} = \{S_1^{efem}, S_2^{efem}, S_3^{efem}, S_4^{efem}\}$ y $S^{xfem} = \{S_1^{xfem}, S_2^{xfem}, S_3^{xfem}, S_4^{xfem}\}$, puede observarse en la figura 4.20 (para cada metodología, en la secuencia completa de refinamiento) y en la figura 4.21 (para ambos enriquecimientos y en la misma configuración de malla M_i).

Los diagramas de error relativo y error entre las diferencias de las dos formulaciones, se muestran en el gráfico logarítmico 4.22-(a) y 4.22-(b), respectivamente.

Como último ítem, en el cuadro 4.4 mostramos el análisis del costo computacional relativo para resolver los diferentes casos propuestos.

⁴Con la sigla $CMSD$ hacemos referencia al modo exclusivo de deslizamiento (Crack Mouth Sliding Displacement).

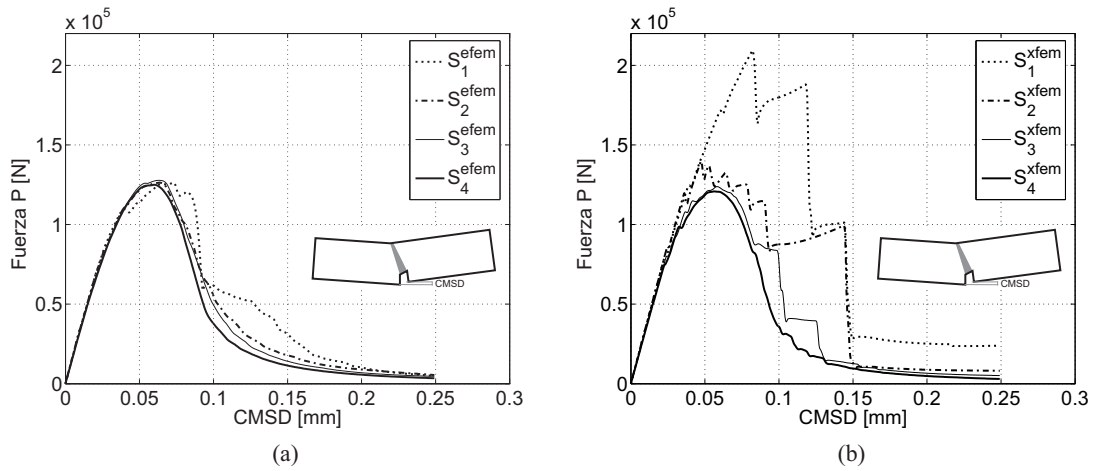


Figura 4.20: Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{P} vs. \mathbf{CMSD}): (a) Formulación $E\text{-FEM}$. (b) Formulación $X\text{-FEM}$.

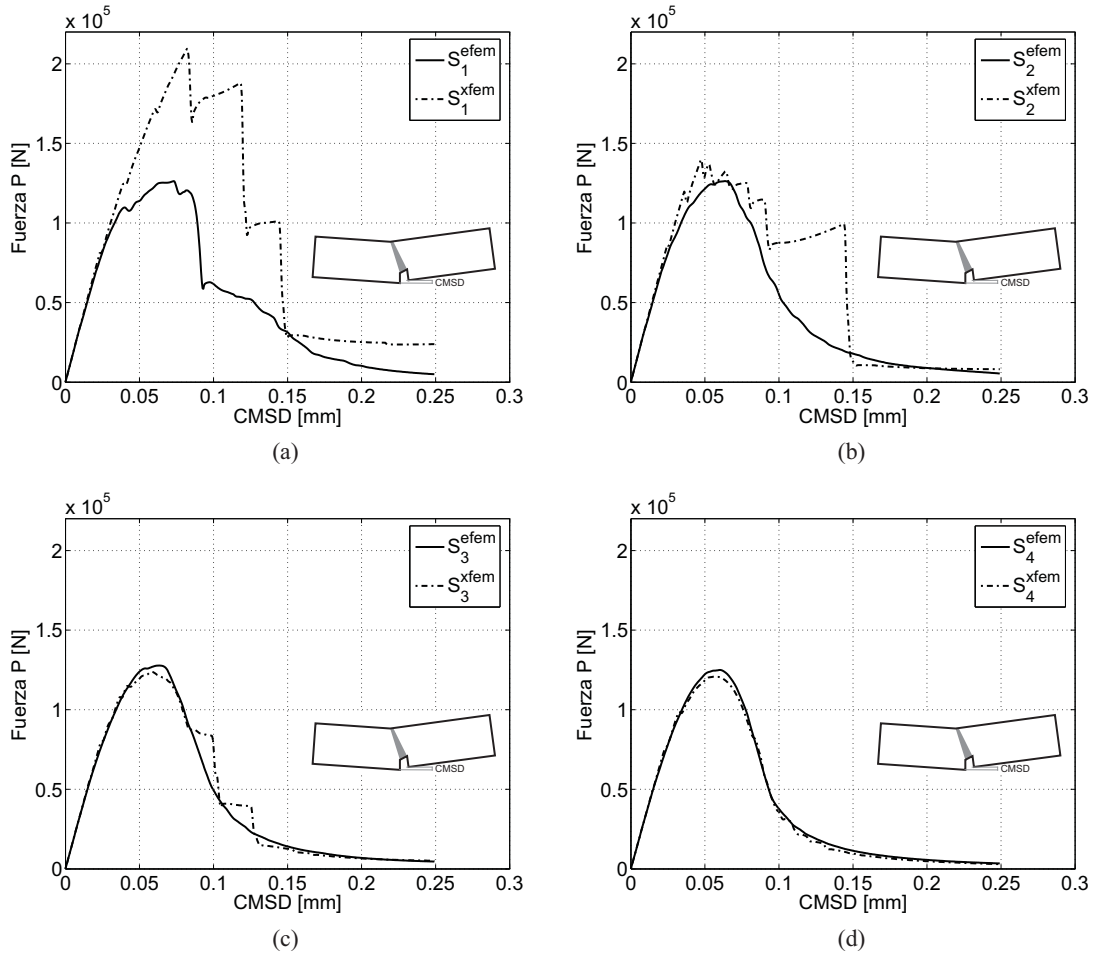


Figura 4.21: Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Fuerza \mathbf{P} vs. \mathbf{CMSD} . Comparación de soluciones $E\text{-FEM}$ y $X\text{-FEM}$ para cada malla de la secuencia: (a) Malla M_1 . (b) Malla M_2 . (c) Malla M_3 . (d) Malla M_4 .

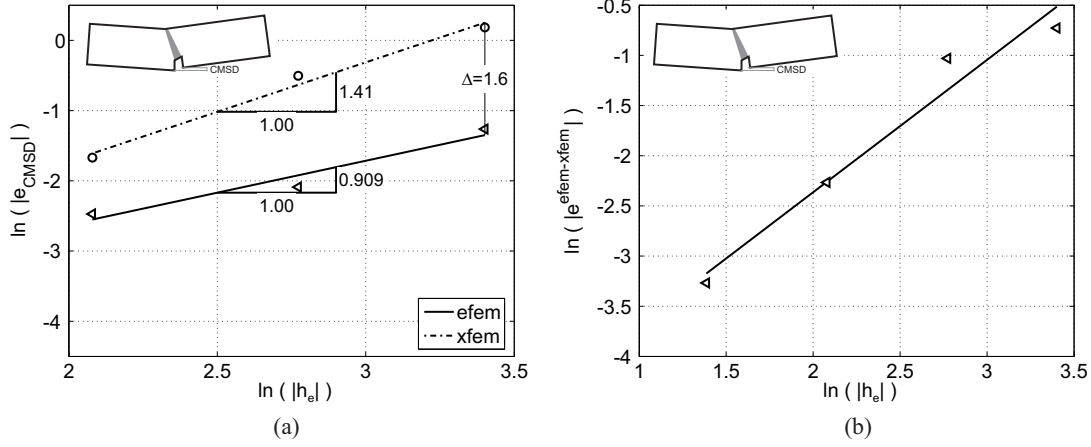


Figura 4.22: Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Diagramas de convergencia en escala logarítmica: (a) Error relativo $\|e_{CMSD}\|_{L^2}$ vs. tamaño característico del elemento h_e . (b) Error relativo $\|e^{efem-xfem}\|_{L^2}$ de la diferencia entre las soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ vs. tamaño característico del elemento h_e .

Malla (1)	N_{step} (2)	Método (3)	N_{ei} (4)	N_{ef} (5)	RN_e (6) = $\frac{(5)}{(4)}$	b_{wi} (7)	b_{wf} (8)	Rb_w (9) = $\frac{(8)}{(7)}$	T_a [seg] (10)	RCC (11)
M_1 (417 elem.)	500	E-FEM	509	509	1.00	23	23	1.00	13.1	1.21
		X-FEM	509	559	1.10	23	26	1.13	15.9	
M_2 (1125 elem.)	500	E-FEM	1235	1235	1.00	39	39	1.00	37.0	1.15
		X-FEM	1235	1311	1.06	39	42	1.08	42.7	
M_3 (3922 elem.)	500	E-FEM	4683	4683	1.00	74	74	1.00	190	1.12
		X-FEM	4683	4841	1.03	74	78	1.05	212	
M_4 (14900 elem.)	500	E-FEM	15161	15161	1.00	138	138	1.00	1021	1.11
		X-FEM	15161	15507	1.02	138	143	1.04	1135	

Cuadro 4.4: Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Costo computacional relativo (RCC : $X-FEM/E-FEM$).

Modelado 3D.

A continuación, presentamos el problema de la viga con simple entalla estudiado ahora mediante un modelo mecánico discreto 3D. La geometría de la estructura, diagrama de cargas externas, condiciones de contorno y parámetros del material, son análogos al problema previo y pueden observarse en la figura 4.18. Se considera un conjunto de cuatro mallas no estructuradas de tetraedros con refinamiento localizado en la zona donde se espera propague la fisura, sin inducir ningún tipo de direccionamiento preferencial (ver gráfico 4.23), definiendo de esta forma la secuencia $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

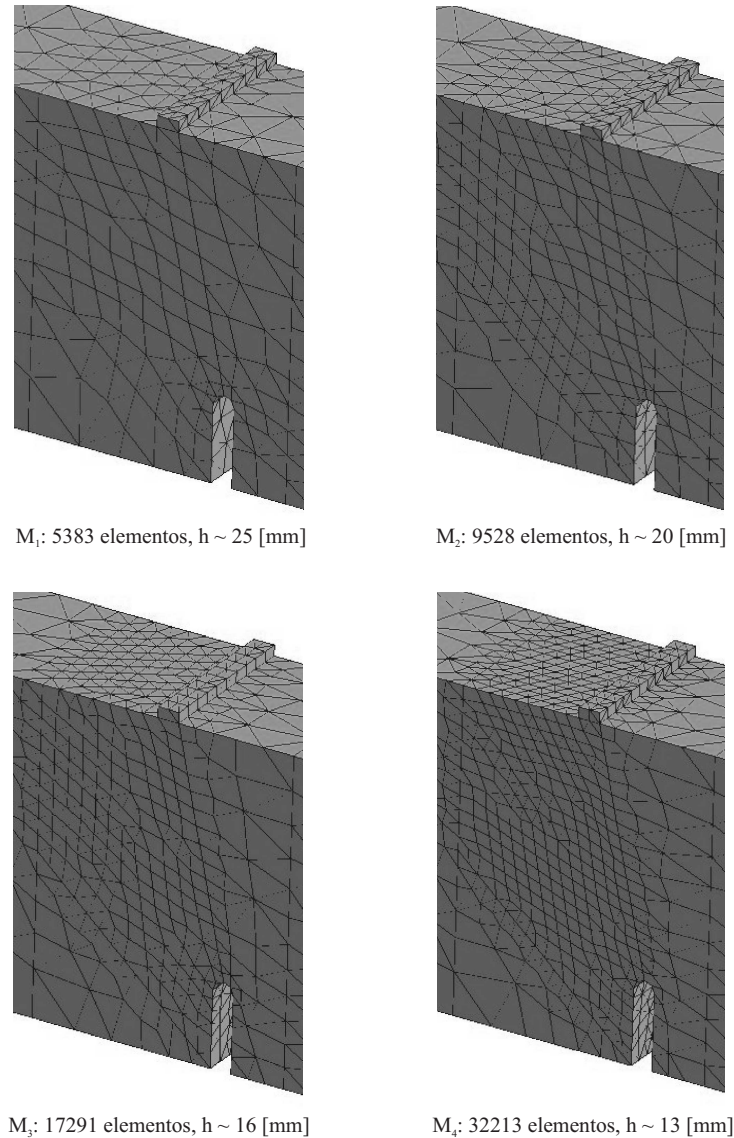


Figura 4.23: Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Secuencia de mallas de elementos finitos $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

Algunos resultados cualitativos de interés pueden observarse en la figura 4.24, como por ejemplo aquellos elementos atravesados por la superficie de fallo cuya cinemática incluye la activación de saltos en desplazamientos (figura 4.24-(a)) y la configuración geométrica deformada, indicando el modo típico de colapso, véase figura 4.24-(b).

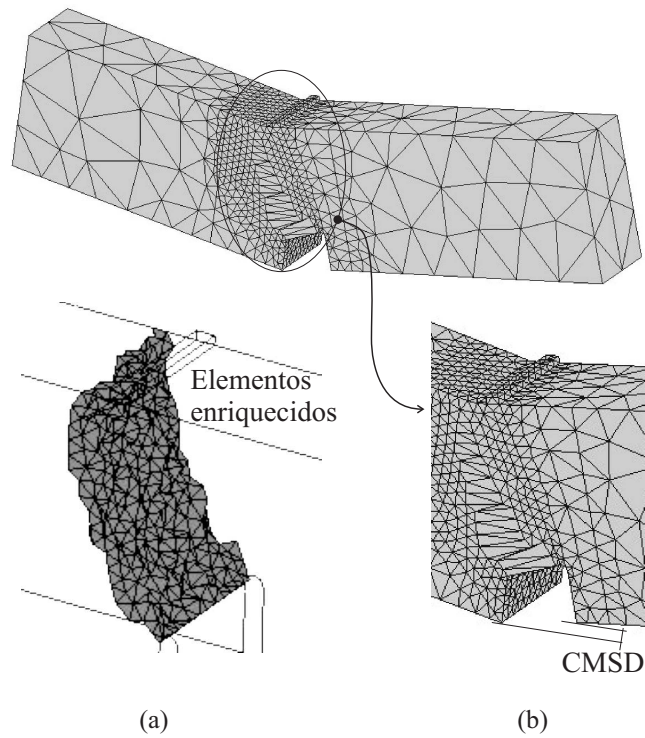


Figura 4.24: Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Modo de falla: (a) Elementos atravesados por la trayectoria de discontinuidad. (b) Configuración deformada.

Al igual que en los ejemplos previos, en la figura 4.25 mostramos la respuesta de la estructura en términos de trayectorias de equilibrio (\mathbf{P} vs. $CMSD$) para la secuencia completa de mallas, obtenida con el modelo $E-FEM$ y $X-FEM$. La abscisa $CMSD$ se computa como el valor promedio $CMSD$ en el espesor de la viga.

Una comparación entre cada par de curvas S_i^{efem} y S_i^{xfem} , puede visualizarse en la figura 4.26.

El correspondiente análisis de error y estudio de convergencia, a medida que se reduce el tamaño característico del elemento h_e , se presenta en el diagrama logarítmico 4.27.

Finalmente, el cuadro 4.5 define la performance relativa medida en tiempos de procesamiento. Una vez más debe notarse el incremento sustancial en la relación de costo relativo RCC si lo comparamos con el mismo problema formulado en 2D (véase la última columna del cuadro 4.4).

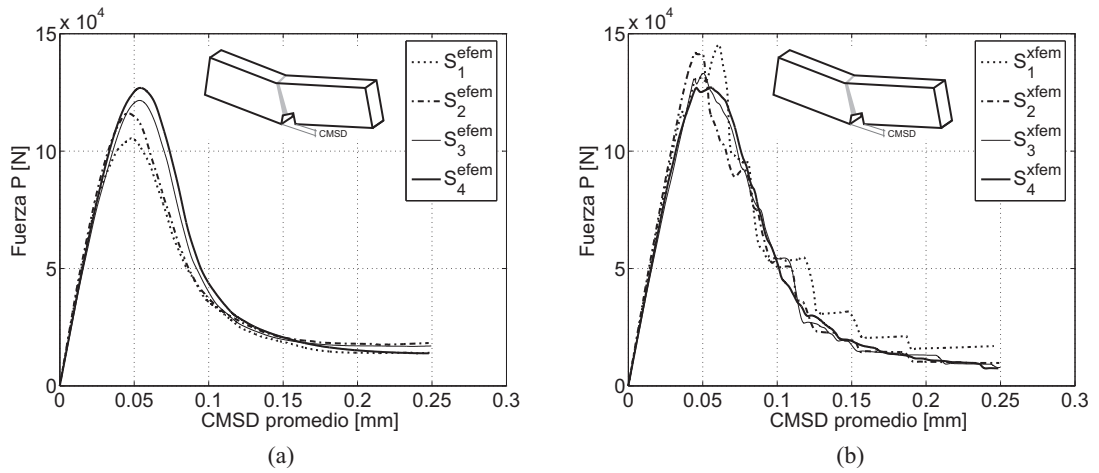


Figura 4.25: Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{P} vs. $CMSD$ promedio): (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$.

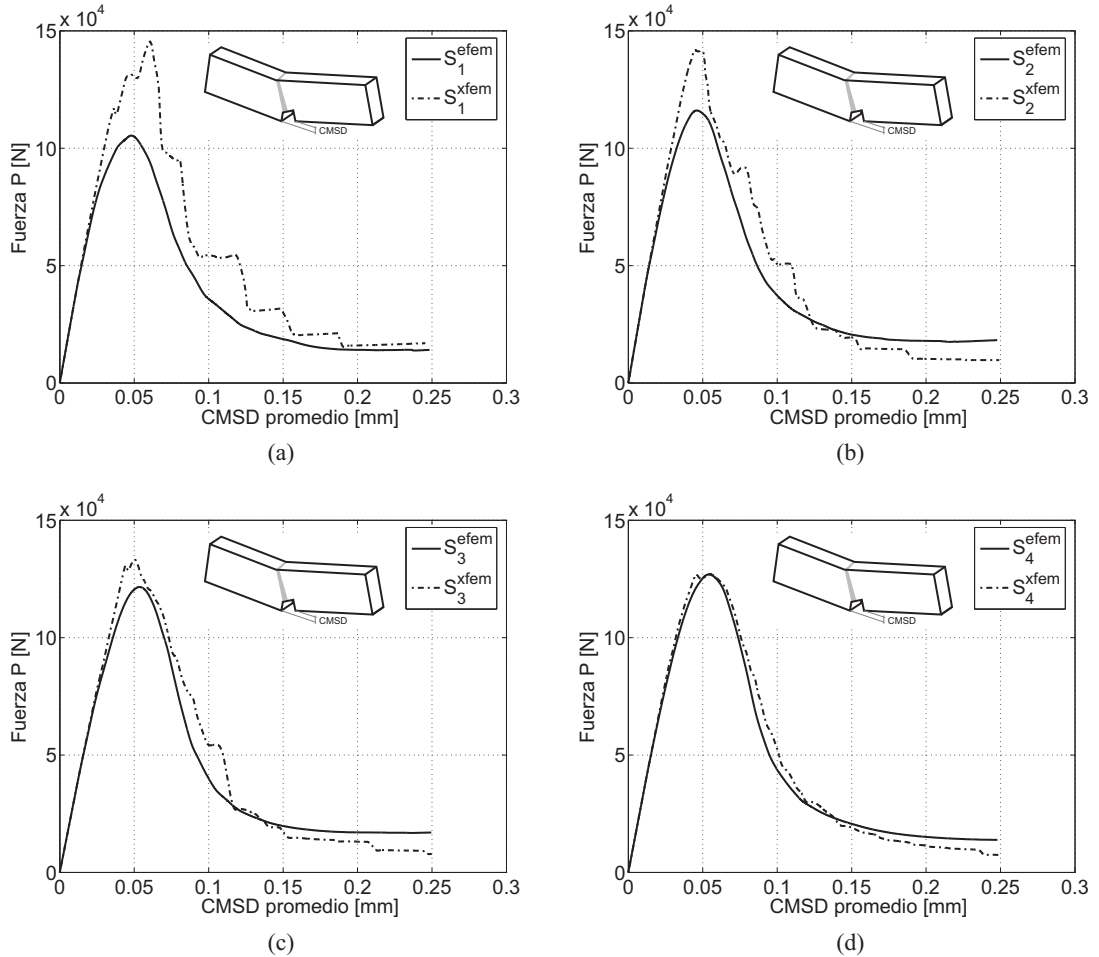


Figura 4.26: Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Fuerza \mathbf{P} vs. $CMSD$ promedio. Comparación de soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ para cada malla de la secuencia: (a) Malla M_1 . (b) Malla M_2 . (c) Malla M_3 . (d) Malla M_4 .

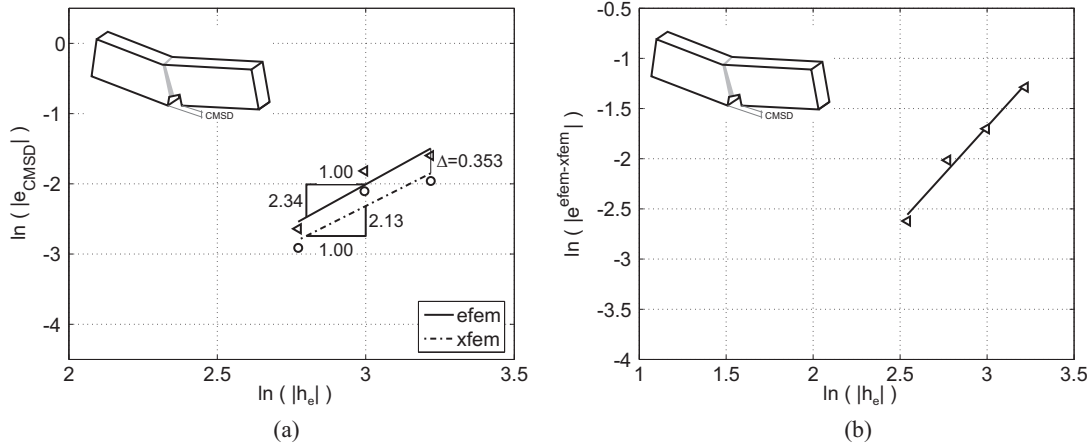


Figura 4.27: Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Diagramas de convergencia en escala logarítmica: (a) Error relativo $\|e_{CMSD}\|_{L^2}$ vs. tamaño característico del elemento h_e . (b) Error relativo $\|e^{efem-xfem}\|_{L^2}$ de la diferencia entre las soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ vs. tamaño característico del elemento h_e .

Malla (1)	N_{step} (2)	Método (3)	N_{ei} (4)	N_{ef} (5)	RN_e (6) = $\frac{(5)}{(4)}$	b_{wi} (7)	b_{wf} (8)	Rb_w (9) = $\frac{(8)}{(7)}$	T_a [seg] (10)	RCC (11)
M_1 (5383 elem.)	400	E-FEM	3768	3768	1.00	237	237	1.00	635	2.00
		X-FEM	3768	4389	1.16	237	290	1.22	1271	
M_2 (9528 elem.)	400	E-FEM	6096	6096	1.00	431	431	1.00	2431	1.96
		X-FEM	6096	7089	1.16	431	566	1.31	4757	
M_3 (17291 elem.)	400	E-FEM	10401	10401	1.00	524	524	1.00	5400	1.56
		X-FEM	10401	11967	1.15	524	628	1.20	8398	
M_4 (32213 elem.)	178	E-FEM	18479	18479	1.00	833	833	1.00	8818	1.38
		X-FEM	18479	20903	1.13	833	963	1.16	12135	

Cuadro 4.5: Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Costo computacional relativo (RCC : $X-FEM/E-FEM$).

4.4.3. Problema de múltiples fisuras. Material compuesto.

Los problemas que involucran el desarrollo de una única fisura en el medio, son casos muy específicos en el contexto del modelado de falla, restringidos a sólidos homogéneos en estados cuasi estáticos de carga. Cuando el material es no homogéneo, como sucede en muchas situaciones de interés, tal es el caso de materiales compuestos, múltiples fisuras pueden permanecer activas simultáneamente durante gran parte del análisis. El propósito de este test es estudiar la performance relativa de la estrategia *E-FEM* y *X-FEM* en este caso particular. Dado que, según se vio en los ejemplos previos, el grado de precisión y la velocidad de convergencia no varía sustancialmente entre ambas formulaciones, la comparación actual se presenta sólo en términos del esfuerzo computacional.

En este sentido, se estudia un test tridimensional que involucra el desarrollo de fisuras múltiples. El problema propuesto es muy simple. Consiste en un modelo teórico de material compuesto, formado por una matriz de hormigón reforzada con barras elásticas de acero distribuidas en la altura de la probeta, véase figura 4.28-(a). La placa está sometida a un modo de estiramiento dominante desde su extremo derecho, originando de esta forma la aparición de numerosas fisuras verticales. La separación, y en consecuencia el número de éstas, depende de la cantidad de cuantía de acero y de su adherencia relativa [BC80, LR00].

Por simplicidad en la simulación, asumimos adherencia perfecta entre hormigón-acero, e imponemos artificialmente la cantidad de fisuras perturbando (debilitando) la tensión última del hormigón en un número apropiado de planos verticales. El objetivo fundamental de este ejemplo es estimar la tasa de crecimiento del costo computacional (para ambas formulaciones) a medida que aumenta la proporción de elementos en régimen de post-bifurcación.

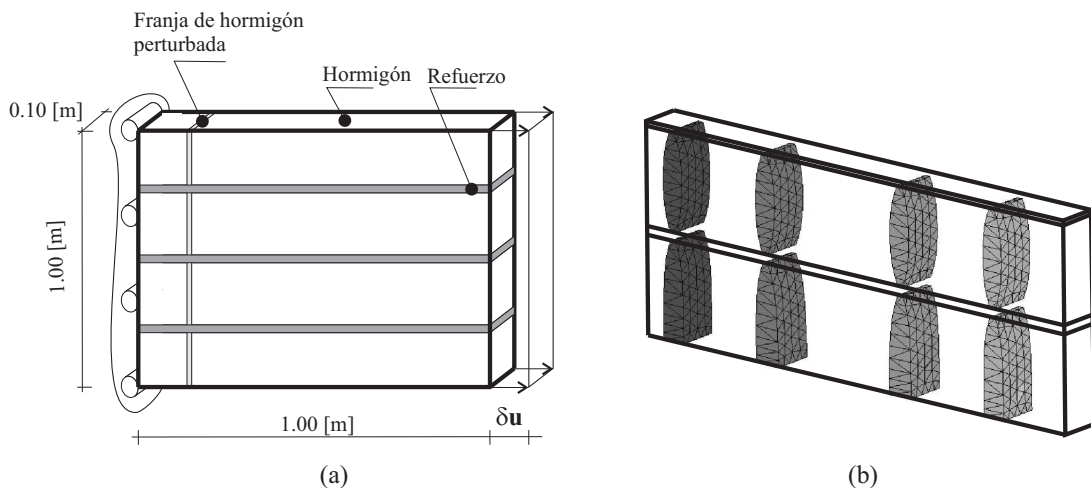


Figura 4.28: Placa de hormigón reforzado. Problema de propagación múltiple de fisuras. Número total de elementos 23245, $h_e \sim 26$ [mm]: (a) Geometría y condiciones de contorno del modelo idealizado. (b) Conjunto variable de elementos que capturan las fisuras verticales.

Las propiedades mecánicas adoptadas para la matriz de concreto son las siguientes: $E = 27350$ [MPa] (módulo de Young), $\nu = 0$ (coeficiente de Poisson), $G_f = 100$ [N/m] (energía de fractura), $\sigma_y = 3,19$ [MPa] (tensión última). Las láminas de refuerzos están formadas por hormigón y acero, para su modelado se adopta un material elástico rigidizado

en función de la cuantía de acero supuesta, caracterizado por los parámetros siguientes: $E = 113420 [MPa]$, $\nu = 0$. Debido a condiciones de simetría se modela la mitad inferior de la placa. En la figura 4.28-(b), puede observarse la geometría en la posición deformada para uno de los casos analizados correspondiente al desarrollo de 4 fisuras, destacándose además los elementos atravesados por la discontinuidad.

El test descrito anteriormente se ha analizado sistemáticamente teniendo en cuenta la generación de 2, 4, 6 y 8 superficies de falla, utilizando el procedimiento *E-FEM* y *X-FEM*. En la figura 4.29 se muestra como evoluciona el tiempo de procesamiento (segundos de CPU) en función del número de fisuras activas, tanto para el proceso de cálculo completo como para cada una de sus componentes principales (fuerzas residuales, matriz de rigidez y esquema de solución del sistema lineal).

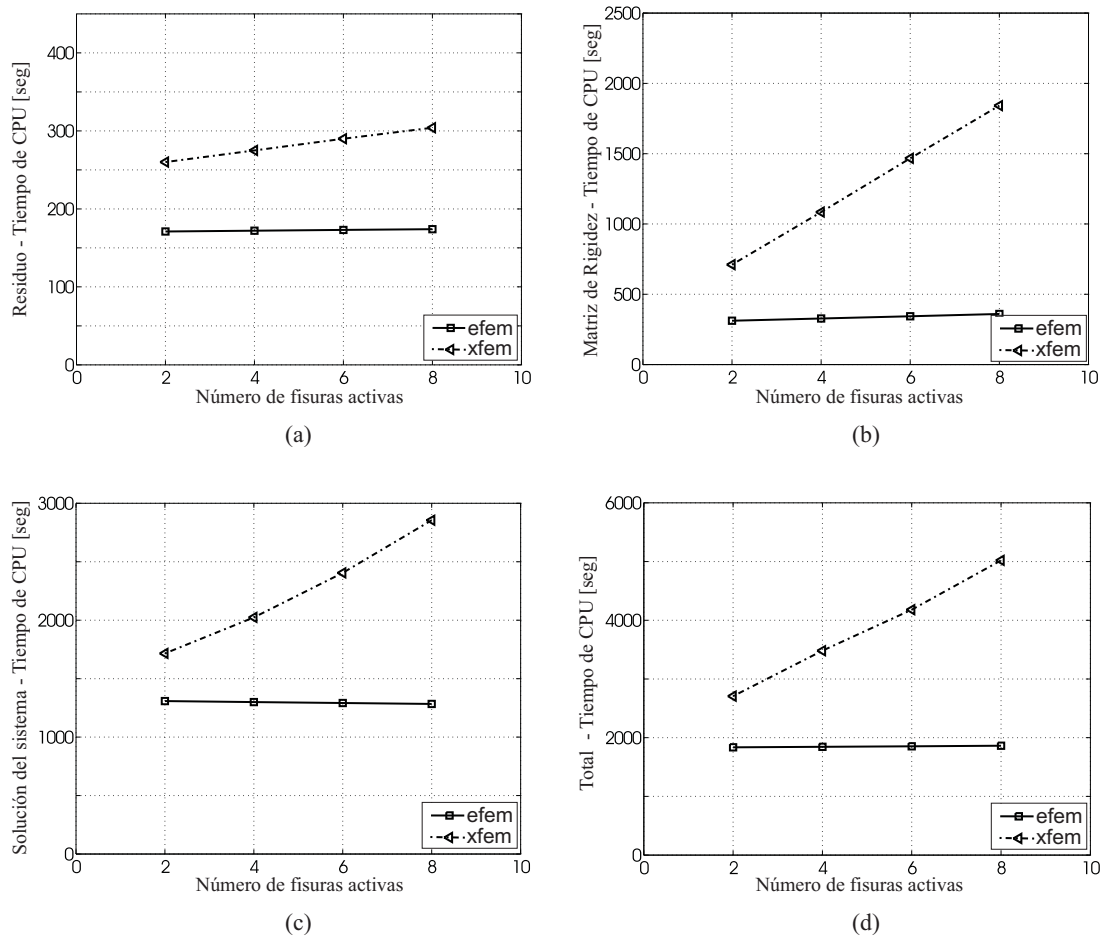


Figura 4.29: Placa de hormigón reforzado. Problema de propagación múltiple de fisuras. Tiempos, medido en segundos de CPU, para distintas partes del proceso de cálculo: (a) Cómputo y ensamblaje del residuo. (b) Cómputo y ensamblaje de la matriz de rigidez. (c) Resolución del sistema de ecuaciones. (d) Tiempo Total.

A partir del gráfico 4.29 queda en evidencia lo siguiente:

- el costo computacional de la formulación *E-FEM* se mantiene prácticamente constante, independientemente del número de fisuras. Esto se debe a que los grados de

libertad adicionales, correspondientes a la activación de los saltos en desplazamientos, se condensan estáticamente a nivel de cada elemento finito y, en consecuencia, no contribuyen al sistema final de ecuaciones a resolver.

- el costo computacional de la estrategia $X-FEM$ es siempre superior en relación al método $E-FEM$, y crece linealmente con el número de fisuras modeladas. Las partes más afectadas del algoritmo global son: (i) la construcción de la matriz de rigidez, y (ii) la solución del sistema lineal. En el primer caso asociamos el costo extra a la necesidad de utilizar reglas de integración de alto orden en aquellos elementos enriquecidos cinemáticamente, véase sección 4.3.2. Para el segundo punto, el soporte global de los grados de libertad enriquecidos no hace posible la condensación, luego el sistema global aumenta en cantidad de ecuaciones y por ende el tiempo de CPU necesario para resolverlo.

4.5. Discusión

A manera de resumen, según el estudio comparativo realizado en este capítulo, basado en una formulación estándar de los dos modelos, $E-FEM$ y $X-FEM$, y en una implementación computacional optimizada para ambos, las principales diferencias entre ellos son las siguientes: (i) un costo computacional más elevado de la estrategia $X-FEM$ asociado a la utilización de cuadraturas de más alto orden y al número variable (en aumento) de ecuaciones a resolver a medida que se incorporan elementos discontinuos, (ii) este efecto se acentúa en problemas gobernados por la generación múltiple de fisuras, (iii) el costo computacional relativo (RCC) disminuye con el refinamiento de la malla, (iv) mayor precisión en la formulación $E-FEM$, principalmente para mallas groseras.

No obstante, debemos dejar en claro que ambas estrategias resultan particularmente adecuadas para su aplicación a problemas de mecánica de fractura, además cada una de ellas puede ser susceptible de mejoras conceptuales o computacionales. Esto último define nuevos escenarios de comparación, en los cuales debieran plantearse los correspondientes estudios comparativos.

Capítulo 5

Estabilización en plasticidad J_2 con ablandamiento.

Uno de los principales desafíos de este trabajo de investigación consiste en formular estrategias numéricas eficientes para el modelado de falla material en plasticidad. Entendemos que este es un problema aún no resuelto, especialmente en el contexto de elementos triangulares y tetraédricos de bajo orden. Es bien sabido que esta tipología de elementos facilita en gran medida la generación de mallas al momento de resolver problemas prácticos reales. En el capítulo presente y en el siguiente se avanza hacia este objetivo específico. Se pretende desarrollar una formulación de elementos finitos *símplices* con la habilidad de capturar mecanismos de colapso inducidos por la progresiva acumulación de deformaciones inelásticas.

Al encarar la simulación numérica del fenómeno de localización de deformaciones en forma de bandas de corte (*shear bands*), y en especial para aquellos problemas gobernados por modelos constitutivos del tipo J_2 , es necesario disponer de tecnologías de elementos finitos estables ante la restricción de incompresibilidad inducida por el predominio de deformaciones plásticas isocóricas. Este hecho nos impulsa a buscar estrategias adecuadas tendientes a aliviar este inconveniente presente a nivel numérico. En este sentido, este capítulo está dedicado completamente al análisis de un esquema estabilizado mixto (desplazamiento-presión) aquí denominado formulación *PGP* (*Pressure Gradient Projection*, Codina et al. [CB00]) basado en el concepto de sub-escalas ortogonales [Cod00a].

Como primer paso hacia la obtención de un modelo más completo, se realiza un estudio riguroso de la performance numérica del esquema de estabilización *PGP* cuando se utilizan polinomios de igual orden de interpolación para las variables primales, resolviendo para ello problemas típicos donde la restricción por incompresibilidad juega un papel determinante en la respuesta, como ser: cómputo de la carga última estructural y el modelado de bandas de localización de deformaciones plásticas.

El objetivo final que se persigue consiste en acoplar esta tecnología estabilizada de base con una formulación regularizada y cinemáticamente enriquecida de elementos finitos (incorporando discontinuidades en desplazamientos) capaz de capturar bandas de deslizamiento en forma eficiente y para aquellos materiales equipados con leyes de ablandamiento por deformación. El desarrollo formal y el planteo matemático de este modelo acoplado es el objetivo del capítulo siguiente.

5.1. Introducción

Los elementos finitos de bajo orden, formulados en desplazamientos, presentan importantes ventajas al momento de resolver problemas prácticos en mecánica de sólidos, e inclusive se amplifican cuando consideramos el problema del modelado de localización de deformaciones. Entre las más destacadas se pueden nombrar: robustez, facilidad para la generación automática de mallas, reducido número de grados de libertad y mínimo ancho de banda del sistema final de ecuaciones, etc. Estas características implican en forma directa una mayor eficiencia desde el punto de vista computacional.

Sin embargo, como contrapartida, es un hecho bien conocido que la respuesta numérica de los elementos finitos estándar de Galerkin, en problemas gobernados por campos de deformaciones isocóricas, difiere considerablemente de las soluciones analíticas o experimentales de referencia.

Para salvar estas limitaciones subyacentes en los modelos clásicos, se han desarrollado diversas estrategias de análisis. A modo de ejemplo se pueden citar las técnicas de integración reducida Belytschko et al. [BOLK84], la utilización de elementos finitos de alto orden Sloan and Randolph [SR82] o métodos que enriquecen en forma adecuada el campo de deformaciones *EAS* (*Enhanced Assumed Strains*) Simo & Rifai [SR90], Dvorkin & Assanelli [DA00]. Una detallada descripción del estado del arte y reseña de las diversas alternativas mencionadas puede encontrarse en Valverde [Val02].

Los esquemas de elementos finitos mixtos estabilizados representan una promisoriosa línea de investigación, ampliamente reconocida en la actualidad a través de la gran cantidad de trabajos publicados en el área. Una característica distintiva de estas formulaciones es que, en general, están especialmente direccionadas a la obtención de elementos finitos símplices y lineales, originando de esta manera aproximaciones robustas, eficientes y de aplicabilidad generalizada. En un principio, estas metodologías fueron utilizadas en el contexto de la *Mecánica de Fluidos Computacional* (*CFD*) (Brooks et al. [BH82], Johnson et al. [JNP84], Hughes [HFB85]). Las estrategias de estabilización consisten básicamente en agregar a las formulaciones estándar, términos dependientes del tamaño de malla, y en función del residuo obtenido a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Estos términos, evaluados a nivel de cada elemento, aseguran consistencia e incorporan estabilidad. En el ámbito de la *Mecánica de Sólidos*, para elasticidad y plasticidad incompresible, también se han aplicado conceptos similares, véase por ejemplo Hughes et al. [HF88], Franca et al. [FH88], Lyly et al. [LS94], Wall et al. [WBR98], Klaas et al. [KMS99].

Este capítulo se focaliza en la evaluación numérica de un elemento finito mixto estabilizado recientemente introducido (Chiumenti et al. [CVdSC02a, CVdSC02b], Cervera et al. [CCVdS03], Valverde [Val02]) para problemas de elasticidad incompresible y plasticidad isocórica de Von Mises. Especialmente se pretende medir su performance para el análisis del fenómeno de localización de deformaciones inducido por inestabilidades a nivel material, ver también [SSH04b, SHS04]. La formulación mixta propone interpolaciones lineales por tramos tanto para el campo de desplazamientos como para el de presiones. Los requisitos de compatibilidad entre los campos discretos involucrados se salvan utilizando una técnica de estabilización basada en el método de las *sub-escalas ortogonales* (*Orthogonal Sub-grid Scale method OSS*, Codina [Cod00a]).

Como primer objetivo se propone discutir aspectos particulares del desempeño numérico que complementan las conclusiones expuestas en las citadas referencias, y más

importante aún, aportar detalles adicionales en cuanto a su comportamiento en lo que se refiere a: (i) comparación con otro método alternativo de estabilización; (ii) estudio paramétrico del coeficiente de estabilización el cual es un ingrediente fundamental en este modelo; (iii) análisis de convergencia en tensiones y desplazamientos; (iv) dependencia de los resultados con la orientación de malla, particularmente cuando se modela plasticidad bajo régimen de ablandamiento. Este último punto es un aspecto clave cuando se pretende modelar, vía *MEF*, procesos de acumulación de deformaciones y falla material.

El resto de este apartado se organiza como sigue: en la próxima sección (5.2) se plantean las formulaciones débiles, continuas y discretas, de los esquemas mixtos estabilizados. En particular se introducen elementos finitos con funciones de interpolación de igual orden (triángulos y tetraedros lineales). Aquellos aspectos vinculados a la implementación numérica computacional del esquema se exponen en la sección 5.3. La sección 5.4 está dedicada a mostrar ejemplos numéricos bidimensionales y tridimensionales, con especial énfasis en la utilización de modelos de plasticidad. Por último, en la sección 5.5 se discuten algunas observaciones y comentarios importantes de este estudio.

Observación 16 *como objetivo secundario, se analiza además la performance de la presente formulación mixta estabilizada en un entorno de cálculo distribuido ([SSH04b]). Sin embargo, para evitar desviarse del fin principal del capítulo, este aporte adicional se presenta como un apéndice (véase apéndice C), donde se trata en forma detallada este aspecto particular del modelo.*

5.2. Formulación mixta estabilizada en mecánica de sólidos

5.2.1. El problema numérico de la incompresibilidad

Para situaciones cercanas a la incompresibilidad material, la simulación numérica con elementos finitos estándar resulta poco confiable en términos de la precisión en la respuesta. Esto se debe a que la formulación irreducible en desplazamientos impone esta restricción cinemática de forma fuerte. El espacio discreto de aproximación del *MEF* resulta sobre restringido y no es posible representar en forma adecuada el campo de desplazamientos real que se observa en el continuo [ZT00, Hug87].

La verificación explícita de la condición de incompresibilidad puede evitarse introduciendo campos adicionales de interpolación, mejorando en consecuencia el tratamiento de las restricciones internas del problema. Desde este punto de vista, las formulaciones mixtas *desplazamiento-presión* ofrecen una alternativa factible para imponer la incompresibilidad en forma débil. Sin embargo, en este tipo particular de aproximación es necesario verificar ciertas condiciones de compatibilidad entre las funciones de interpolación de los campos discretizados para asegurar convergencia y estabilidad de los elementos. Tales criterios se reconocen en la literatura como *Condiciones de Ladyzhenskaya-Babusca-Brezzi* o simplemente *LBB*, véase Babuska [Bab71], Brezzi [Bre74], Brezzi & Fortin [BF91].

Lamentablemente, las interpolaciones en desplazamiento y presiones de igual orden, relevantes desde el punto de vista algorítmico, no satisfacen dicha condición. Ante este inconveniente, una opción posible es utilizar los denominados *esquemas de estabilización*

que permiten eliminar las inestabilidades numéricas en formulaciones mixtas que no verifican LBB . Actualmente, el desarrollo alcanzado por estos métodos permite su aplicación en una gran variedad de problemas en la mecánica del continuo.

5.2.2. Formulación variacional

Considérese un problema de mecánica de sólidos en donde se asume la hipótesis de geometría lineal. Respetando la nomenclatura introducida en los capítulos previos, las condiciones de contorno cinemáticas y mecánicas pueden escribirse de la forma (véase figura 5.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u & & (a) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{t}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma & & (b) \end{aligned} \quad (5.1)$$

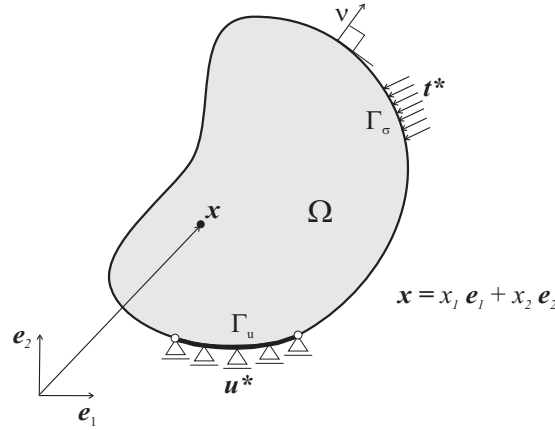


Figura 5.1: Nomenclatura básica para la definición del problema mecánico.

La forma desacoplada del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, en su componente esférica¹ ($\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$) y desviadora² ($\mathbf{S} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma})$):

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbb{I} + \mathbf{S} \quad (5.2)$$

nos permite escribir las ecuaciones de movimiento de Cauchy, despreciando efectos inerciales, como sigue:

$$\nabla \sigma_m + \nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (5.3)$$

donde la variable \mathbf{b} representa un campo de fuerzas distribuidas por unidad de masa y ρ la densidad del material.

Introduciendo las ecuaciones del modelo constitutivo, la dependencia del tensor de tensiones con el campo (gradiente) de desplazamientos \mathbf{u} puede expresarse:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) = \underbrace{\hat{\sigma}_m(\nabla \cdot \mathbf{u})}_{\sigma_m} \mathbb{I} + \mathbf{S}(\mathbf{u}) \quad (5.4)$$

¹Definiendo el tensor de proyección esférico $\mathbf{P}_E = \frac{1}{3}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I})$, se obtiene: $\sigma_m \mathbb{I} = \mathbf{P}_E : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbb{I}$

²Definiendo el tensor de proyección desviador $\mathbf{P}_D = \mathbb{I} - \mathbf{P}_E$, se obtiene: $\mathbf{S} = \mathbf{P}_D : \boldsymbol{\sigma} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma})$.

asumiendo que en el primer término la tensi3n media, σ_m , sólo depende de la traza del tensor de deformaciones ($\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$) a través de la funci3n $\hat{\sigma}_m$.

Una aproximaci3n variacional clásica y ampliamente utilizada para el problema cuasi estático 5.3, 5.4 con condiciones de borde 5.1 se basa en adoptar como variables primales el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ y la presi3n hidrostática $p(\mathbf{x})$ (definida también como tensi3n media negativa: $p(\mathbf{x}) = -\sigma_m$). En este tipo particular de formulaci3n, el campo de tensiones se reconstruye simplemente evaluando:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = -p\mathbb{I} + \mathbf{S}(\mathbf{u}) \quad (5.5)$$

donde $p(\mathbf{x})$ y $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ deben satisfacer además:

$$p(\mathbf{x}) = -\hat{\sigma}_m(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (5.6)$$

la cual puede considerarse como una restricci3n adicional a nivel del continuo entre los dos campos primarios (\mathbf{u}, p) .

De aqu3 en adelante asumimos una ley material cuya tensi3n media se describe en términos de una relaci3n lineal de $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$, tal como:

$$\hat{\sigma}_m(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \hat{\sigma}_m^{-1}(-p) = -\frac{p}{\kappa} \quad (5.7)$$

siendo κ el m3dulo de compresibilidad volumétrico ($\rightarrow \infty$ si el material es incompresible).

Observaci3n 17 *en particular estudiaremos modelos constitutivos de plasticidad tipo J_2 , discutidos oportunamente en el cap3tulo 2, secci3n 2.4. En este tipo de ley constitutiva es sencillo deducir las ecuaciones 5.7. Considérese para ello la clásica relaci3n tensi3n deformaci3n para plasticidad:*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad ; \quad \mathbf{C}^e = \lambda (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) + 2\mu \mathbb{I}$$

en consecuencia se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\lambda (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) + 2\mu \mathbb{I}] : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

y utilizando la identidad $\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu$, la expresi3n anterior se escribe:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \kappa (\mathbb{I} : \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbb{I} + 2\mu \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ &= \underbrace{\kappa (\nabla \cdot \mathbf{u})}_{\hat{\sigma}_m} \mathbb{I} + \underbrace{2\mu \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}_{\mathbf{S}(\mathbf{u})} \\ &= -p\mathbb{I} + \mathbf{S}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las ideas previas, las ecuaciones variacionales del problema mecánico 5.3, 5.5, 5.6 junto con las condiciones de contorno 5.1-(a) pueden expresarse de la siguiente manera:

- dado $\mathbf{b} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $\mathbf{t}^* : \Gamma_\sigma \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$, fuerzas prescritas por unidad de volumen y superficie respectivamente

- encontrar el campo vectorial $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y el campo escalar $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$; $(\mathbf{u}, p) \in (H^1_{(\Omega)} \times L^2_{(\Omega)})$, tal que se verifique:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([p, \mathbf{u}]; [q, \mathbf{w}]) &= -\langle p; \nabla \cdot \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{S}(\mathbf{u}); (\nabla \mathbf{w})^{sym} \rangle - \langle \rho \mathbf{b}; \mathbf{w} \rangle - \\ &\quad - \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{w}) d\Gamma_\sigma + \langle q; (\frac{p}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u}) \rangle = 0 \quad (5.8) \\ &\quad \forall \mathbf{w} \in H^1_{0(\Omega)} \quad \wedge \quad \forall q \in L^2_{(\Omega)} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{w} \in H^1_{0(\Omega)}$ y $q \in L^2_{(\Omega)}$ representan variaciones admisibles del campo de desplazamientos y presiones respectivamente. Debe notarse que se ha generalizado la notación $\langle \mathbf{a}; \mathbf{b} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} d\Omega$ para todos los productos duales que intervienen en 5.8. De acuerdo con la nomenclatura estándar, $L^2_{(\Omega)}$ incluye el conjunto de funciones cuadrado integrables en Ω y $H^1_{(\Omega)}$ aquellas funciones cuya primer derivada pertenece a $L^2_{(\Omega)}$. Además $H^1_{0(\Omega)}$ es un subespacio de $H^1_{(\Omega)}$ tales que sus elementos se anulan sobre $\Gamma_{\mathbf{u}}$, es decir sobre la frontera Dirichlet de Ω .

Considérese que (\mathbf{u}^h, p^h) , con $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h \subset H^1_{(\Omega^h)}$ y $p^h \in Q^h \subset L^2_{(\Omega^h)}$, representan las aproximaciones por elementos finitos del campo de desplazamientos y presiones respectivamente, siendo \mathcal{V}^h la aproximación a $H^1_{(\Omega^h)}$ ($\mathcal{V}^h \approx H^1_{(\Omega^h)} \Rightarrow \mathcal{V}^h_0 \approx H^1_{0(\Omega^h)}$) y Q^h la aproximación de $L^2_{(\Omega^h)}$. El hecho de adoptar funciones de interpolación de igual orden para dichos espacios, implica necesariamente la introducción de términos de estabilización \mathcal{S}_{st} . La forma discreta del principio variacional 5.8 puede formularse entonces como:

- conocido los valores prescritos de $\mathbf{b} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $\mathbf{t}^* : \Gamma_\sigma \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$
- encontrar los campos $\mathbf{u}^h : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $p^h : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$; $(\mathbf{u}^h, p^h) \in (\mathcal{V}^h \times Q^h)$, tal que se satisfaga:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([p^h, \mathbf{u}^h]; [q^h, \mathbf{w}^h]) &= -\langle p^h; \nabla \cdot \mathbf{w}^h \rangle + \langle \mathbf{S}(\mathbf{u}^h); (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym} \rangle - \langle \rho \mathbf{b}; \mathbf{w}^h \rangle - \\ &\quad - \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{w}^h) d\Gamma_\sigma + \langle q^h; (\frac{p^h}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u}^h) \rangle + \quad (5.9) \\ &\quad + \mathcal{S}_{st}([p^h, \mathbf{u}^h]; [q^h, \mathbf{w}^h]) = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}^h_0 \quad \wedge \quad \forall q^h \in Q^h \end{aligned}$$

En el contexto de *CFD* (*Computational Fluid Dynamics*) se han propuesto diferentes alternativas para evaluar los términos estabilizantes \mathcal{S}_{st} . Por ejemplo, la estrategia denominada *GLS* (*Galerking/Least Square Hughes et al. [HFB85]*) es probablemente la más reconocida. Esta misma técnica ha sido extendida a aplicaciones en *Mecánica de Sólidos* por Klass et al. [KMS99], quien utilizó interpolación lineal de igual orden en elasticidad finita incompresible obteniendo resultados satisfactorios.

A continuación se introduce en forma resumida: (i) el esquema *PSPG* (*Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin*), el cual puede ser considerado como como un caso particular del método *GLS*, (ii) la estrategia *PGP* (*orthogonal sub-grid Pressure Gradient Projection*) [Cod00a, CB00]. El último de estos esquemas fue recientemente extendido al contexto de elasticidad por Chiumenti et al. [CVdSC02a] y utilizado en plasticidad por Chiumenti

et al. [CVdSC02b, CCVdS03] (véase también Valverde [Val02]). Estos estudios han demostrado la capacidad de esta aproximación para resolver problemas donde esquemas alternativos difícilmente funcionan satisfactoriamente y por tal motivo se la ha adoptado como técnica de estabilización a lo largo de este trabajo.

Las dos metodología mencionadas (*PSPG* y *PGP*) consideran el término \mathcal{S}_{st} proporcional a un factor de estabilización τ dependiente de propiedades elásticas del material y del tamaño del elemento finito, por lo tanto su valor cambia de un elemento a otro.

5.2.3. Esquema de estabilización *PSPG*

En esta estrategia el término \mathcal{S}_{st} en la ecuación (5.9) se define mediante:

$$\mathcal{S}_{st}^{PSPG} = - \left\langle \nabla q^h; \tau^{PSPG} \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(p^h, \mathbf{u}^h) + \rho \mathbf{b})}_{\mathbf{r}: \text{residuo de la ec. de Cauchy}} \right\rangle_{\Omega^e} \quad \forall q^h \in Q^h \quad (5.10)$$

donde el factor τ^{PSPG} es:

$$\tau^{PSPG} = \alpha \frac{h_e^2}{2\mu} \quad (5.11)$$

siendo α un parámetro de estabilidad positivo, h_e el tamaño característico del elemento finito y μ el módulo de corte para el problema elástico.

Observación 18 Tezduyar et al. [TMR92] han incluido un término adicional para el tratamiento de la restricción de incompresibilidad en (5.9).

Observación 19 en Klass et al. [KMS99] se ha considerado un término de estabilización similar sin incluir las fuerzas de cuerpo ($\rho \mathbf{b}$) en el término \mathbf{r} de la ecuación 5.10.

5.2.4. Esquema de estabilización *PGP*

El término de estabilización \mathcal{S}_{st} se define ahora como sigue:

$$\mathcal{S}_{st}^{PGP} = \langle \nabla q^h; \tau^{PGP} (\nabla p^h - \boldsymbol{\Pi}^h) \rangle_{\Omega^e} \quad \forall q^h \in Q^h \quad (5.12)$$

donde $\boldsymbol{\Pi}^h (\in \mathcal{V}^h)$ es la proyección L^2 del gradiente de presión ∇p^h sobre el espacio discreto de aproximación por elementos finitos \mathcal{V}^h (ver figura 5.2):

$$\langle (\nabla p^h - \boldsymbol{\Pi}^h); \boldsymbol{\eta}^h \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}^h \quad (5.13)$$

siendo $\boldsymbol{\eta}^h$ variaciones admisibles del campo gradiente de presión proyectado $\boldsymbol{\Pi}^h$ ($\boldsymbol{\eta}^h \equiv \delta \boldsymbol{\Pi}^h$).

Recuérdese que las funciones en \mathcal{V}^h no toman valores nulos sobre la frontera $\Gamma_{\mathbf{u}}$, de esta forma $\boldsymbol{\Pi}^h$ es un campo vectorial de \mathbb{R}^{ndim} que pertenece al mismo espacio de aproximación que los desplazamientos \mathbf{u}^h . La ecuación 5.13, la cual determina el campo $\boldsymbol{\Pi}^h$, debe agregarse como una restricción adicional a la forma mixta variacional 5.9.

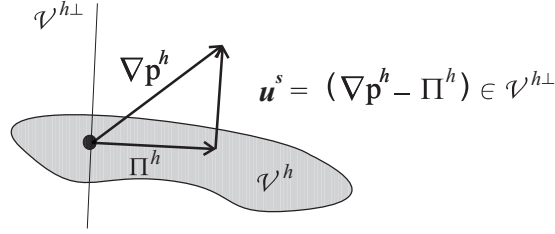


Figura 5.2: Representación gráfica de la proyección L^2 del gradiente de presión discretizado ∇p^h sobre el espacio de aproximación por Elementos Finitos.

El coeficiente de estabilización τ^{PGP} puede computarse a nivel de cada elemento finito como función de su tamaño característico y módulo de corte:

$$\tau^{PGP} = c \frac{h_e^2}{2\mu^*} \quad (5.14)$$

donde $c \approx \mathcal{O}(1)$ es un coeficiente escalar adimensional constante (Codina [Cod00a] utilizó un valor $c = 4$ en aplicaciones de mecánica de fluidos). Siguiendo a Chiumenti et al. [CVdSC02b], se adopta un módulo de corte secante μ^* para la evaluación final de τ^{PGP} en problemas de plasticidad J_2 .

Observación 20 *se recomienda consultar el anexo B, donde se ha desarrollado una interpretación conceptual de la estabilización mediante sub escalas, en el contexto de sub escalas ortogonales, con el objeto de justificar la aparición del término adicional (estabilizante) τ^{PGP} en las ecuaciones clásicas de balance.*

5.3. Implementación numérica del esquema estabilizado PGP

En esta sección, se describe la implementación numérica utilizando el término de estabilización correspondiente al esquema PGP . Para ello se introducen las aproximaciones de los campos discretos en la formulación variacional 5.9, incorporando además la ecuación de proyección 5.13 como una restricción adicional a satisfacer.

5.3.1. Definición de los campos discretos

Consideremos que los espacios Q y \mathcal{V} pueden aproximarse con funciones de interpolación de igual orden (en particular aproximación lineal por tramos del tipo C^0). El problema mecánico (5.3, 5.5, 5.6, 5.1-(a)) se describe entonces en términos de una formulación variacional de tres campos, de la siguiente manera:

- asumiendo que se conoce $\mathbf{b} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $\mathbf{t}^* : \Gamma_\sigma \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$
- determinar $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$, $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{\Pi} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$; $(\mathbf{u}, p, \mathbf{\Pi}) \in (\mathcal{V} \times Q \times \mathcal{V})$, tal que se verifique simultáneamente:

$$-\langle p; \nabla \cdot \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{S}(\mathbf{u}); (\nabla \mathbf{w})^{sym} \rangle - \langle \rho \mathbf{b}; \mathbf{w} \rangle = \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{w}) d\Gamma_\sigma \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_0 \quad (5.15)$$

$$\langle q; \left(\frac{p}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u}\right) \rangle + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \langle \nabla q; \tau^{PGP}(\nabla p - \mathbf{\Pi}) \rangle_{\Omega^e} = 0 \quad \forall q \in Q \quad (5.16)$$

$$\langle (\nabla p - \mathbf{\Pi}); \boldsymbol{\eta} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \quad (5.17)$$

Observación 21 por cuestiones de claridad de lectura, se ha suprimido el supraíndice h que hacía referencia a campos discretos, ya que de aquí en adelante no hay posibilidad de confusión.

Observación 22 debe notarse que la aproximación discreta del campo $\mathbf{\Pi}$ utiliza el mismo espacio de interpolación que \mathbf{u} .

Introduciendo notación matricial de uso común en el contexto del MEF, los campos interpolados se expresan como:

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_u^e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}^e(t) \quad ; \quad \mathbf{w}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_u^e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{w}}^e \quad (5.18)$$

$$p^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_p^e(\mathbf{x}) \hat{p}^e(t) \quad ; \quad q^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_p^e(\mathbf{x}) \hat{q}^e \quad (5.19)$$

$$\mathbf{\Pi}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_u^e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{\Pi}}^e(t) \quad ; \quad \boldsymbol{\eta}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_u^e(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\eta}}^e \quad (5.20)$$

donde \mathbf{N}_u^e y \mathbf{N}_p^e representan los arreglos de funciones de interpolación para los grados de libertad de desplazamiento y presión definidos a nivel del elemento respectivamente, $(\hat{\bullet})$ se refiere a los valores nodales de la variable (\bullet) y el supraíndice e hace referencia al elemento finito en estudio. Teniendo en cuenta 5.18 y 5.19 se tiene:

$$(\nabla \mathbf{N}_u^e)^{sym} = \mathbf{B}^e \quad (5.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_u^e = \mathbb{I}^T \mathbf{B}^e \quad (5.22)$$

$$\nabla \mathbf{N}_p^e = \mathbf{D}^e \quad (5.23)$$

en donde \mathbf{B}^e simboliza el clásico operador deformación-desplazamiento e \mathbb{I} es la representación, en formato matricial, del tensor identidad de segundo orden ($\mathbb{I} = [1, 1, 0]^T$ para 2D, $\mathbb{I} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T$ para 3D, asumiendo que en la notación vectorial de tensores las componentes de la deformación se escriben: $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}\}^T$ en 2D y $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}\}^T$ en 3D).

La versión algorítmica del sistema de ecuaciones (5.15)-(5.17) puede escribirse convenientemente:

$$\begin{cases} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S}^e(\hat{\mathbf{u}}^e) d\Omega^e \right] - \mathbf{G}_0 \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_u^{(ext)} \\ -\mathbf{G}_0^T \hat{\mathbf{u}} - \left[\frac{1}{\kappa} \mathbf{M}_p + \mathbf{L} \right] \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{\Pi}} = 0 \\ \mathbf{H} \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{M}_u \hat{\mathbf{\Pi}} = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

siendo \mathbf{A} el operador de ensamble estándar de elementos finitos. Para poner en evidencia el carácter simétrico del sistema, se ha cambiado el signo de la ecuación 5.24-(b) y la expresión 5.24-(c) se ha escalado por τ^{PGP} . A partir de 5.24-(a) surge la definición del vector de fuerzas $\mathbf{F}_u^{(ext)}$:

$$\mathbf{F}_u^{(ext)} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}_u^{eT} \mathbf{b} \, d\Omega^e + \int_{\Gamma_\sigma^e} \mathbf{N}_u^{eT} \mathbf{t}^* \, d\Gamma_\sigma^e \right] \quad (5.25)$$

además las matrices \mathbf{G}_0 , \mathbf{M}_p , \mathbf{M}_u , \mathbf{L} y \mathbf{H} se computan mediante:

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbb{I} \mathbf{N}_p^e \, d\Omega^e \right] \quad (5.26)$$

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}_p^{eT} \mathbf{N}_p^e \, d\Omega^e \right] \quad (5.27)$$

$$\mathbf{M}_u = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^{eT} \tau^{PGP} \mathbf{N}_u^e \, d\Omega^e \right] \quad (5.28)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{D}^{eT} \tau^{PGP} \mathbf{D}^e \, d\Omega^e \right] \quad (5.29)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^{eT} \tau^{PGP} \mathbf{D}^e \, d\Omega^e \right] \quad (5.30)$$

donde el supraíndice 0, en 5.26, considera la condición de borde Dirichlet homogénea sobre el espacio de variaciones admisibles de desplazamiento \mathcal{V}_0 . Debe notarse que, en la presente formulación, aun al considerar interpolaciones de igual orden, existen diferencias entre el espacio de variaciones admisibles de \mathbf{u} y \mathbb{I} debido a la falta de condiciones de borde sobre este último campo ($\mathbf{w} \in \mathcal{V}_0$; $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}$).

5.3.2. Evaluación del residuo

El sistema no lineal de ecuaciones algebraicas 5.24, el cual depende del (pseudo) tiempo $t \in [0, T]$, puede resolverse para cada paso de análisis mediante un procedimiento iterativo de Newton-Raphson. En este caso, el alto coste computacional que representa la introducción del nuevo campo vectorial \mathbb{I} , hace que tal esquema no sea competitivo si lo comparamos con estrategias alternativas de estabilización. Por este motivo, siguiendo los trabajos de Codina [Cod00a] y Chiumenti et al. [CVdSC02a], se plantea un tratamiento simplificado para lograr una mayor eficiencia numérica. Considérese para ello que el campo gradiente de presión proyectado \mathbb{I} no varía significativamente entre el paso (i) y el

paso $(i + 1)$, luego es posible resolver un sistema de ecuaciones alternativo de la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S}^{e(i+1)} d\Omega^e \right] - \mathbf{G}_0 \hat{\mathbf{p}}^{(i+1)} = \mathbf{F}_u^{(ext)(i+1)} & (a) \\ -\mathbf{G}_0^T \hat{\mathbf{u}}^{(i+1)} - \left[\frac{1}{\kappa} \mathbf{M}_p + \mathbf{L}^{(i+1)} \right] \hat{\mathbf{p}}^{(i+1)} = -\mathbf{H}^T \hat{\Pi}^{(i)} & (b) \end{cases} \quad (5.31)$$

donde $\hat{\Pi}^{(i)}$ se evalúa considerando 5.24-(c) una vez que el procedimiento de Newton-Raphson no lineal ha convergido para las variables de desplazamiento y presión en el paso de carga (i) . A nivel global es posible expresar:

$$\hat{\Pi}^{(i)} = \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{H}^{(i)} \hat{\mathbf{p}}^{(i)} \quad (5.32)$$

En estas circunstancias, el término derecho en la expresión 5.31-(b) puede considerarse como un vector de cargas conocido para esta ecuación, mientras que la evaluación de $\hat{\Pi}^{(i)}$, a partir de 5.32 al final de cada paso (i) , requiere un costo computacional despreciable (similar a una estrategia estándar de suavizado de variables), principalmente si la matriz de masa \mathbf{M}_u , como es usual, se construye en forma aglutinada (lumped o diagonal).

El sistema de ecuaciones 5.31 puede reescribirse de una forma más compacta:

$$\mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{F}^{(ext)} \quad (5.33)$$

en términos del vector de fuerza interna generalizada $\mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{u}, p)$:

$$\mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{u}, p) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{(int)} \\ \mathbf{F}_p^{(int)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S}^{e(i+1)} d\Omega^e \right] - \mathbf{G}_0 \hat{\mathbf{p}}^{(i+1)} \\ -\mathbf{G}_0^T \hat{\mathbf{u}}^{(i+1)} - \left[\frac{1}{\kappa} \mathbf{M}_p + \mathbf{L}^{(i+1)} \right] \hat{\mathbf{p}}^{(i+1)} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

y del vector fuerza externa generalizada $\mathbf{F}^{(ext)}$:

$$\mathbf{F}^{(ext)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{(ext)} \\ \mathbf{F}_p^{(ext)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{(ext)} \\ -\mathbf{H}^T \hat{\Pi}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Finalmente, teniendo en cuenta las definiciones 5.34 y 5.35 el residuo $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p)$ del modelo numérico mixto-estabilizado se evalúa mediante:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{u}, p) - \mathbf{F}^{(ext)} \quad (5.36)$$

5.3.3. Tensor constitutivo tangente consistente

La utilización de un esquema iterativo implícito del tipo Newton-Raphson completo, el cual asegura velocidad de convergencia cuadrática para la resolución de 5.33, requiere el continuo cómputo de la matriz tangente. Considérese para ello la siguiente definición del vector de variables independientes generalizadas:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{u}, p]^T \quad (5.37)$$

En este contexto de análisis, el Jacobiano $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ del sistema puede evaluarse a partir de la variación de primer orden del residuo con respecto al conjunto de variables independientes $\mathbf{X} = [\mathbf{u}, p]^T$:

$$\delta \mathbf{R}(\mathbf{X}) = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}}_{\mathbf{J}(\mathbf{X})} \delta \mathbf{X} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}}_{\mathbf{J}(\mathbf{X})} \delta \mathbf{X} = \delta \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{X}) \quad (5.38)$$

o bien en forma extendida:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta \mathbf{F}_u^{(int)} \\ \delta \mathbf{F}_p^{(int)} \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{X})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{up} \\ \mathbf{K}_{pu} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{u}} \\ \delta \hat{p} \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{X}} \quad (5.39)$$

definiendo cada submatriz \mathbf{K}_{ij} en (5.39) de la forma:

$$\mathbf{K}_{uu} = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^e T dev(\mathbf{C}) \mathbf{B}^e d_{\Omega^e} \right] \quad (5.40)$$

$$\mathbf{K}_{up} = \mathbf{K}_{pu}^T = -\mathbf{G}_0 \quad (5.41)$$

$$\mathbf{K}_{pp} = - \left[\frac{1}{\kappa} \mathbf{M}_p + \mathbf{L} \right] \quad (5.42)$$

donde $dev(\mathbf{C})$ es la componente desviadora del tensor constitutivo tangente algorítmico³ evaluado en el elemento finito a partir del modelo J_2 .

5.4. Ejemplos de aplicación

A continuación se evalúa la performance numérica del modelo mixto estabilizado PGP , resolviendo casos bidimensionales y tridimensionales. Estos resultados se comparan con soluciones obtenidas con elementos finitos estándar de Galerkin (aquí denominados STD) y con una formulación mixta sin estabilización ($MSTD$).

En el primer test se presenta una estimación de la tasa de convergencia en los campos \mathbf{u} y p del esquema PGP a medida que se refina la malla, comparándola con distintas formulaciones de elementos, en régimen compresible e incompresible.

En el segundo ejemplo numérico (elasticidad incompresible) se realiza un estudio paramétrico en términos del coeficiente de estabilización c y se demuestra una completa analogía entre el modelo PGP y una estrategia de estabilización del tipo $PSPG$. Este ejemplo involucra una gran cantidad de grados de libertad. Por este motivo el mismo se ha resuelto en un entorno paralelo de cálculo utilizando diferentes estrategias iterativas de solución y distintos preconditionadores para resolver el sistema final de ecuaciones. La descripción de este aspecto distintivo del ejemplo no se incluye en esta sección sino que se detalla en el apéndice C.

³Entendemos por componente desviadora de un tensor de cuarto orden a la siguiente proyección: $dev(\mathbf{C}) = \mathbf{P}_D : \mathbf{C}$ donde, como ya se definió, se tiene $\mathbf{P}_D = \mathbb{I} - \frac{1}{3}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I})$.

Las subsecciones 5.4.3, 5.4.4, 5.4.5 están dedicadas a la solución de problemas en plasticidad. En particular, estamos especialmente interesados en evaluar la capacidad que posee del modelo mixto estabilizado *PGP* para capturar la carga límite, el mecanismo de falla en forma de bandas de corte y la sensibilidad u objetividad en malla (independencia de orientación) en la respuesta post-crítica del material. Esta última propiedad es una de las características más importantes que se espera de un elemento finito pensado para obtener una correcta representación del fenómeno de localización de deformaciones y predicción satisfactoria de los modos de falla.

5.4.1. Análisis de convergencia

Se analizan en este apartado las propiedades de convergencia del triángulo estabilizado *PGP* en régimen de elasticidad compresible e incompresible. Para este fin, consideramos un problema que posee solución analítica, el cual consiste en una viga en voladizo sometida a un modo de deformación por flexión. La solución exacta para el caso de tensión o deformación plana puede encontrarse en cualquier libro clásico de teoría de elasticidad. En particular, hemos tomado este ejemplo de Belytschko et al. [BB91] donde también se utiliza este test para validar modelos numéricos ante restricciones de incompresibilidad.

En la figura 5.3-(a) se observa el modelo físico y la geometría del problema. La solución analítica, en términos del campo de desplazamientos $\mathbf{u} = [u_x, u_y]$, viene expresada de la forma:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{Fy}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \bar{\nu})(y^2 - \frac{1}{4}D^2) \right] \\ u_y(x, y) &= -\frac{F}{6EI} \left[3\bar{\nu}y^2(L - x) + \frac{1}{4}(4 + 5\bar{\nu})D^2x + (3L - x)x^2 \right] \end{aligned} \quad (5.43)$$

donde F es la carga resultante tangencial por unidad de longitud, $I = D^3/12$ es una medida de la rigidez flexional. Considerando el caso de deformación plana se tiene que: $\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$, $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}$, siendo E y ν el módulo de Young y la relación de Poisson respectivamente.

La condición de borde en tracciones a imponer en los extremos de la viga debe ser compatible con la solución analítica del campo tensional derivado a partir del campo de desplazamientos 5.43. En $x = 0$, se tendrá:

$$\begin{aligned} \sigma_x(0, y) &= -\frac{Fy}{I}L & (a) \\ \tau_{xy}(y) &= \frac{F}{2I} \left[\frac{1}{4}D^2 - y^2 \right] & (b) \end{aligned} \quad (5.44)$$

mientras que en $x = L$, $\sigma_x = \sigma_y = 0$ y las tensiones de corte τ_{xy} , como no dependen de la posición x , están dadas nuevamente por la ecuación 5.44-(b).

Las condiciones de borde cinemáticas y mecánicas pueden observarse en la figura 5.3-(b) para la malla más gruesa utilizada. Si se imponen las restricciones adecuadas de manera de conservar la simetría que presenta el problema, sólo es necesario modelar la mitad (superior) de la viga.

El análisis de convergencia aquí presentado se realiza en términos de medidas del error en desplazamientos y presiones (precisamente las variables independientes del modelo

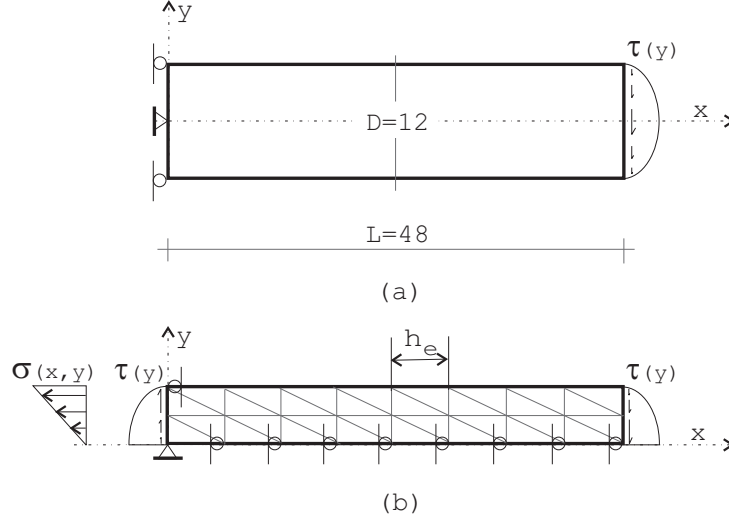


Figura 5.3: Análisis de convergencia del esquema PGP . Test en modo flexión de viga en cantilever: (a) Modelo físico y geometría de la estructura. (b) Modelo numérico y condiciones de contorno.

mixto). Tales magnitudes se evalúan según normas definidas en el espacio de funciones cuadrado integrables L^2 , de la forma:

$$\|\mathbf{e}_u\|_{L^2} = \|(\mathbf{u}_{(EX)} - \mathbf{u}_{(PGP)})\|_{L^2} = \left[\int_{\Omega} (\mathbf{u}_{(EX)} - \mathbf{u}_{(PGP)})^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.45)$$

$$\|\mathbf{e}_p\|_{L^2} = \|(p_{(EX)} - p_{(PGP)})\|_{L^2} = \left[\int_{\Omega} (p_{(EX)} - p_{(PGP)})^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.46)$$

donde $(\bullet)_{(EX)}$ y $(\bullet)_{(PGP)}$ representan la solución exacta y numérica obtenida mediante el modelo mixto estabilizado, respectivamente.

En particular, se estudian dos situaciones dependientes del valor numérico del coeficiente de Poisson (caso compresible $\nu = 0,25$ y caso incompresible $\nu = 0,49999$). En la figura 5.4 y 5.5 se observan las curvas de convergencia de los triángulos: estándar (STD), mixto sin estabilización ($MSTD$) y mixto estabilizado (PGP , $c = 1$) como función del tamaño característico del elemento h_e .

Como era previsible, debe notarse que en la situación compresible las tres formulaciones de elementos finitos muestran velocidad de convergencia similar, tanto para el campo de desplazamiento como para el de presiones. En este caso, el esquema mixto y en particular el mixto estabilizado, presentan claras desventajas desde el punto de vista del coste computacional. Sin embargo, si analizamos ahora el desempeño del elemento PGP en régimen incompresible, se obtiene una clara ventaja en relación a otros modelos. La tasa de convergencia resultante es de aproximadamente 1,7 (en desplazamientos y presiones), similar al caso compresible. Esto implica que la restricción cinemática de incompresibilidad no afecta sustancialmente la velocidad de convergencia en el modelo mixto-estabilizado, como sí sucede para las restantes formulaciones de elementos.

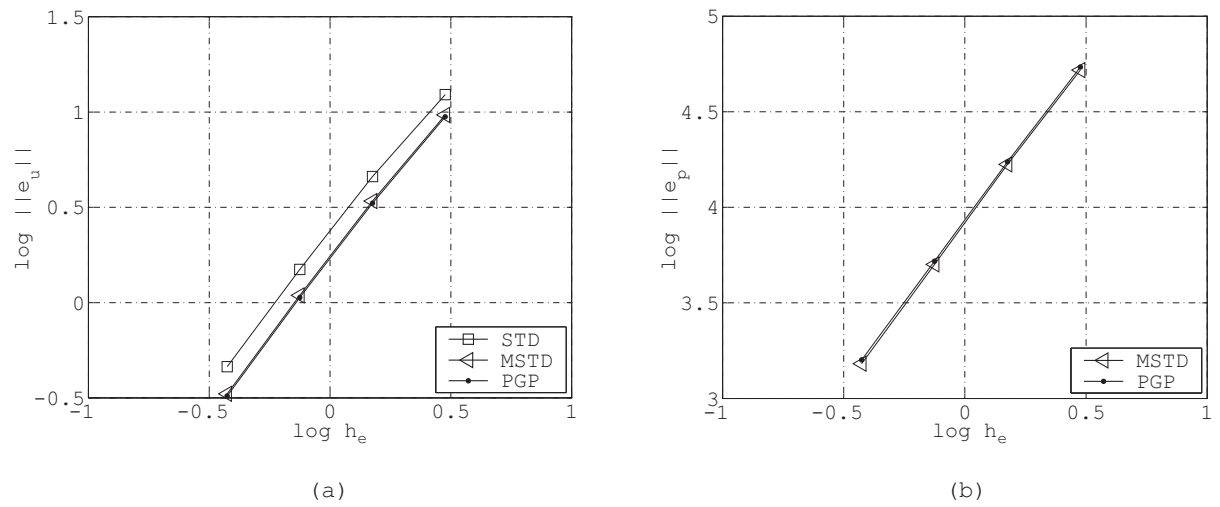


Figura 5.4: Análisis de convergencia del esquema *PGP*. Caso de elasticidad compresible $\nu = 0,25$: (a) Convergencia en desplazamientos. (b) Convergencia en presiones.

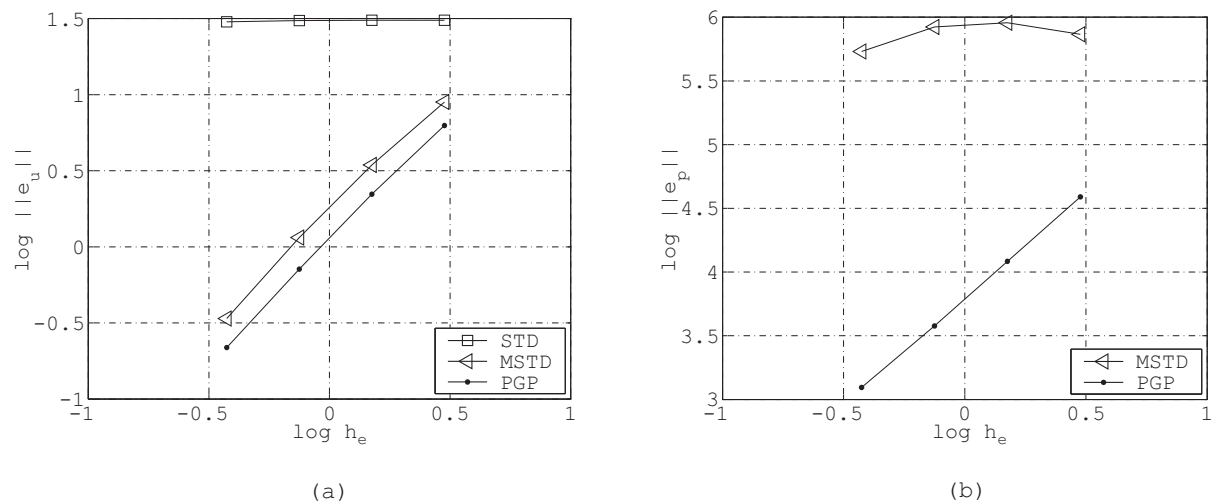


Figura 5.5: Análisis de convergencia del esquema *PGP*. Caso de elasticidad incompresible $\nu = 0,49999$: (a) Convergencia en desplazamientos. (b) Convergencia en presiones.

5.4.2. Elasticidad incompresible

En este ejemplo se evalúa la respuesta ante régimen de cuasi incompresibilidad elástica en un test de compresión dominante. El problema propuesto consiste en un bloque cúbico de $140 \times 140 \times 100$ (unidades de longitud expresadas en milímetros, ver figura 5.6) el cual se encuentra sometido a las siguientes condiciones de contorno: en la superficie inferior están restringidos todos los desplazamientos, la cara superior se asume vinculada a una placa suficientemente rígida capaz de imponer un desplazamiento vertical uniforme ($\delta y = 7[mm]$) mientras que el movimiento horizontal se encuentra impedido, los nodos ubicados sobre las caras laterales pueden desplazarse libremente. En la simulación numérica se ha utilizado un módulo de Young $E = 2999800 [MPa]$ y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,4999$, para inducir comportamiento de material incompresible.

En la figura 5.6 se muestran dos mallas no estructuradas de aproximadamente 56000 (figura 5.6-(a)) y 90000 (figura 5.6-(b)) elementos tetraédricos.

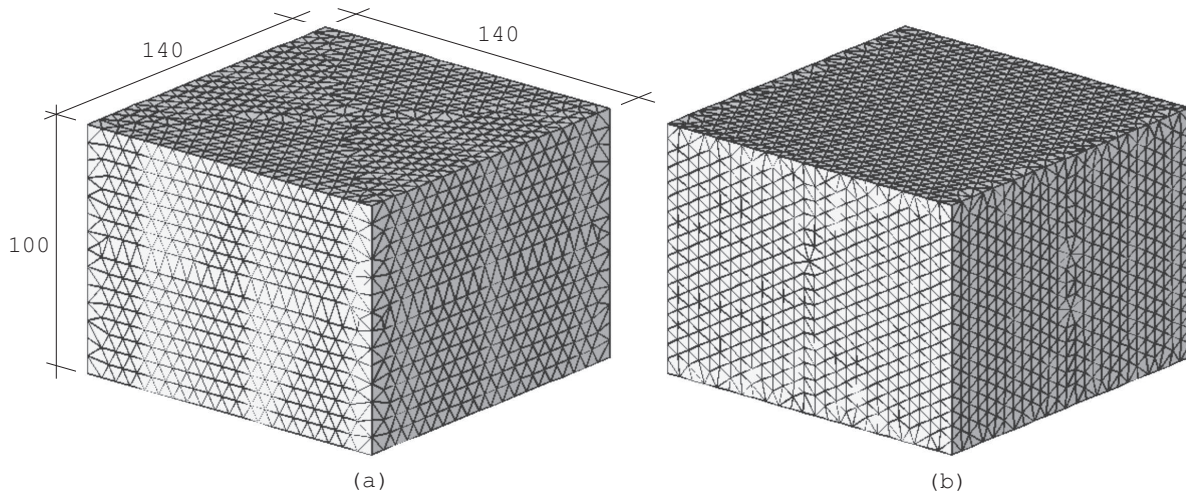


Figura 5.6: Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Niveles de discretización del modelo numérico: (a) 56000 tetraedros (b) 90000 tetraedros.

Al intentar resolver el problema asumiendo un nivel de estabilización despreciable ($c \approx 0$, ver ecuación 5.14) se obtienen severos efectos de bloqueo volumétrico que se evidencian al observar los mapas de tensión media de la figura 5.7, para ambas configuraciones de mallas. Recordamos que esta situación representa la respuesta mecánica de un modelo mixto inestable, aquí denominado (*MSTD*)

El comportamiento oscilante de la componente esférica de la tensión disminuye drásticamente cuando se activan los términos de estabilización \mathcal{S}_{st}^{PGP} . De esta forma, considerando un coeficiente $c = 1$, en la figura 5.8 puede observarse que el modelo *PGP* captura en forma correcta la distribución de tensión hidrostática.

La transición desde una solución inestable hacia una solución estable, en un rango de valores del coeficiente de estabilización c , queda en evidencia en la figura 5.9. Allí se ha graficado la variación de la tensión media a lo largo del segmento de línea interno al cubo \overline{AB} , demostrándose además cómo los modos espúreos de oscilación de la presión pueden evitarse adoptando un adecuado nivel de estabilización.

Dado que no solamente estamos interesados en un análisis cualitativo de los resultados,

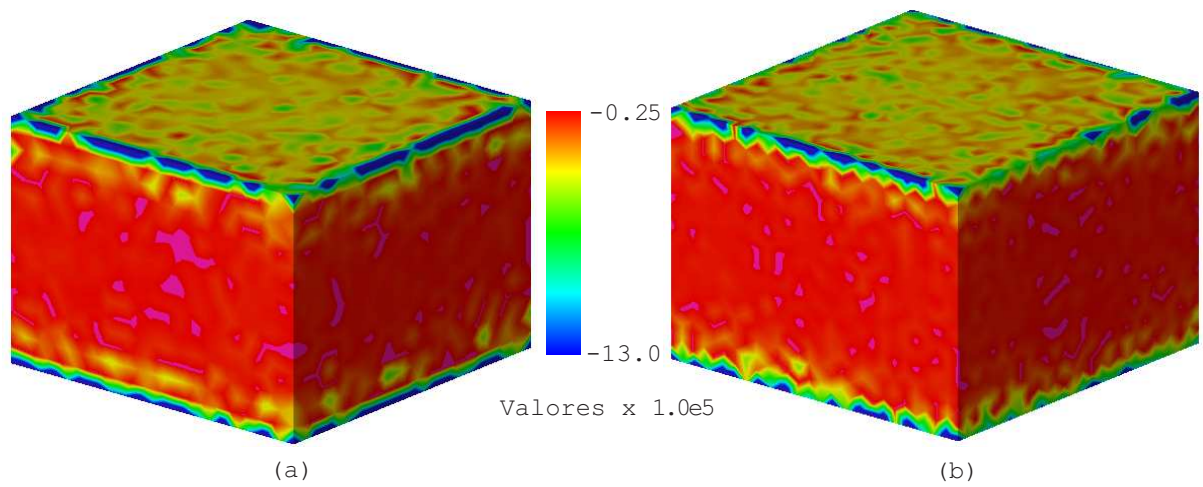


Figura 5.7: Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Mapas de tensión media σ_m para la formulación mixta sin estabilización *MSTD*: (a) Modelo con 56000 elementos. (b) Modelo con 90000 elementos.

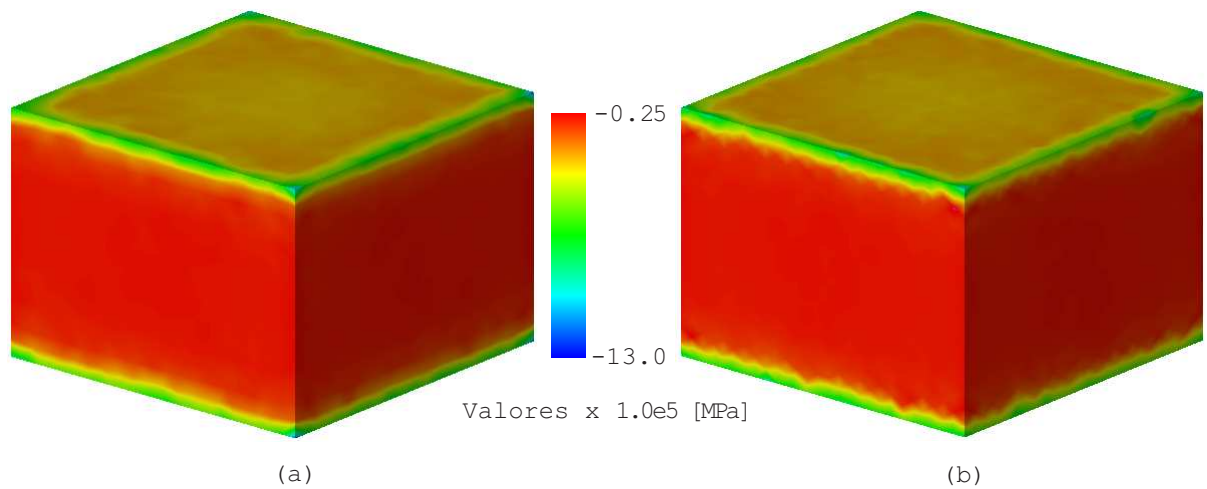


Figura 5.8: Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Mapas de tensión media σ_m para la formulación mixta estabilizada *PGP*: (a) Modelo con 56000 elementos. (b) Modelo con 90000 elementos.

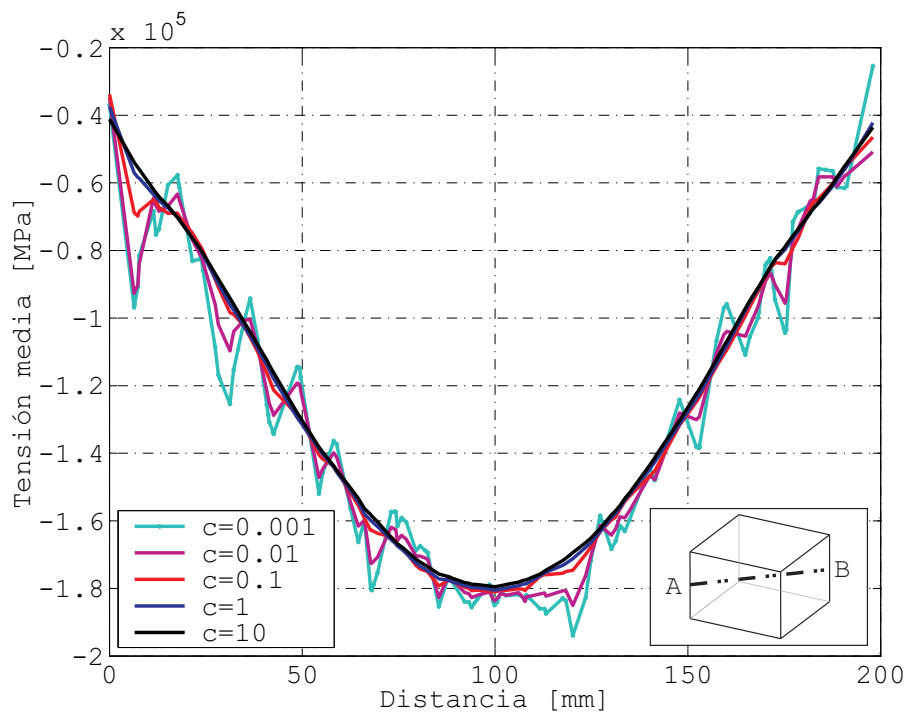


Figura 5.9: Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Curvas de variación de la tensión media σ_m en el segmento de línea interno \overline{AB} . Formulación *PGP* con diferentes valores del coeficiente de estabilización c .

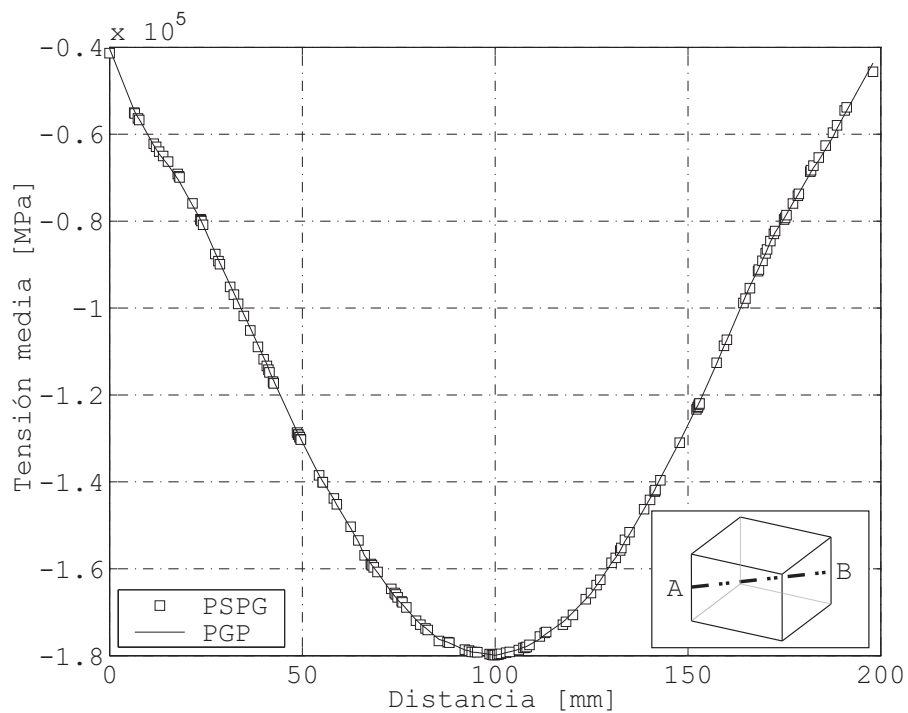


Figura 5.10: Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Curvas de variación de la tensión media σ_m en el segmento de línea interno \overline{AB} . Comparación numérica de dos procedimientos de estabilización: *PSPG* vs *PGP*

a continuación se presenta una comparación numérica en términos de la tensión media σ_m , entre el modelo presente y una técnica de estabilización bien conocida, verificada y extensamente utilizada en el contexto de *CFD*, nos referimos en particular al esquema *PSPG* (*Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin*).

De acuerdo con las expresiones 5.11 y 5.14, se han utilizado los siguientes factores de estabilización en la simulación:

$$\tau^{PSPG} = \frac{h_e^2}{12\mu} \quad ; \quad \tau^{PGP} = \frac{2h_e^2}{\mu} \quad (5.47)$$

La figura 5.10 muestra la comparación entre las curvas de tensión media a lo largo del segmento de línea interno \overline{AB} para el esquema *PSPG* y *PGP*. Debe notarse que ambas soluciones resultan prácticamente idénticas.

5.4.3. Test bidimensional de Prandtl

El objetivo básico de esta aplicación numérica, que corresponde a la versión bidimensional del test de Prandtl en deformación plana, es evaluar la sensibilidad u objetividad de la solución con respecto a la orientación de la malla de elementos finitos, particularmente en lo referente a la determinación de la máxima carga y obtención del mecanismo de colapso. El problema se describe como un semi espacio material cargado verticalmente por medio de una placa suficientemente rígida. Por cuestiones de practicidad, en la simulación numérica se ha limitado el dominio de estudio a un modelo discreto rectangular como se observa en la figura 5.11 (dimensiones en milímetros).

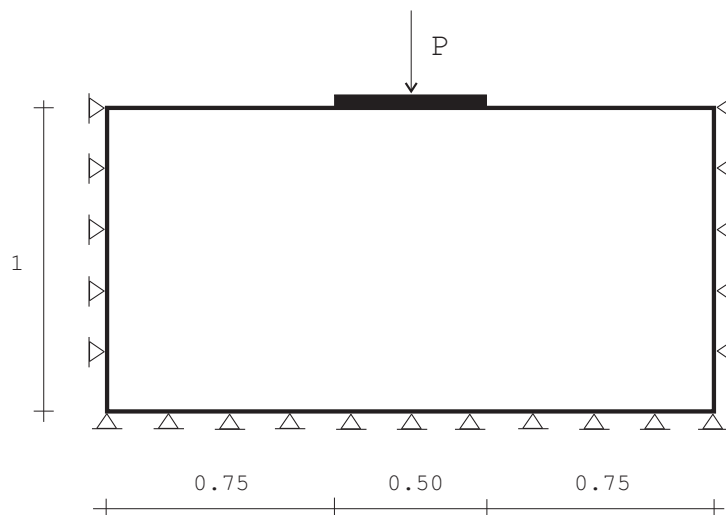


Figura 5.11: Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Geometría y condiciones de contorno (unidad de longitud: milímetros).

El mecanismo de falla (no es único) y la correspondiente carga límite estructural (única), considerando un modelo material elasto-plástico perfecto J_2 ha sido determinado analíticamente (véase por ejemplo Kachanov [Kac71], pág. 219). En este sentido, la

solución en carga pico es:

$$\frac{\sigma_N}{\sigma_y} = \frac{2 + \pi}{\sqrt{3}} \quad (5.48)$$

donde σ_N es la tensión neta bajo la zona de transferencia de carga y σ_y la tensión de fluencia del material. En el caso presente, se ha impuesto como restricción cinemática adicional que la placa rígida se desplace verticalmente sin rotación, con lo cual la unicidad en la determinación del mecanismo de falla queda garantizada.

La figura 5.12 muestra dos modelos discretos. La malla no estructurada 5.12-(a) se ha generado intencionalmente para obtener una distribución simétrica de nodos y elementos. La configuración estructurada 5.12-(b), revela direcciones predominantes d , en particular d_1 coincide con una de las bandas de deslizamiento del mecanismo de falla predicho por la solución analítica. Ambas mallas poseen aproximadamente 1800 elementos triangulares. La simulación numérica se ha realizado teniendo en cuenta un material que responde a un modelo constitutivo elástico-perfectamente plástico de Von Mises caracterizado por las propiedades mecánicas que se detallan a continuación: módulo de elasticidad $E = 1,0 [MPa]$, relación de Poisson $\nu = 0,499$ (nótese que se considera una situación de cuasi incompresibilidad desde el régimen elástico), tensión de fluencia $\sigma_y = 0,01 [MPa]$.

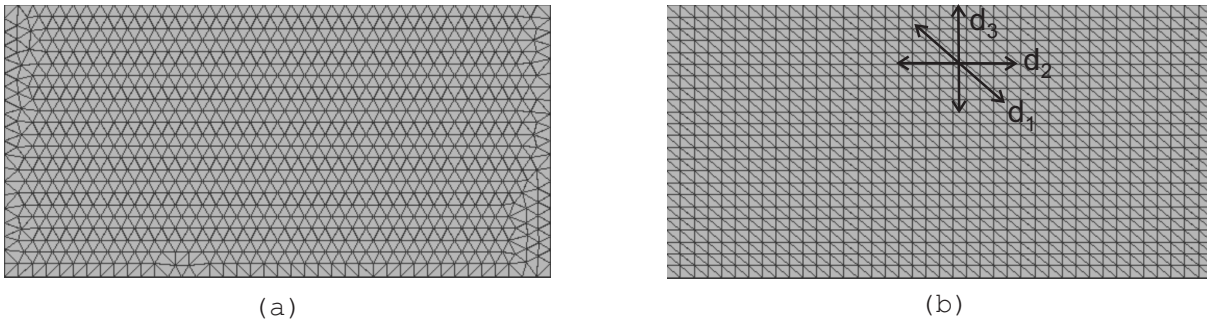


Figura 5.12: Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Configuraciones de malla: (a) Malla no estructurada. (b) Malla estructurada.

La malla no estructurada se ha resuelto utilizando el triángulo mixto estabilizado con el procedimiento *PGP* ($c = 1$) y también con un elemento triangular mixto sin estabilización *MSTD* ($c \approx 0$). En la figura 5.13 se observan mapas de tensión media, al momento de alcanzar el máximo desplazamiento impuesto ($\delta_y = 0,10 [mm]$). Nuevamente la formulación mixta estándar muestra una pobre performance evidenciando severas oscilaciones en la componente volumétrica del campo tensional, mientras que la formulación *PGP*, en cambio, origina soluciones suaves.

A continuación, analizamos la capacidad del modelo *PGP* para capturar el mecanismo de colapso estructural, estudiando además cómo influye la orientación geométrica de los elementos en la respuesta final. La figura 5.14 muestra mapas de deformación plástica equivalente una vez que el flujo inelástico se ha desarrollado completamente. Puede observarse claramente que la malla no estructurada de triángulos *PGP* predice un patrón simétrico de bandas de deslizamiento, en total correspondencia con la solución analítica del problema, figura 5.14-(a)). Sin embargo, en el caso de malla estructurada (no simétrica) la respuesta en términos del campo de deformaciones plásticas no parece conservar

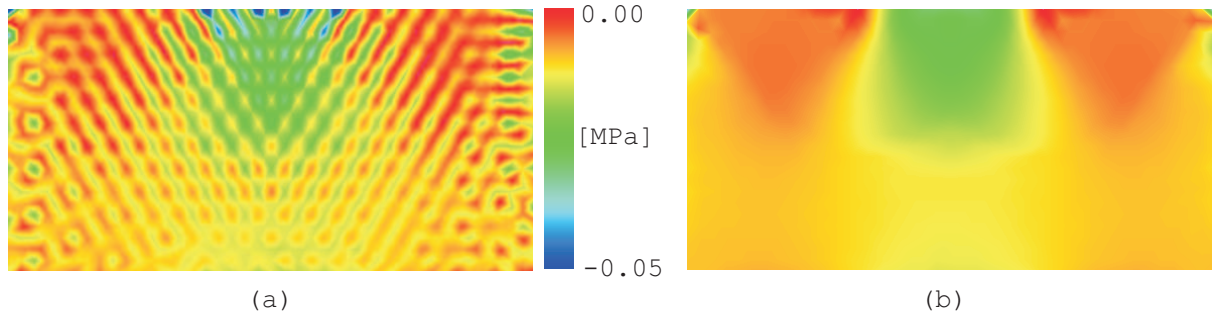


Figura 5.13: Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Mapas de tensión media: (a) Formulación *MSTD*. (b) Formulación *PGP*.

estrictamente dicha simetría, ver figura 5.14-(b)). Esta situación es mucho más crítica aún para los elementos estándar *STD* (formulación irreducible en desplazamientos), donde el bloqueo cinemático por incompresibilidad resulta notorio, como queda evidenciado a partir de la figura 5.14-(c).

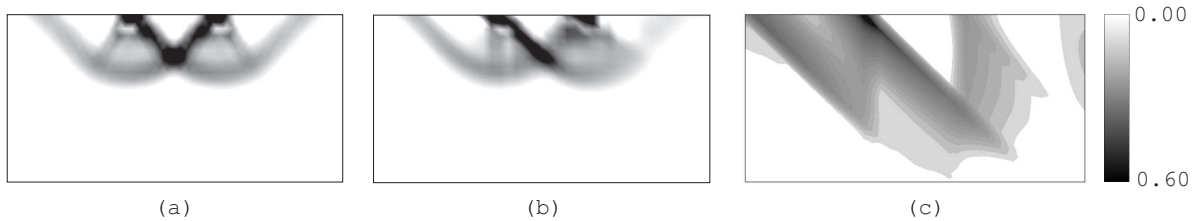


Figura 5.14: Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Mapa de deformación plástica equivalente: (a) Formulación *PGP*, malla no estructurada (simétrica). (b) Formulación *PGP*, malla estructurada (no simétrica). (c) Formulación *STD*, malla estructurada (no simétrica).

El mismo comportamiento en relación a la carencia de simetría en los resultados puede observarse analizando el campo primario \mathbf{u} . La figura 5.15 muestra curvas de igual desplazamiento para el esquema *PGP* obtenidas con la malla estructurada (no simétrica). Durante el régimen elástico 5.15-(a), aun considerando incompresibilidad elástica, el campo de desplazamientos resultante es aproximadamente simétrico. No obstante, adviértase que una vez iniciado el proceso de concentración de deformaciones plásticas, nuevamente se pierde esta característica en la respuesta, ver figura 5.15-(b). Un estudio similar en el elemento *STD* demuestra que esta pérdida de simetría se produce siempre que se intenta modelar problemas con deformaciones isócoras predominantes, independientemente si existe o no flujo plástico. Podemos concluir entonces que este fenómeno de índole numérico, es causado por la limitación bien conocida que presentan los elementos finitos símplices de bajo orden para capturar algunos tipos particulares de restricciones cinemáticas, tales como: (i) incompresibilidad y (ii) localización de deformaciones. El elemento *STD* falla en ambas situaciones. Como se deduce de este ejemplo, la estrategia *PGP* logra salvar eficientemente la primera de ellas, sin embargo, aún se observa un comportamiento patológico dependiente de la orientación de malla para modelar problemas con deformaciones plásticas altamente localizadas.

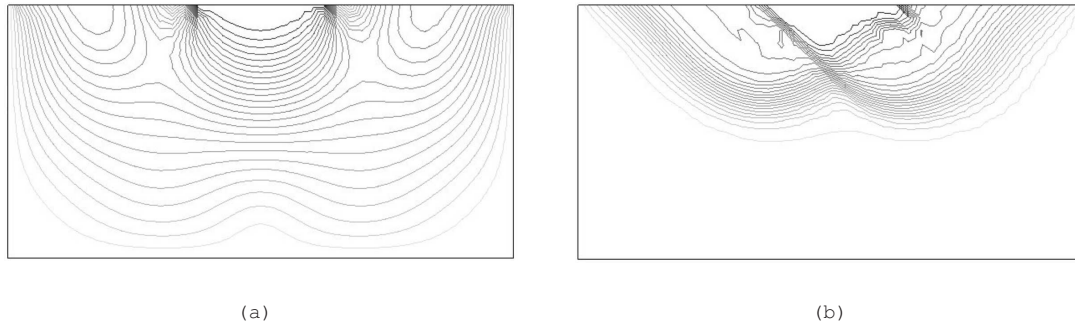


Figura 5.15: Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Contornos de igual desplazamiento: (a) Formulación *PGP* en régimen elástico, malla estructurada. (b) Formulación *PGP* en régimen plástico, malla estructurada.

En la figura 5.16 se comparan las curvas carga total sobre la placa versus descenso de la misma, para las dos mallas en estudio y considerando diferentes alternativas: triángulo estándar *STD*, formulación mixta *MSTD* y esquema mixto estabilizado *PGP*.

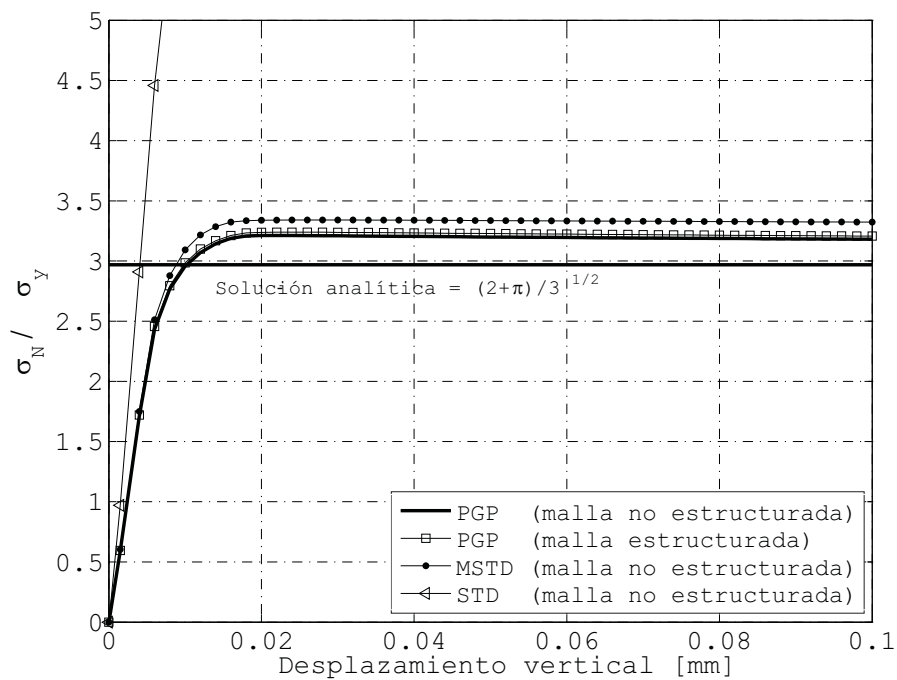


Figura 5.16: Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Curva carga desplazamiento.

Como se esperaba, el elemento clásico de Galerkin muestra una respuesta estructural sin carga pico, consecuencia directa del bloqueo cinemático. Por el contrario, para las otras dos formulaciones *MSTD* y *PGP*, se obtiene una carga límite bien definida. En este problema en particular, la predicción de la carga límite no parece estar influenciada por la direccionalidad de la malla, sin embargo esta conclusión no puede generalizarse. Se observa también una razonable concordancia con la solución analítica. Aunque no se muestra en este ejemplo, se ha verificado que para un mayor ajuste entre las soluciones numéricas y la

solución analítica, se requiere refinar la malla y ampliar el dominio de análisis, imponiendo las condiciones de contorno del problema teórico en forma más realista.

Finalmente queremos hacer notar un aspecto referente a la eficiencia numérica. El computo del campo vectorial $\mathbf{\Pi}$, cuando se utiliza el procedimiento descrito en 5.31 y 5.32, revela un costo computacional despreciable en comparación con otras partes del algoritmo ($< 5\%$ que el tiempo requerido por el solver del sistema de ecuaciones).

5.4.4. Cilindro 3D con entalla

Este ejemplo numérico está dedicado al estudio del elemento tetraédrico estabilizado *PGP* en régimen avanzado de deformaciones plásticas. El test consiste en un cilindro con entalla sometido a un estado de tracción axial producto de la aplicación de desplazamientos incrementales. Las proporciones geométricas y el modelo discreto (compuesto de aproximadamente 7800 elementos) utilizado en la simulación pueden observarse en la figura 5.17. Debido a condiciones de simetría sólo se modela 1/8 de la barra. El material responde a una ley constitutiva de plasticidad perfecta, descrito en términos de los siguientes parámetros mecánicos: módulo de Young $E = 3 \times 10^3 [MPa]$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ y tensión de fluencia $\sigma_y = 50 [MPa]$.

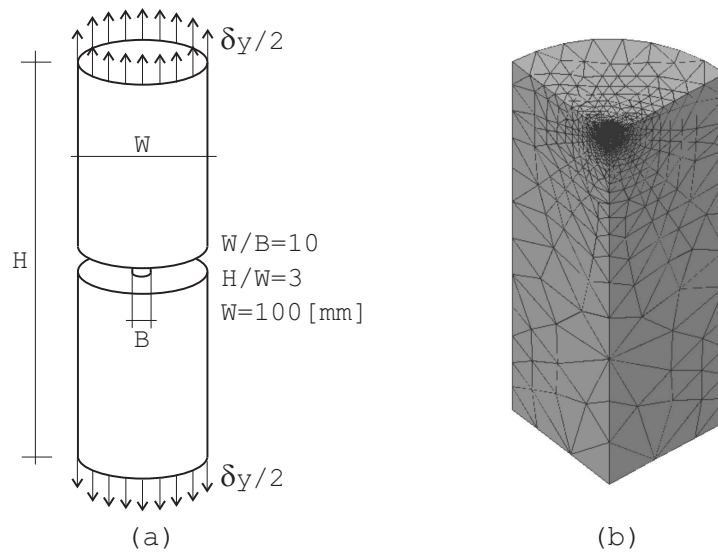


Figura 5.17: Cilindro 3D con entalla: (a) Geometría del problema. (b) Modelo discreto.

En la figura 5.18 se observa la curva tensión neta normalizada (σ_N/σ_y) versus el desplazamiento impuesto normalizado ($E\delta_y/(W\sigma_y)$) para dos esquemas de elementos finitos. Nuevamente la formulación estándar irreducible en desplazamientos (*STD*) falla en el intento de capturar la carga límite. La estrategia *PGP*, en cambio, exhibe una resistencia última estructural bien definida. La determinación de la carga pico en este ejemplo es equivalente al test de punzonamiento, si embargo el autor desconoce una solución analítica cuando se tiene simetría de revolución juntamente con un modelo de tipo Von Mises.

El campo de tensión media en la zona próxima a la entalla y en correspondencia con el máximo desplazamiento impuesto, puede verse en la figura 5.19. En este caso se consideran dos situaciones en función del parámetro c . Adoptando $c \approx 0,04$ el efecto estabilizante

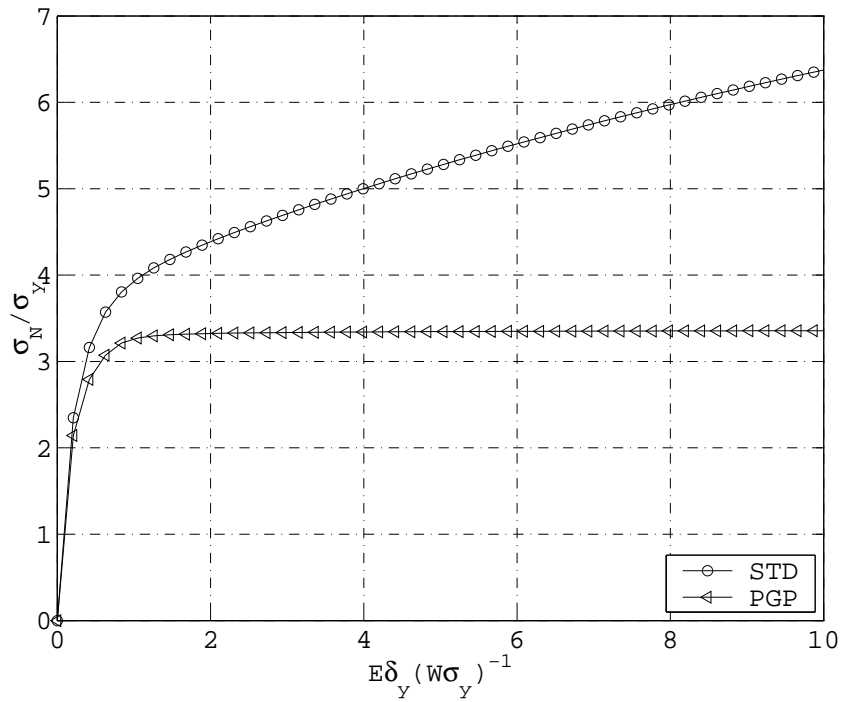


Figura 5.18: Cilindro 3D con entalla. Curva carga desplazamiento.

resulta prácticamente despreciable induciendo modos espúreos oscilantes en la respuesta, mientras que un factor $c \approx \mathcal{O}(1)$, en particular $c = 4$, impone un nivel de estabilización satisfactorio.

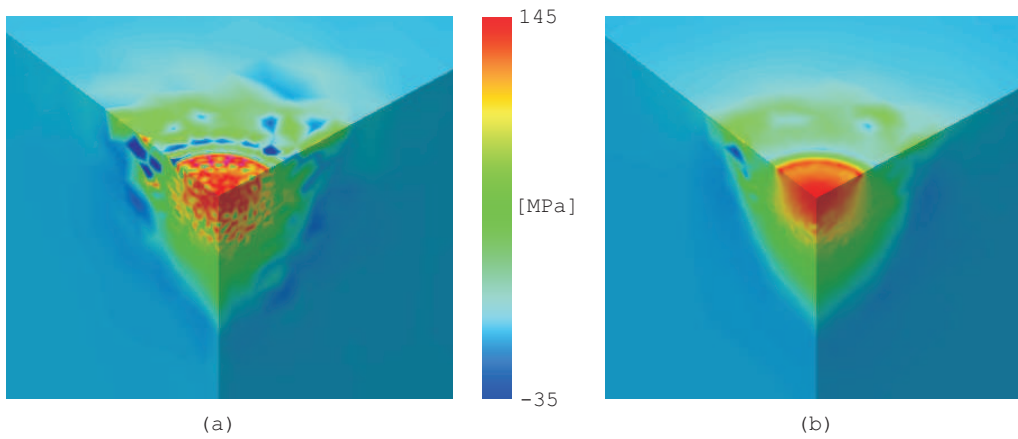


Figura 5.19: Cilindro 3D con entalla. Mapas de tensión media para la formulación *PGP*: (a) Factor de estabilización $c = 0,04$. (b) Factor de estabilización $c = 4$.

5.4.5. Problema de localización de deformaciones

En esta sección analizamos un prisma de sección cuadrangular sometido a un estado de compresión predominante, asumiendo además restricción de deformación plana. Se adopta un modelo elasto plástico J_2 equipado con una ley de ablandamiento por deformación de carácter isotrópico y lineal. Bajo estas condiciones, y después de alcanzar la condición crítica de inestabilidad material, la evidencia experimental indica el desarrollo de una zona con acumulación de deformaciones irreversibles, ver figura 5.20-(a) (inclinación aproximada de 45°). El test propuesto persigue como objetivo fundamental estudiar la habilidad del elemento triangular PGP para capturar este modo típico de falla.

Este ejemplo numérico también ha sido usado previamente por varios investigadores a principios de la década del 90, para probar sus formulaciones de elementos finitos en el contexto de localización por ablandamiento material.

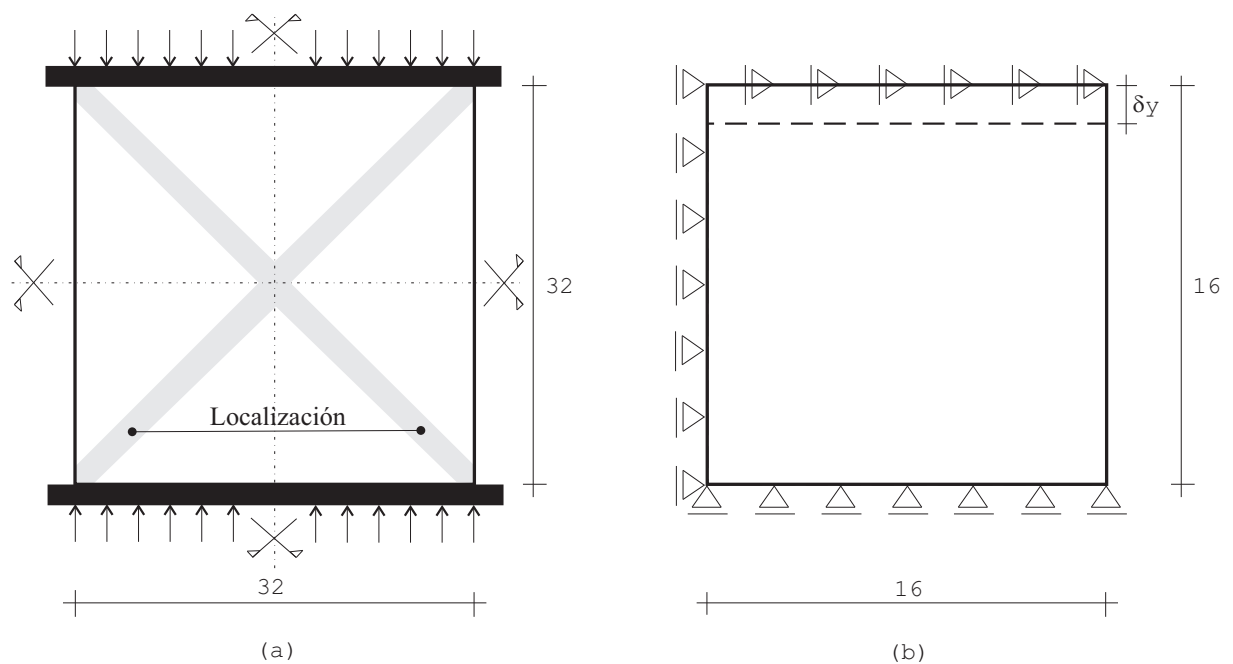


Figura 5.20: Problema de localización de deformaciones (dimensiones en milímetros): (a) Modelo físico. (b) Modelo numérico.

Debe aclararse que el modelo constitutivo no se encuentra regularizado en cuanto a la dependencia con el tamaño de los elementos⁴, en consecuencia, la energía de fractura bajo la curva carga-desplazamiento cambiará a medida que se refine la malla. Sin embargo, nuestro interés en este apartado es analizar si existe objetividad de la respuesta numérica con la *direccionalidad* de los elementos más que con su *tamaño característico*. Se espera que, usando diferentes mallas de elementos de similar medida, los resultados obtenidos sean comparables aun si varía su orientación relativa. Este hecho marcaría un buen indicio en relación al comportamiento cinemático del modelo.

La figura 5.20-(a) muestra la geometría del problema (dimensiones en milímetros). Imponiendo las condiciones de contorno adecuadas, la simulación numérica puede restringirse a sólo un cuarto del bloque, véase figura 5.20-(b).

⁴La regularización constitutiva se abordará en el capítulo próximo.

Los parámetros mecánicos adoptados para el modelado son los siguientes: módulo de Young $E = 3 \times 10^4 [MPa]$, relación de Poisson $\nu = 0,3$, tensión de fluencia $\sigma_y = 36 [MPa]$, módulo de ablandamiento material $H = -1,8 \times 10^3 [MPa]$. Dado que el problema es inicialmente homogéneo, debe introducirse una pequeña perturbación para materializar el punto de inicio de localización.

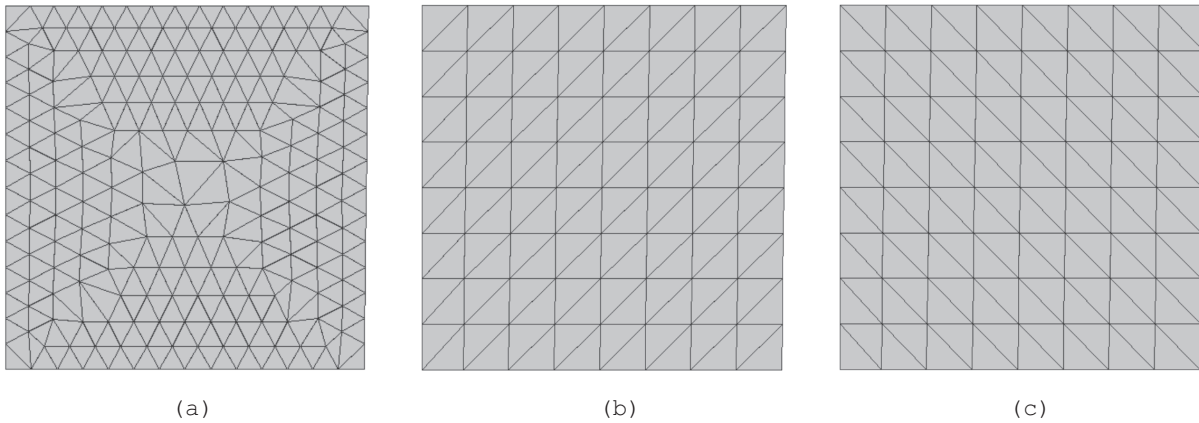


Figura 5.21: Problema de localización de deformaciones. Mallas utilizadas en la simulación: (a) 375 elementos. (b) 128 elementos. (c) 128 elementos.

Hemos de considerar tres mallas de triángulos mixtos estabilizados PGP ($c = 4$). La primera de ellas, Malla (a), corresponde a una distribución arbitraria de 375 elementos. Las dos restantes son arreglos estructurados de triángulos siguiendo la dirección de falla (Malla (b)), o bien ortogonal a la misma (Malla (c)), ambas contienen 128 elementos, figura 5.21.

La performance numérica del elemento PGP para este test en particular, puede evaluarse comparando los mapas de deformación plástica equivalente (ver figura 5.22) y la curva de respuesta carga total versus desplazamiento vertical (δ_y) (véase figura 5.23) para las Mallas (b) y (c).

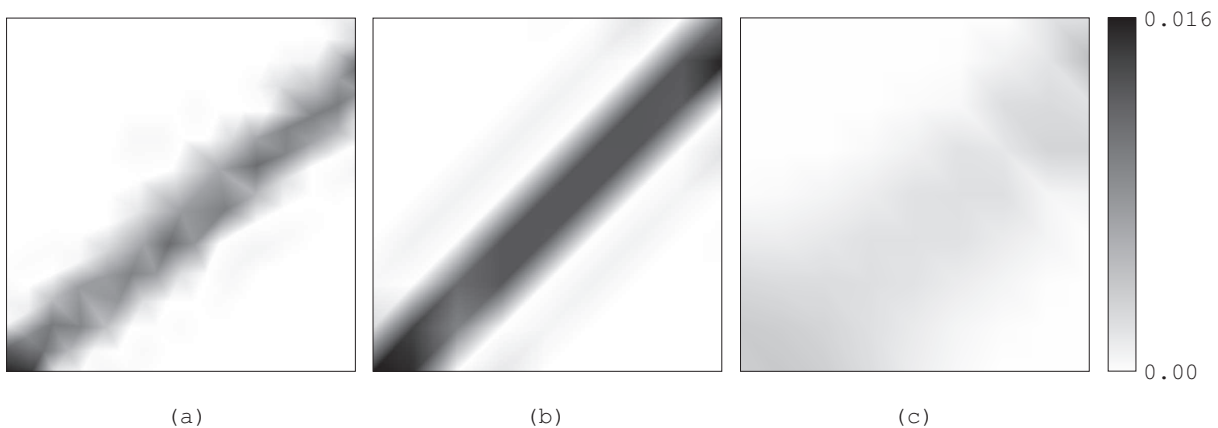


Figura 5.22: Problema de localización de deformaciones. Mapas de deformación plástica equivalente para las distintas mallas de la figura 5.21

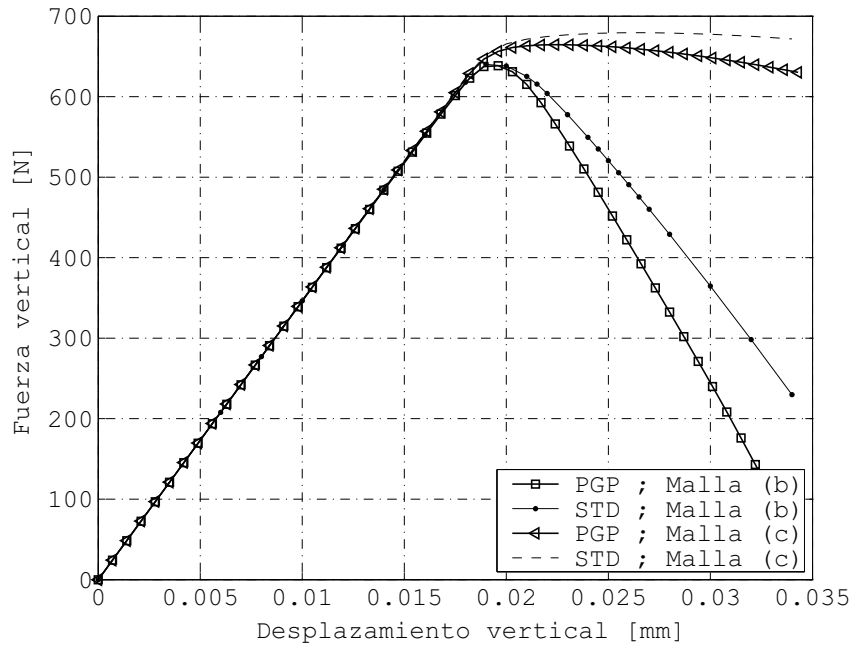


Figura 5.23: Problema de localización de deformaciones. Curva carga total versus descenso prescrito δ_y .

Observación 23 *la solución para la Malla (a) no es relevante en términos de la gráfica carga-desplazamiento debido a que el tamaño característico del elemento finito es sensiblemente distinto.*

Se puede observar que ambas respuestas (Malla (b) y (c)) son claramente diferentes. Este ejemplo muestra un comportamiento similar a aquel observado la sección 5.4.3, aunque mucho más notorio ahora debido a la presencia de ablandamiento. Si bien es cierto que estas dos situaciones representan condiciones extremas, ya que en general para mallas de direccionalidad arbitraria se deberá esperar un comportamiento como el que se muestra en la figura 5.22-(a), es evidente que existe una falta de objetividad en la presente formulación fundamentalmente cuando se pretenden modelar modos de falla del tipo bandas de corte.

5.5. Comentarios

A través del estudio numérico del esquema mixto estabilizado *PGP* abordado, se pueden extraer algunas observaciones importantes:

- una de las principales ventajas de la metodología es que permite formular elementos finitos simples de bajo orden.
- el costo computacional se corresponde al de un esquema mixto estándar, dado que es posible desacoplar eficientemente el campo vectorial del gradiente de presión proyectado Π , sin que ello implique un deterioro significativo de precisión en los resultados.

- el modelo presenta un notable comportamiento cualitativo en situación de incompresibilidad elástica, observándose además una tasa de convergencia aceptable a medida que se refina la malla.
- el régimen de cuasi incompresibilidad inducido por predominio de deformaciones plásticas isocóricas también se resuelve en forma satisfactoria.
- el buen desempeño en tales situaciones que presenta el triángulo estabilizado PGP , y principalmente el tetraedro, hace aceptable su utilización para resolver problemas prácticos, a pesar del costo computacional extra que se asume al utilizar formulaciones mixtas.
- con respecto a la simulación del fenómeno de localización de deformaciones, que es nuestro especial interés, debe decirse que, si bien se obtiene un comportamiento mejorado con respecto al elemento clásico, se observa cierta direccionalidad en la respuesta inducida por la orientación de la malla. Este hecho atenta desfavorablemente al momento de intentar modelar mecanismos de colapso tipo bandas de corte en situaciones generales. En el problema de localización de deformaciones, véase sección 5.4.5, queda en evidencia que el elemento PGP para ciertas orientaciones, conserva excesiva rigidez fomentando disipación de la deformación plástica en lugar de concentración. Este motivo fundamenta la formulación de un modelo más completo, el cual se presenta y desarrolla en el capítulo siguiente.

Capítulo 6

Elemento finito para modelar bandas de corte en plasticidad isocórica

A partir del análisis realizado en el capítulo precedente, se concluye que para el modelado de superficies de fallo en plasticidad, es necesario contar con una tecnología de elementos libre del bloqueo volumétrico espúreo inducido por el creciente desarrollo de flujo plástico. En ese sentido se analizó exhaustivamente un esquema particular mixto estabilizado, formulado en términos de elementos símplices lineales. También se demostró que sólo la utilización de esta estrategia no basta, ya que no se logra aportar la compleja cinemática que demanda el problema para capturar mecanismos de intensa deformación en forma objetiva respecto a la direccionalidad de la malla. Este hecho motiva el desarrollo de un modelo más completo que se fundamenta, precisamente, en incorporar ese modo cinemático faltante.

Siguiendo esta idea, proponemos formular una familia de elementos mixtos estabilizados y enriquecidos con discontinuidades fuertes embebidas. Con ello buscamos poder modelar mecanismos de colapso en materiales elasto-plásticos bajo régimen de ablandamiento por deformación. Para este fin se utiliza la *Aproximación por Discontinuidades Fuertes del Continuo (CSDA)*, como marco teórico conceptual, la cual ha demostrado ser una metodología robusta y suficientemente precisa desde el punto de vista computacional ([OCM99]). De esta forma, al elemento *PGP* de base se suman ahora dos ingredientes fundamentales: (i) una cinemática mejorada que incorpora modos adicionales de deformación especialmente ideados para simular el proceso de localización y (ii) una regularización constitutiva consistente, para que el problema quede bien planteado aun en presencia de ablandamiento. En pocas palabras se fusionan aquí los conceptos presentados en el capítulo 3 y en el capítulo 5, para complementar las características de cada estrategia respectivamente, ver [SSHO06, SSH04a].

El objetivo final de este estudio es desarrollar elementos de fácil generación para problemas reales y que presenten un comportamiento satisfactorio en la fase previa a la inestabilidad material, en la etapa post-bifurcación, en el modelado de mecanismos de colapso y en la estimación precisa de la carga límite estructural. La aplicación natural de esta metodología es la predicción de falla en metales, o bien para cualquier material que pueda ser formulado en términos de modelos de plasticidad tipo J_2 .

En este apartado, se introduce el modelo teórico matemático, las hipótesis consideradas para su desarrollo, los aspectos relevantes de la implementación y casos de aplicación para

mostrar su validación y desempeño. Los ejemplos numéricos que se presentan, muestran un incremento de la precisión en la respuesta, al comparar la estrategia aquí introducida con formulaciones alternativas.

6.1. Introducción

Las bandas de corte (*shear bands*) en materiales plásticos surgen como un modo típico de deformación como consecuencia del fenómeno de localización. Este proceso tiene lugar durante el régimen inelástico una vez que el material se torna constitutivamente inestable. Varios investigadores han propuesto que tales bandas de deslizamiento (líneas en 2D o superficies en 3D) puedan simularse numéricamente utilizando campos de velocidades discontinuos (*discontinuidades fuertes*), véase por ejemplo Armero et al. [AG96], Regueiro et al. [RB99], Samaniego et al. [SB05], entre otros.

En muchos problemas reales, un proceso relativamente importante de flujo plástico irreversible y materialmente estable, precede el desarrollo o aparición de modos localizados de deformación. En tales casos, y desde el punto de vista computacional, debe considerarse la deficiente respuesta que brindan los elementos estándar bajo restricción de cuasi incompresibilidad.

A lo largo de este capítulo, se presenta la formulación matemática de una estrategia numérica que acopla consistentemente el esquema mixto estabilizado *PGP*, con una aproximación por discontinuidades fuertes embebidas de soporte elemental¹, como aquella propuesta en Oliver [Oli6a, Oli6b], que nos permita capturar el mecanismo característico de banda de corte.

El funcionamiento conceptual del modelo que se propone es simple y se describe a continuación. Desde el momento en que un punto material comienza a disipar inelásticamente hasta que alcanza la condición de bifurcación ($t < t_B$), que como se mencionó para modelos plásticos puede ser un período importante, se utiliza una estrategia numérica (esquema *PGP*) para controlar el comportamiento esférico de la tensión y evitar de esta forma un bloqueo cinemático que comprometa el posterior desarrollo del proceso de localización. Una vez que el estado tensional predice la bifurcación discontinua ($t \geq t_B$), se activa una cinemática enriquecida y si bien el material sigue disipando energía (en forma regularizada) ahora sólo lo hace a través de la interface de fallo mientras que su entorno descarga elásticamente. Para simular este último mecanismo introducimos consistentemente una aproximación particular de discontinuidades fuertes (*CSDA*).

La idea de utilizar elementos de buen comportamiento numérico en plasticidad juntamente con un aporte cinemático extra no es nueva en el contexto del modelado de falla. En Armero et al. [AG96] se han usado elementos triangulares tipo *MINI* y en Regueiro et al. [RB99] el clásico cuadrilátero *BBAR*, ambos modelos enriquecidos con desplazamientos discontinuos. Sin embargo, consideramos que este problema aún permanece abierto ya que, según nuestro criterio, el triángulo lineal (y por extensión directa el tetraedro lineal) posee un conjunto de ventajas que lo hace particularmente adecuado para mejorarlo con discontinuidades embebidas.

¹Basado en el riguroso estudio presentado en el capítulo 4, por cuestiones de simplicidad de implementación, precisión y costo computacional, utilizamos una cinemática enriquecida con grados de libertad adicionales interiores al elemento.

La aproximación por discontinuidades fuertes del continuo adoptada, determina la ley constitutiva incremental en el interior de la banda de corte. Una característica de esta estrategia es que el modelo discreto resultante, aquel que gobierna la evolución de las tracciones cohesivas en la discontinuidad, se obtiene a partir de una proyección sobre la superficie de deslizamiento de la ecuación constitutiva del continuo. Asumimos que el material no localizado (no bifurcado) responde a un modelo de plasticidad J_2 .

En el pasado, se han propuesto numerosas estrategias alternativas para simular bandas de corte. Recientemente, Cervera et al. [MMdSC04] han presentado un modelo que utiliza el mismo esquema de estabilización que el adoptado en esta tesis, pero sin introducir discontinuidades embebidas en el interior del elemento. Creemos sin embargo que las características aportadas por *CSDA*, deben considerarse al momento de modelar eficientemente mecanismos de falla (en el sentido clásico de objetividad frente a la direccionalidad de la malla) y por lo tanto merecen un estudio detallado como el que aquí se presenta.

Este capítulo se estructura como sigue: la sección 6.2 está dedicada a resumir las ecuaciones de gobierno en medios susceptibles de presentar bandas de deslizamiento. El análisis de discontinuidad fuerte, que conduce a la obtención de la ley cohesiva proyectada sobre la interface, se desarrolla en el apartado 6.3. En la sección 6.4 se introduce la formulación matemática del modelo de elementos finitos que se propone y a continuación los tópicos relevantes de su implementación numérica. Finalmente, en la sección 6.6 se presentan dos ejemplos bidimensionales de validación en donde se compara el comportamiento del esquema introducido con soluciones numéricas y analíticas de referencia.

6.2. Ecuaciones de gobierno para sólidos con bandas de corte

Adoptando una descripción cinemática con discontinuidades fuertes, el problema (cuasi estático) de valores de contorno en tasas para un material elasto-plástico que experimenta un modo de fallo de tipo banda de corte (ver figura 6.1), según lo visto en el capítulo 3, puede formularse como sigue: encontrar el campo (tasa) de desplazamiento regular $\dot{\mathbf{u}}$ y el salto $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ tal que se verifique el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{ecuación de equilibrio}) \quad (6.1)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{u}} \quad (\text{condición de contorno cinemática}) \quad (6.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu} = \dot{\mathbf{t}}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{condición de contorno mecánica}) \quad (6.3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathfrak{R}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{r}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{relación constitutiva}) \quad (6.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{S} \quad (\text{continuidad externa de tracciones}) \quad (6.5)$$

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (\text{continuidad interna de tracciones}) \quad (6.6)$$

sujeto además a una cinemática discontinua del tipo:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (6.7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{x}, t) = \nabla^{sym} \dot{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\nabla^{sym} \dot{\boldsymbol{u}} + \mathcal{H}_S(\nabla^{sym} \dot{\boldsymbol{\beta}})}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}: \text{regular}} + \underbrace{\delta_S(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{n})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\delta: \text{singular}} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (6.8)$$

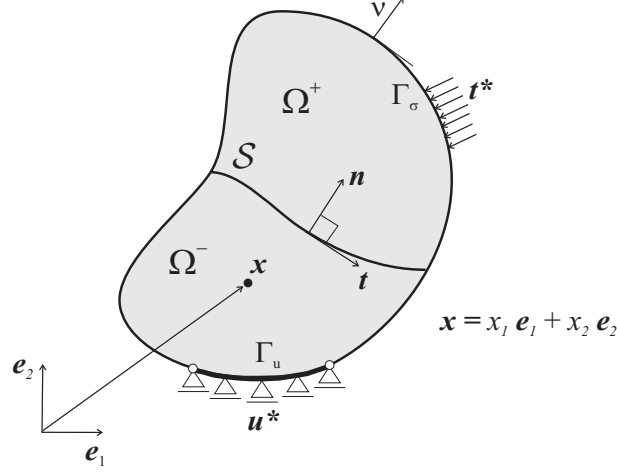


Figura 6.1: Definición de un problema mecánico exhibiendo un modo de falla caracterizado por la presencia de bandas de corte.

6.3. Análisis de discontinuidad fuerte

A continuación se aborda un estudio similar a aquel presentado en el capítulo 3 (sección 3.4), en este caso particularizado para el modelo constitutivo de plasticidad que nos interesa.

6.3.1. Condición de discontinuidad fuerte

Para la porción regular del dominio de análisis ($\Omega \setminus S$), es decir en aquella zona donde se presenta localización de deformaciones inelásticas, se asume un comportamiento constitutivo elasto-plástico invíscido de tipo J_2 con ablandamiento por deformación de carácter isótropo y lineal, como el descrito en el capítulo 2. Las ecuaciones básicas de dicho modelo, por practicidad, se presentan resumidas en el cuadro 6.1. Allí se ha definido como \boldsymbol{M} la dirección de la tasa del flujo plástico ($tr(\boldsymbol{M}) = 0$). En este contexto de análisis, se prestará especial atención al módulo de ablandamiento H ($H < 0$) que desarrolla un papel fundamental en la condición de localización.

Teniendo en cuenta la relación elástica incremental en tasas 6.11, es posible expresar el estado de tensión para un punto arbitrario sobre la interfaz ($\boldsymbol{x} \in S$) como sigue:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S = \boldsymbol{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_S - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_S^p) = \boldsymbol{C}^e : \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_S + \frac{\mu_S}{h} (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{n})^{sym} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_S^p \right] \quad (6.9)$$

en donde se advierte que, como antes, para el tratamiento numérico de la distribución de Dirac, se utiliza la secuencia regularizada: $\delta_S \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu_S}{h}$.

Relación tensión-deformación	
$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad ; \quad \mathbf{C}^e = \lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{I}$	(6.10)
$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$	
Función de fluencia	
$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - (\sigma_y - q) \leq 0$	(6.12)
$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3/2} (\mathbf{S} : \mathbf{S})$	
Regla de flujo y ley de endurecimiento/ablandamiento	
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi = \gamma \mathbf{M} = \gamma \sqrt{3/2} \frac{\mathbf{S}}{\ \mathbf{S}\ }$	(6.14)
$\dot{q} = -H(\alpha) \dot{\alpha}$	
$\dot{\alpha} = \gamma \partial_q \phi = \gamma \mathbf{N} = \gamma$	
Condiciones complementarias de carga-descarga	
$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0 \quad ; \quad \gamma \geq 0 \quad ; \quad \gamma \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0$	

Cuadro 6.1: Ecuaciones básicas para el modelo de plasticidad J_2 .

Mediante simple manipulación algebraica, y teniendo en cuenta la ecuación que gobierna la evolución de deformaciones plásticas (6.14), 6.9 se describe de la forma:

$$\underbrace{\mathbf{C}^{e-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S}_{\text{acotado}} + \gamma \mathbf{M}_S = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{acotado}} + \underbrace{\frac{\mu_S}{h} (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}}_{\text{no acotado si } h \rightarrow 0} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_S \quad (6.18)$$

El problema se focaliza ahora en identificar las condiciones necesarias para que 6.18 conserve consistencia física y matemática en presencia de una cinemática singular ($h \rightarrow 0$), es decir las restricciones que hacen compatible un modelo constitutivo de continuo con una descripción de discontinuidades fuertes.

Nótese que debido a la ecuación interna de tracciones (6.6) la tasa de tensiones $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S$ es una magnitud acotada y por lo tanto lo es $\mathbf{C}^{e-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S$, en 6.18. Además por definición, la tasa de deformación regular $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^{sym} \dot{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_S \nabla^{sym} \dot{\boldsymbol{\beta}}$ también resulta acotada. En régimen de discontinuidad fuerte, el término no acotado de la ecuación 6.18 debe corresponderse con la existencia de otro de carácter similar en la parte izquierda de la ecuación. La única posibilidad es que lo sea el término $(\gamma \mathbf{M}_S)$. Dado que $\mathbf{M}_S \simeq dev(\boldsymbol{\sigma}_S)$, el razonamiento

previo nos induce a considerar al multiplicador plástico en un sentido distribucional:

$$\gamma = \delta_{\mathcal{S}} \bar{\gamma} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu_{\mathcal{S}}}{h} \bar{\gamma} = \begin{cases} \gamma = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S} \\ \gamma_{\mathcal{S}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \bar{\gamma} & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (6.19)$$

estableciendo de esta forma que en la zona regular ($\Omega \setminus \mathcal{S}$) existe un comportamiento elástico del material (o de carga neutra) mientras que la carga plástica y disipación se localiza en \mathcal{S} .

A partir de las ecuaciones 6.15-6.16 y en vista de 6.19 es posible también reinterpretar el inverso del módulo de ablandamiento, evaluado en la superficie de discontinuidad, como una función generalizada:

$$H_{\mathcal{S}} = -\frac{\dot{q}_{\mathcal{S}}}{\dot{\alpha}_{\mathcal{S}}} = -\frac{\dot{q}_{\mathcal{S}}}{\gamma_{\mathcal{S}}} = -\lim_{h \rightarrow 0} h_{(t)} \frac{\dot{q}_{\mathcal{S}}}{\bar{\gamma}} = \lim_{h \rightarrow 0} h_{(t)} \bar{H} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (6.20)$$

$$H_{\mathcal{S}}^{-1} = \delta_{\mathcal{S}} \bar{H}^{-1} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (6.21)$$

donde \bar{H} es el módulo de ablandamiento *discreto* o *intrínseco* el cual puede relacionarse con propiedades del material como por ejemplo la energía de fractura G_f , la tensión última uniaxial σ_y y el módulo de elasticidad longitudinal E . Típicamente si asumimos un comportamiento post-pico gobernado por una ley de ablandamiento isótropa y lineal, se tiene:

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{E G_f} \quad (6.22)$$

La expresión 6.20 se conoce con el nombre de condición de regularización del módulo de ablandamiento y es precisamente la que garantiza compatibilidad entre el modelo continuo 6.10-6.17 y la cinemática 6.8, en el sentido de inducir un tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}$ que se mantiene acotado aun para una medida singular de la deformación en la interface. De 6.20 se observa que el modelo de constitutivo en el interior de la banda de cortante, se corresponde con un material (casi) perfectamente plástico. La ecuación 6.22 se deduce asumiendo que la energía disipada en la superficie de corte es G_f . A su vez, considerando 6.20, $\dot{q}_{\mathcal{S}}$ se transforma también en un término acotado:

$$\dot{q}_{\mathcal{S}} = -\bar{\gamma} \bar{H} \quad (6.23)$$

Observación 24 *nótese la completa analogía, en los conceptos hasta aquí discutidos, con el análisis de discontinuidad fuerte presentado en el capítulo 3.*

Si premultiplicamos la ecuación 6.18 por el factor de penalidad h y tomando límite para $h \rightarrow 0$ (asumiendo además $\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq 0$), se tendrá:

$$\underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} [h (\mathbf{C}^{e-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}})]}_{=0} + \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{[h \gamma_{\mathcal{S}} \mathbf{M}_{\mathcal{S}}]}_{\bar{\gamma}} = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} [h \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]}_{=0} + \lim_{h \rightarrow 0} [\mu_{\mathcal{S}} (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}] \quad (6.24)$$

de donde surge la denominada *condición de discontinuidad fuerte*:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_S^p = \delta_S (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (6.25)$$

$$\bar{\gamma} \mathbf{M}_S = (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (6.26)$$

A partir de 6.26, queda establecido un criterio para determinar la evolución del campo (tasa de) salto en desplazamientos $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, es decir una ecuación que brinda información acerca del modo de fallo inducido por la descripción cinemática, una vez que se alcanza la condición de discontinuidad fuerte.

Seguidamente, se particulariza esta expresión para el modelo J_2 en análisis. Considérese para ello un sistema cartesiano ortonormal ubicado sobre la interface de discontinuidad con base $\{\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}\}$. En dicha base podemos expresar:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}_n \mathbf{n} + \dot{\beta}_\tau \boldsymbol{\tau} + \dot{\beta}_\xi \boldsymbol{\xi} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (6.27)$$

donde β_n es la componente normal del salto mientras que β_τ y β_ξ las proyecciones tangenciales.

Dada la estructura particular del término $(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}$, la ecuación 6.26 en el sistema de referencia local definido, se puede expandir como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\beta}_n & \frac{1}{2} \dot{\beta}_\tau & \frac{1}{2} \dot{\beta}_\xi \\ \frac{1}{2} \dot{\beta}_\tau & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \dot{\beta}_\xi & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}} = \bar{\gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} M_{nn} & M_{n\tau} & M_{n\xi} \\ M_{\tau n} & M_{\tau\tau} & M_{\tau\xi} \\ M_{\xi n} & M_{\xi\tau} & M_{\xi\xi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_S = \sqrt{3/2} \frac{\mathbf{s}_S}{\|\mathbf{s}_S\|}} \quad (6.28)$$

Luego, para satisfacer 6.28 se deduce trivialmente que la restricción de discontinuidad fuerte tiene la forma:

$$M_{\tau\tau} = M_{\xi\xi} = M_{\tau\xi} = M_{\xi\tau} = 0 \quad (6.29)$$

Considerando además que \mathbf{M}_S es un tensor desviador ($tr(\mathbf{M}_S) = M_{nn} + M_{\tau\tau} + M_{\xi\xi} = 0$) y teniendo en cuenta la expresión previa (6.29), se obtiene también:

$$M_{nn} = \dot{\beta}_n = 0 \quad (6.30)$$

con lo cual el campo tasa de desplazamiento discontinuo no tiene componente en el modo de apertura y sólo es consistente con un deslizamiento puro ($\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n} = 0$).

Observación 25 *como era de esperarse el modo de falla que induce el modelo constitutivo del continuo proyectado en la superficie de discontinuidad y bajo régimen de discontinuidad fuerte, es del tipo banda de corte, esto es una consecuencia directa del carácter desviador del tensor tasa de deformaciones plásticas.*

6.3.2. Ley discreta cohesiva inducida

La *CSDA*, asume como hipótesis fundamental que el tensor $\boldsymbol{\sigma}_S$ queda determinado mediante la versión regularizada del modelo constitutivo mostrado en el cuadro 6.1. Este estado tensional, define una ley discreta cohesiva que gobierna el comportamiento en la interface \mathcal{S} . En este apartado, pretendemos deducir tal formato discreto del modelo.

En la sección anterior, llegamos a la conclusión que en régimen de discontinuidad fuerte, el tensor \mathbf{M}_S tiene una estructura muy particular dada por la cinemática impuesta. Si además recordamos que la ley J_2 postula que $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$, y en particular $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_S^p$, evoluciona en la dirección de un tensor unitario desviador (ver ecuación 6.14), se puede expresar:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_S^p = \delta_S (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym} = \gamma_S \mathbf{M}_S = \gamma_S \sqrt{3/2} \frac{\mathbf{S}_S}{\|\mathbf{S}_S\|} \quad (6.31)$$

de donde se desprende que el tensor desviador de tensiones, $\mathbf{S}_S = dev(\boldsymbol{\sigma}_S)$, evaluado en la superficie de discontinuidad, hereda dicha estructura característica:

$$\frac{\mathbf{S}_S}{\|\mathbf{S}_S\|} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{2/3} (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} \overset{=0}{\dot{\beta}_n} & \frac{1}{2} \dot{\beta}_\tau & \frac{1}{2} \dot{\beta}_\xi \\ \frac{1}{2} \dot{\beta}_\tau & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \dot{\beta}_\xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

El tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_S$, se reconstruye entonces mediante:

$$\boldsymbol{\sigma}_S = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}_S + \begin{bmatrix} 0 & S_{n\tau} & S_{n\xi} \\ S_{\tau n} & 0 & 0 \\ S_{\xi n} & 0 & 0 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \sigma_{nn} & \sigma_{n\tau} & \sigma_{n\xi} \\ \sigma_{\tau n} & \sigma_{\tau\tau} & 0 \\ \sigma_{\xi n} & 0 & \sigma_{\xi\xi} \end{bmatrix}_S \quad (6.33)$$

siendo $\sigma_m (\equiv \sigma_{nn})$ la tensión media. A partir de 6.33 es evidente que $\boldsymbol{\sigma}_S$ puede caracterizarse sólo en términos de las componentes del vector \mathcal{T} que actúa sobre \mathcal{S} , véase figura 6.2:

$$\mathcal{T} = \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_n \\ \mathcal{T}_\tau \\ \mathcal{T}_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ S_{n\tau} \\ S_{n\xi} \end{bmatrix}_S ; \quad \mathcal{T} \in \mathbb{R}^3 \quad (6.34)$$

Este resultado nos permite escribir todo el modelo constitutivo, evaluado sobre la interface, como una función del vector de tracciones y los saltos en velocidad (\mathcal{T} vs. $\dot{\boldsymbol{\beta}}$). En este sentido definimos:

$$\mathcal{T}^{dev} = \mathbf{S}_S \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_n^{dev} \\ \mathcal{T}_\tau^{dev} \\ \mathcal{T}_\xi^{dev} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{n\tau} \\ S_{n\xi} \end{bmatrix}_S ; \quad \mathcal{T}^{dev} \in \mathbb{R}^3 \quad (6.35)$$

$$(6.36)$$

y la representación en formato vectorial del tensor que regula la direccionalidad de la deformación plástica:

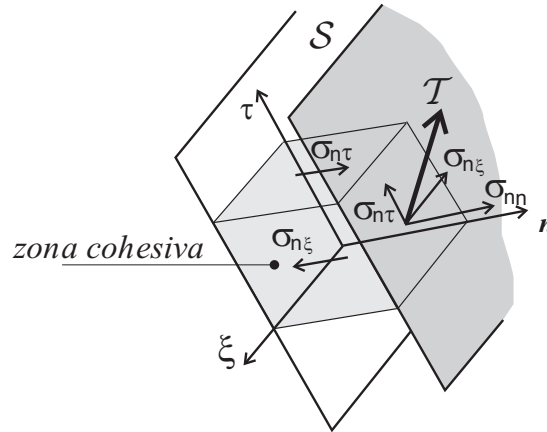


Figura 6.2: Estructura del tensor de tensiones σ_S sobre la superficie de deslizamiento \mathcal{S} , una vez alcanzado el régimen de discontinuidad fuerte.

$$\mathbf{m}_S = \frac{\sqrt{3}}{\|\mathcal{T}^{dev}\|} \mathcal{T}^{dev} \quad ; \quad \mathbf{m}_S \in \mathbb{R}^3 \quad (6.37)$$

Luego, el criterio de fluencia dado por la ecuación 6.12 para cualquier punto material $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, puede ahora escribirse como:

$$\begin{aligned} \phi_S(\sigma_S, q_S) &= \sqrt{3/2} (\mathbf{S}_S : \mathbf{S}_S) - (\sigma_y - q_S) \leq 0 \\ &= \sqrt{3} \|\mathcal{T}^{dev}\| - (\sigma_y - q_S) \leq 0 \\ &= \underbrace{\sqrt{3} (\mathcal{T}^{dev} \cdot \mathcal{T}^{dev})}_{\phi_S(\mathcal{T}^{dev}, q_S)} - (\sigma_y - q_S) \leq 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

y por lo tanto su tasa de variación temporal, considerando la expresión 6.23, se computa mediante:

$$\dot{\phi}_S = \frac{\partial \phi_S}{\partial \mathcal{T}^{dev}} \cdot \dot{\mathcal{T}}^{dev} + \frac{\partial \phi_S}{\partial q_S} \cdot \dot{q}_S \quad (6.39)$$

$$= \mathbf{m}_S \cdot \dot{\mathcal{T}}^{dev} - \bar{\gamma} \bar{H} \quad (6.40)$$

Observación 26 \mathcal{T}^{dev} es comúnmente conocido como vector de tensiones de corte de Schmidt para el plano de deslizamiento \mathcal{S} , véase por ejemplo [Asa83].

Adviértase además que para el caso de un estado de carga plástica en \mathcal{S} , es decir cuando se verifica $\dot{\phi}_S = 0 \wedge \bar{\gamma} > 0$, según 6.40 el multiplicador plástico regularizado $\bar{\gamma}$ toma el valor dado por la siguiente ecuación:

$$\bar{\gamma} = \frac{\mathbf{m}_S \cdot \mathcal{T}^{dev}}{\bar{H}} \quad (6.41)$$

Estamos ahora en condiciones de obtener la ley que gobierna la evolución del salto en velocidades $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. Considérese para ello la condición de discontinuidad fuerte 6.26. Si premultiplicamos a ambos miembros de 6.26 por $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e)$, y tomando ventaja de las simetrías del tensor \mathbf{C}^e , se llega a:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e) : (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym} &= \bar{\gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e : \mathbf{M}_S) \\ \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{Q}^e} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \bar{\gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e : \mathbf{M}_S) \end{aligned} \quad (6.42)$$

en donde \mathbf{Q}^e representa el tensor de localización elástico. Luego, de acuerdo con 6.41 y dado que \mathbf{Q}^e es no singular, se obtiene finalmente:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\mathbf{m}_S \cdot \mathcal{T}^{dev}}{H} \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e : \mathbf{M}_S) \quad (6.43)$$

La ecuación 6.43, que regula la velocidad del salto en la discontinuidad, es consistente con una hipótesis constitutiva clásica en el estudio fenomenológico de plasticidad a nivel de cristales: la magnitud de la velocidad de corte ($\zeta = \|\dot{\boldsymbol{\beta}}\|$), en un sistema de tipo deslizamiento, es dependiente del estado tensional sólo a través del vector de tensiones de Schmidt \mathcal{T}^{dev} .

Observación 27 *teniendo en cuenta la definición del operador elástico \mathbf{C}^e , se pueden deducir dos aspectos importantes, a saber:*

- *el producto doble contracción $(\mathbf{C}^e : \mathbf{M}_S)$ es un tensor de segundo orden que, expresado en la base $\{\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}\}$, conserva la misma estructura particular de \mathbf{M}_S :*

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^e : \mathbf{M}_S &= (\lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{I}) : \mathbf{M}_S \\ &= \lambda \underbrace{tr(\mathbf{M}_S)}_{=0} \mathbb{I} + 2\mu \mathbf{M}_S = 2\mu \begin{bmatrix} 0 & M_{n\tau} & M_{n\xi} \\ M_{\tau n} & 0 & 0 \\ M_{\xi n} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.44)$$

- *el tensor de localización elástico se diagonaliza en la base local elegida, es decir $\{\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}\}$ es una terna coaxial con los vectores propios de \mathbf{Q}^e :*

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^e &= \mathbf{n} \cdot (\lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{I}) \cdot \mathbf{n} \\ &= \lambda (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \mu (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \mu \mathbb{I} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.45)$$

En vista de estas dos condiciones, se concluye que 6.43 es compatible con un modo cinemático de tipo banda de corte o de deslizamiento ($\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n} = 0$), tal como se había establecido anteriormente, ya que:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{m}_S \cdot \mathcal{T}^{dev}}{H} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{C}^e : \mathbf{M}_S) \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot \mathbf{n}}_{=0} = 0 \quad (6.46)$$

Las ecuaciones básicas del modelo cohesivo degenerado (proyectado), o ley tracción-separación $\dot{\mathcal{T}} - \dot{\beta}$, derivado a partir del modelo continuo e inducido por una cinemática de discontinuidades fuertes, se presentan en el cuadro 6.2.

<p>Ecuación evolutiva del salto</p> $\dot{\beta} = \bar{\gamma} \mathbf{Q}_e^{-1} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e : \mathbf{M}_S) \quad (6.47)$ <p style="text-align: center;">Función de fluencia</p> $\phi_S = \sqrt{3 \mathcal{T}^{dev} \cdot \mathcal{T}^{dev}} - (\sigma_y - q_S) \quad (6.48)$ <p style="text-align: center;">Regla de flujo y ley de endurecimiento/ablandamiento</p> $\dot{\epsilon}_S^p = \frac{\bar{\gamma}}{h} \mathbf{M}_S = \frac{\bar{\gamma}}{h} \sqrt{3/2} \frac{\mathcal{T}^{dev}}{\ \mathcal{T}^{dev}\ } \quad (6.49)$ $\dot{q}_S = -\bar{\gamma} \bar{H} \quad (6.50)$ <p style="text-align: center;">Condiciones complementarias de carga-descarga</p> $\phi_S(\mathcal{T}^{dev}, q_S) \leq 0 \quad ; \quad \bar{\gamma} \geq 0 \quad ; \quad \bar{\gamma} \phi_S(\mathcal{T}^{dev}, q_S) = 0 \quad (6.51)$
--

Cuadro 6.2: Ley cohesiva discreta proyectada.

6.4. Formulación variacional mixta estabilizada incorporando discontinuidades fuertes embebidas.

La aproximación por discontinuidades fuertes discutida en las secciones previas resulta una estrategia confiable para capturar bandas de localización inducidas por el comportamiento constitutivo. De hecho, en el capítulo 4 y apéndice D, se ha mostrado un notable desempeño en el modelado de materiales cuasi frágiles, al simular con eficiencia problemas de propagación de fractura en casos 3D. No obstante, existen aún muchos aspectos particulares de la formulación que merecen un estudio detallado. En la actualidad, por ejemplo, no se disponen de elementos finitos símplices de buen desempeño en plasticidad J_2 . Uno de los mayores inconvenientes que se presenta está directamente vinculado al bloqueo espúreo por incompresibilidad que presenta la formulación irreducible en desplazamientos bajo régimen de deformaciones plásticas predominantes. En el contexto del modelado de falla, este fenómeno adquiere mayor importancia en la etapa previa a la inestabilidad material.

Para mejorar el comportamiento oscilatorio de la presión en este capítulo se propone acoplar a la aproximación por discontinuidades fuertes un esquema mixto estabilizado el

cual tiene influencia sólo en el dominio regular $\Omega \setminus \mathcal{S}$ donde precisamente el bloqueo por restricción volumétrica es evidente.

6.4.1. Problema mixto discontinuo

Expresar el conjunto de ecuaciones 6.1-6.8 en términos de una formulación mixta del tipo desplazamiento-presión (\mathbf{u}, p) , implica introducir la clásica descomposición del tensor (tasa) de tensiones en su componente esférica y desviadora:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}, p) = -\dot{p}\mathbb{I} + \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (6.52)$$

donde se advierte que en este contexto de análisis, y a diferencia de lo plateado en el capítulo previo, 6.52 tiene sólo validez en el dominio con deformaciones continuas $(\Omega \setminus \mathcal{S})$. Una vez que se alcanza la condición de bifurcación material ($t = t_B$), el tensor de tensiones en $\Omega \setminus \mathcal{S}$ sigue gobernado por la expresión 6.52, no obstante en la discontinuidad, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}$ queda definido por el modelo constitutivo del continuo mediante la estrategia de proyección discutida en la sección anterior, es decir dependerá de $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. Este hecho representa una hipótesis fundamental del esquema numérico que aquí se propone.

Restringiéndonos a modelos de plasticidad J_2 , existe una relación constitutiva simple entre el campo de presiones y el de desplazamientos, $\dot{p} = -\kappa \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}$. Luego, el problema de valores de contorno puede formularse en un contexto variacional mixto como sigue: encontrar $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$ y $p \in \mathcal{Q}$ tal que se satisfaga:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([\dot{\mathbf{u}}, \dot{p}]; [\mathbf{w}, q]) &= \langle (\nabla \mathbf{w})^{sym}; \dot{\mathbf{S}} \rangle_{\Omega} - \langle \nabla \cdot \mathbf{w}; \dot{p} \rangle_{\Omega} - \langle \rho \dot{\boldsymbol{\beta}}; \mathbf{w} \rangle_{\Omega} - \\ &- \int_{\Gamma_{\sigma}} (\dot{\mathbf{t}}^* \cdot \mathbf{w}) d\Gamma_{\sigma} + \langle q; (\frac{\dot{p}}{\kappa} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}) \rangle_{\Omega} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_0 \wedge \forall q \in \mathcal{Q} \end{aligned} \quad (6.53)$$

donde el espacio de variación para las perturbaciones en el campo de presiones ($q \equiv \delta p$) es $\mathcal{Q} \equiv L^2_{(\Omega \setminus \mathcal{S})}$. Además se propone un espacio de funciones admisibles para velocidades \mathcal{V} asumiendo la existencia de una componente no continua que introduce saltos en la zona de localización \mathcal{S} . Estos términos se incluyen mediante una técnica de discontinuidades fuertes embebidas de soporte elemental (ver capítulo 4):

$$\mathcal{V} = \{ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}) + \mathcal{M}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\beta}} \quad ; \quad \dot{\bar{\mathbf{u}}} \in \bar{\mathcal{V}} \} \quad (6.54)$$

donde $\dot{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{R}^{ndim}$ es un vector asociado, como ya se mencionó, a la componente discontinua de la velocidad y $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_{\mathcal{S}} - \varphi(\mathbf{x})$ la función salto unitario [Oli6b] (véase sección 4.2.2).

Observación 28 la expresión 6.54 representa una cinemática equivalente a la descripción dada por 6.7, pero más relevante desde el punto de vista numérico.

En forma análoga, el espacio de las variaciones virtuales y admisibles de velocidad tiene la forma:

$$\mathcal{V}_0 = \{ \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) + \mathcal{M}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \delta \boldsymbol{\beta} \quad ; \quad \bar{\mathbf{w}}|_{\Gamma_u} \in \bar{\mathcal{V}}_0 \quad (\bar{\mathbf{w}}|_{\Gamma_u} = 0) \} \quad (6.55)$$

Las funciones $\dot{\bar{\mathbf{u}}}$ y $\bar{\mathbf{w}}$ representan campos suaves, al menos con continuidad de tipo C^0 , por lo tanto se tiene $\bar{\mathcal{V}} \subset H^1_{(\Omega \setminus \mathcal{S})}$ y $\bar{\mathcal{V}}_0 \subset H^1_{0(\Omega \setminus \mathcal{S})}$.

Como se observa en la forma variacional 6.53, operadores diferenciales aplican sobre campos que ahora resultan discontinuos, típicamente: $(\nabla \mathbf{w})^{sym}$, $\nabla \cdot \mathbf{w}$ y $\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}$. Para continuar con el tratamiento formal del modelo en estudio, a continuación presentamos el desarrollo de tales expresiones particulares y que serán de utilidad posterior:

$$(\nabla \mathbf{w})^{sym} = (\nabla \bar{\mathbf{w}})^{sym} + [\nabla(\mathcal{M}_{\mathcal{S}} \delta \boldsymbol{\beta})]^{sym} = (\nabla \bar{\mathbf{w}})^{sym} + \overbrace{[(\delta_{\mathcal{S}} \mathbf{n} - \nabla \varphi) \otimes \delta \boldsymbol{\beta}]^{sym}}^{\nabla \mathcal{M}_{\mathcal{S}}} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{w} &= tr(\nabla \mathbf{w})^{sym} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}} + \mathbb{1} : [(\delta_{\mathcal{S}} \mathbf{n} - \nabla \varphi) \otimes \delta \boldsymbol{\beta}] \\ &= \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}} + (\delta_{\mathcal{S}} \mathbf{n} - \nabla \varphi) \cdot \delta \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} &= tr(\nabla \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \nabla \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbb{1} : [(\delta_{\mathcal{S}} \mathbf{n} - \nabla \varphi) \otimes \dot{\boldsymbol{\beta}}] \\ &= \nabla \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} + (\delta_{\mathcal{S}} \mathbf{n} - \nabla \varphi) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned} \quad (6.58)$$

Observación 29 en las expresiones anteriores se ha despreciado el término $\nabla \delta \boldsymbol{\beta}$ (y $\nabla \dot{\boldsymbol{\beta}}$), esto es lícito sólo si $\delta \boldsymbol{\beta}$ (y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$) resulta un campo constante, o constante a trozos, como se asume en esta aproximación.

Incorporando los espacios 6.54 y 6.55 en la ecuación 6.53, considerando además 6.56-6.58, las ecuaciones de gobierno del problema mixto con discontinuidades embebidas pueden formularse alternativamente como sigue: conociendo los campos de fuerzas externas aplicadas \mathbf{b} y \mathbf{t}^* encontrar $(\dot{\bar{\mathbf{u}}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{p}) \in (\bar{\mathcal{V}} \times \mathbb{R}^{ndim} \times \mathcal{Q})$, tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle (\dot{\mathbf{S}} - \dot{p} \mathbb{1}); (\nabla \bar{\mathbf{w}})^{sym} \rangle_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = P_{\bar{\mathbf{u}}}^{(ext)} & \forall \bar{\mathbf{w}} \in \bar{\mathcal{V}}_0 \quad (a) \\ \langle q; \frac{\dot{p}}{\kappa} + \nabla \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} - \nabla \varphi \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = 0 & \forall q \in \mathcal{Q} \quad (b) \\ \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}; (\nabla \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes \delta \boldsymbol{\beta})^{sym} \rangle_{\Omega} = 0 & \forall \delta \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{ndim} \quad (c) \end{array} \right. \quad (6.59)$$

donde $P_{\bar{\mathbf{u}}}^{(ext)}$ es la potencia de las fuerzas de volumen y cargas externas, definida como:

$$P_{\bar{\mathbf{u}}}^{(ext)} = \langle \rho \dot{\mathbf{b}}; \bar{\mathbf{w}} \rangle_{\Omega \setminus \mathcal{S}} + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\dot{\mathbf{t}}^* \cdot \bar{\mathbf{w}}) d\Gamma_{\sigma} \quad (6.60)$$

Debería observarse en 6.59 que la topología particular de \mathcal{S} , permite formular las integrales con núcleo o integrando acotado en el dominio regular del material $\Omega \setminus \mathcal{S}$. Para aquellos términos con carácter distribucional, tal simplificación no es posible.

Considerando que $\nabla \mathcal{M}_{\mathcal{S}} = (\delta_{\mathcal{S}} \mathbf{n} - \nabla \varphi)$, luego la ecuación 6.59-(c) puede interpretarse como una condición débil de continuidad de tracciones en la superficie de discontinuidad, que se escribe de la forma:

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}; \mathbf{n} \rangle_{\mathcal{S}} - \langle (\dot{\mathbf{S}} - \dot{p} \mathbb{1}); \nabla \varphi \rangle_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{G}}^{\mathcal{S}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \mathbf{0} \quad (6.61)$$

en donde hemos asociado la matriz $\tilde{\mathcal{G}}^S$ con el operador diferencial $\nabla \mathcal{M}_S$ que aplica sobre las tensiones. Este tipo particular de aproximación se la denomina formulación simétrica (por esta razón el supraíndice S) cinemáticamente óptima (*Kinematically Optimal Symmetric formulation KOS*, Jirasek [Jir00]). Este elemento surge en forma natural del principio variacional, es decir es variacionalmente consistente, y fue el utilizado en el capítulo 4 para modelos de daño.

En este contexto de análisis introducimos además una formulación no simétrica (y por ende variacionalmente inconsistente) Oliver [Oli6b], ampliamente utilizada y conocida en el ámbito de la mecánica de fractura como *SKON* (*Static and Kinematically Optimal Non symmetric formulation*, Jirasek [Jir00]). La misma se basa en redefinir la ecuación de equilibrio 6.61 intercambiando $\nabla \varphi$ por \mathbf{n} en el segundo término de la izquierda, de esta manera se computan los valores medios de la continuidad de tracciones a nivel de cada elemento [OHS03]:

$$\frac{1}{l_S^e} \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S; \mathbf{n} \rangle_{S^e} - \frac{1}{\Omega^e} \langle (\dot{\mathbf{S}} - \dot{p} \mathbb{1}); \mathbf{n} \rangle_{\Omega \setminus S^e} = \int_{\Omega^e} \tilde{\mathcal{G}}^N \dot{\boldsymbol{\sigma}} \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (6.62)$$

donde l_S^e es la longitud de la discontinuidad S intersecando el elemento finito y Ω^e representa una medida característica de área del mismo, véase figura 4.3.

En la sección de ejemplos numéricos, presentamos soluciones considerando ambos procedimientos. Utilizaremos el término formulación simétrica cuando se implemente la ecuación 6.61 y formulación no simétrica si la condición 6.62 gobierna la continuidad de tracciones. Las dos estrategias numéricas pertenecen a la clase de elementos finitos con discontinuidades embebidas de soporte elemental, es decir, el modo adicional de deformación queda representado por un nodo interno al elemento, con lo cual es factible condensarlo estáticamente de tal forma que el sistema final de ecuaciones quede sólo formulado en términos de desplazamientos regulares, y en el caso particular que nos ocupa también en presiones.

6.4.2. Discretización y estabilización

Sean \dot{p}^h y $\dot{\mathbf{u}}^h$ las aproximaciones por elementos finitos de la tasa de presión y de desplazamiento regular respectivamente tal que: $\dot{p}^h \in \mathcal{Q}^h \subset L^2_{(\Omega \setminus S)}$ y $\dot{\mathbf{u}}^h \in \bar{\mathcal{V}}^h \subset H^1_{(\Omega \setminus S)}$, donde el supraíndice “h” hace referencia a campos discretos. En particular proponemos funciones lineales por tramos de continuidad C^0 para ambos espacios discretos \mathcal{Q}^h y $\bar{\mathcal{V}}^h$. Es bien sabido que esta forma mixta sufre de problemas numéricos de estabilidad debido a que la condición de Babuska-Brezzi [BF91] no se satisface. Un remedio para este efecto no deseado es la introducción de términos de estabilización \mathcal{S}_{st} en el principio variacional 6.59. La versión discreta del sistema de ecuaciones (6.59) puede entonces plantearse:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle \dot{\mathbf{S}}^h; (\nabla \bar{\mathbf{w}}^h)^{sym} \rangle_{\Omega \setminus S} - \langle \dot{p}^h; \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}^h \rangle_{\Omega \setminus S} = P_{\bar{\mathbf{u}}}^{h(ext)} & \forall \bar{\mathbf{w}}^h \in \bar{\mathcal{V}}_0^h \quad (a) \\ \langle q^h; \frac{\dot{p}^h}{\kappa} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^h - \nabla \varphi \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}^h \rangle_{\Omega \setminus S} + \mathcal{S}_{st}^h = 0 & \forall q^h \in \mathcal{Q}^h \quad (b) \\ \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}^h; (\nabla \mathcal{M}_S \otimes \delta \boldsymbol{\beta}^h)^{sym} \rangle_{\Omega} = 0 & \forall \delta \boldsymbol{\beta}^h \in \mathbb{R}^{ndim} \quad (c) \end{array} \right. \quad (6.63)$$

El esquema de estabilización que incorporamos a la formulación es aquel presentado y

estudiado en el capítulo 5, y que denominamos estrategia *PGP*. En este sentido el término estabilizante a introducir, se define a nivel de cada elemento como sigue:

$$\mathcal{S}_{st}^h = \langle \nabla q^h; \tau(\nabla p^h - \mathbf{\Pi}^h) \rangle_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} \quad (6.64)$$

donde como se vio, $\mathbf{\Pi}^h(\in \bar{\mathcal{V}}^h)$ es la proyección L^2 del gradiente de presiones discreto (∇p^h) sobre el espacio de aproximación por elementos finitos $\bar{\mathcal{V}}^h$:

$$\langle (\nabla p^h - \mathbf{\Pi}^h); \boldsymbol{\eta}^h \rangle_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = 0 \quad ; \quad \forall \boldsymbol{\eta}^h \in \bar{\mathcal{V}}^h \quad (6.65)$$

siendo $\boldsymbol{\eta}^h$ las variaciones admisibles de $\mathbf{\Pi}^h$ y τ un factor de estabilización computado como $\tau = c \frac{h_e^2}{2\mu^*}$, con h_e el tamaño característico del elemento finito.

Observación 30 *nótese que tanto \mathcal{S}_{st}^h (6.64) como la expresión de proyección 6.65 están formuladas en el dominio regular $\Omega \setminus \mathcal{S}$.*

La ecuación 6.65 representa una restricción más que el modelo numérico deberá satisfacer y por lo tanto debe incorporarse al sistema. En consecuencia el problema mixto estabilizado en su forma discreta puede describirse en términos de un principio variacional de cuatro campos, como sigue: encontrar los campos $(\dot{\mathbf{u}}^h, \dot{\boldsymbol{\beta}}^h, \dot{p}^h, \dot{\mathbf{\Pi}}^h) \in (\bar{\mathcal{V}}^h \times \mathbb{R}^{ndim} \times \mathcal{Q}^h \times \bar{\mathcal{V}}^h)$ que verifiquen en forma simultánea las ecuaciones constitutivas dadas en el cuadro 6.1 y 6.2 para $\Omega \setminus \mathcal{S}$ y \mathcal{S} respectivamente, las condiciones de contorno esenciales 6.2, la compatibilidad cinemática 6.8 y:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{S}^h; (\nabla \bar{\mathbf{w}}^h)^{sym} \rangle_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{(i+1)} - \langle p^h; \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}}^h \rangle_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{(i+1)} = \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{u}}}^{h(ext)(i+1)} \quad \forall \bar{\mathbf{w}}^h \in \bar{\mathcal{V}}_0^h \quad (a) \\ \langle q^h; \frac{p^h}{\kappa} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^h - \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\beta}^h \rangle_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{(i+1)} + \\ + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \langle \nabla q^h; \tau(\nabla p^h - \mathbf{\Pi}^h) \rangle_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e}^{(i+1)} = 0 \quad \forall q^h \in \mathcal{Q}^h \quad (b) \\ \langle \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}^h; (\mathbf{n} \otimes \delta \boldsymbol{\beta}^h)^{sym} \rangle_{\mathcal{S}}^{(i+1)} - \\ - \langle (\mathbf{S}^h - p^h \mathbf{I}); (\nabla \varphi \otimes \delta \boldsymbol{\beta}^h)^{sym} \rangle_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{(i+1)} = 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\beta}^h \in \mathbb{R}^{ndim} \quad (c) \\ \langle (\nabla p^h - \mathbf{\Pi}^h); \boldsymbol{\eta}^h \rangle_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{(i+1)} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}^h \in \bar{\mathcal{V}}^h \quad (d) \end{array} \right. \quad (6.66)$$

en donde además se ha introducido un clásico esquema de integración temporal, permitiendo escribir el conjunto de ecuaciones de 6.66 en tensiones y desplazamientos totales para el paso de tiempo $(i + 1)$.

Observación 31 *en este estado de avance de la formulación puede realizarse una interpretación alternativa del modelo propuesto. En el capítulo 5, y aun más en detalle en el anexo B, se ha demostrado que el término de estabilización \mathcal{S}_{st} del esquema *PGP* surge de la adición de una sub escala al campo de desplazamientos estándar, en este caso particular*

definida en forma ortogonal al espacio de elementos finitos. Por tal motivo a esta técnica se la denominó estabilización mediante sub escalas ortogonales, y fue desarrollada para aliviar restricciones volumétricas inducidas en modelos isocóricos.

Por otro lado, en el contexto presente y en vista de las definiciones anteriores, es posible plantear:

$$\mathcal{V} = \bar{\mathcal{V}} \oplus \tilde{\mathcal{V}} \quad (6.67)$$

$$\mathcal{V}_0 = \bar{\mathcal{V}}_0 \oplus \tilde{\mathcal{V}} \quad (6.68)$$

con lo cual el enriquecimiento que aporta el modo discontinuo en velocidades a través del espacio $\tilde{\mathcal{V}}$ también puede interpretarse como la introducción de una nueva escala al problema (una sub escala que complementa la cinemática dada por $\bar{\mathcal{V}}$), especialmente ideada para capturar aquellos modos de deformación que no contiene la descripción estándar y que se presentan durante el fenómeno de localización y falla.

En síntesis, el modelo que se plantea en esta tesis puede verse como un esquema de multi escalas, en el sentido que se incorporan dos nuevas escalas a la descripción estándar:

- una de ellas se manifiesta por la aparición de términos estabilizantes en las expresiones de equilibrio y una ecuación adicional 6.66-(d) que nos define el carácter del aporte cinemático introducido. Dado que esta nueva ecuación de proyección está definida en forma global no es posible condensarla a nivel elemental, pero sí es viable realizar un tratamiento simplificado de tipo fraccional, es decir resolverla en forma desacoplada del resto de las ecuaciones, al final de cada paso de análisis. Es necesario recalcar que esta metodología tiene sentido sólo en el dominio regular del sólido $\Omega \setminus \mathcal{S}$, como queda en evidencia a partir de la formulación aquí discutida.
- la sub escala restante se introduce en términos de discontinuidades en el campo de desplazamientos (o velocidades) induciendo modos incompatibles de deformación una vez que el modelo constitutivo del material predice la bifurcación y por lo tanto la compatibilidad con estados discontinuos en la cinemática. También esta técnica introduce una nueva ecuación que se interpreta como condiciones de equilibrio adicionales en la interface de discontinuidad, véase 6.66-(c). Este enriquecimiento puede definirse a nivel global o elemental (en este sentido nos referimos a las dos tecnologías de EF vistas en el capítulo 4: E-FEM y X-FEM). El esquema presente postula la utilización de grados de libertad interiores al elemento, con lo cual la ecuación de equilibrio de tracciones 6.66-(c) puede condensarse estáticamente.

Por lo descrito, el modelo de multi escalas propuesto queda planteado simplemente en el contexto de una formulación mixta en desplazamientos y presiones.

6.5. Implementación numérica

En esta sección se aborda la formulación por elementos finitos del problema (6.66) al incorporar las aproximaciones utilizadas para las variables y sus respectivas variaciones compatibles. Consideramos $\Omega \in \mathbb{R}^2$ y elementos triangulares lineales a trozos para las

presiones, el desplazamiento regular y el campo de gradiente de presión proyectado. De aquí en adelante, por legibilidad, se suprime el supraíndice h que hace referencia a campos discretos. Se introduce además una nomenclatura matricial para facilitar la notación.

6.5.1. Aproximación del campo de desplazamientos y deformaciones

La parte continua del desplazamiento $\bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_x, \bar{u}_y\}^T$ se interpola en forma estándar mediante funciones de forma con polinomios lineales $N_{\bar{\mathbf{u}}}^e(\mathbf{x})$ (el supraíndice $(\bullet)^e$ se refiere al elemento e). La función salto unitario:

$$\mathcal{M}_S^e(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_S(\mathbf{x}) - \sum_1^{nodo+} (N_{\bar{\mathbf{u}}}^e)^{nodo+}(\mathbf{x}) \quad (6.69)$$

como se discutió en la sección 4.2.2, se construye utilizando la sumatoria de funciones $(N_{\bar{\mathbf{u}}}^e)^{nodo+}$ correspondientes a aquellos nodos que pertenecen a la región Ω^{e+} , ver figura 4.3. El soporte de $\mathcal{M}_S^e(\mathbf{x})$ es, en consecuencia, un elemento finito. De esta forma es posible expresar:

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = N_{\bar{\mathbf{u}}}^e(\mathbf{x}) \hat{\bar{\mathbf{u}}}^e(t) + \mathcal{M}_S^e(\mathbf{x}) \beta^e(t) \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^e \quad (6.70)$$

y además:

$$\mathbf{w}^e(\mathbf{x}) = N_{\bar{\mathbf{u}}}^e(\mathbf{x}) \hat{\bar{\mathbf{w}}}^e + \mathcal{M}_S^e(\mathbf{x}) \delta \beta^e \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^e \quad (6.71)$$

donde $(\hat{\bullet})$ implica valores nodales.

El tensor de deformaciones, en un formato vectorial $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \{\varepsilon_{xx}^e, \varepsilon_{yy}^e, \varepsilon_{xy}^e\}^T$, puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}^e(\mathbf{x}) \hat{\bar{\mathbf{u}}}^e(t) + \mathcal{G}^e(\mathbf{x}) \beta^e(t) \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^e \quad (6.72)$$

siendo $\mathbf{B}^e(\mathbf{x})$ el operador deformación-desplazamiento regular clásico, que para un elemento triangular se escribe:

$$\mathbf{B}^e(\mathbf{x}) = (\nabla N_{\bar{\mathbf{u}}}^e)^{sym} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & | & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & | & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & | & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & | & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & | & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & | & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

y $\mathcal{G}^e(\mathbf{x})$ es la matriz dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{G}^e(\mathbf{x}) = \delta_S \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \partial_x(N_{\bar{\mathbf{u}}}^e)^{nodo+} & 0 \\ 0 & \partial_y(N_{\bar{\mathbf{u}}}^e)^{nodo+} \\ \partial_y(N_{\bar{\mathbf{u}}}^e)^{nodo+} & \partial_x(N_{\bar{\mathbf{u}}}^e)^{nodo+} \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

que representa al operador diferencial $\nabla \mathcal{M}_S^e(\mathbf{x})$.

En el caso de la formulación simétrica, cinemática y variacionalmente consistente se tendrá $\mathcal{G}^e = \tilde{\mathcal{G}}^S$, véase ecuación 6.61.

El campo salto en desplazamientos es homogéneo en el dominio del elemento, es decir se asume constante a trozos:

$$\beta^e(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\psi(\mathbf{x})}_{\text{cte}=1} \beta^e(t) = \beta^e(t) \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^e \quad (6.75)$$

donde $\psi(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega^e$ si el elemento ha bifurcado (es decir si $t \geq t_B$), y $\psi(\mathbf{x}) = 0$ en caso contrario.

6.5.2. Interpolación para la presión y gradiente de presión proyectado

El esquema mixto estabilizado que se adopta permite introducir una aproximación lineal para la presión $p^e(\mathbf{x}, t)$ y su variación admisible $q^e(\mathbf{x})$, válida en la parte regular del elemento:

$$p^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_p^e(\mathbf{x}) \hat{p}^e(t) \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}^e \quad (6.76)$$

$$q^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_p^e(\mathbf{x}) \hat{q}^e \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}^e \quad (6.77)$$

donde \mathbf{N}_p^e es el arreglo de funciones de forma para interpolar un campo escalar.

En la zona singular, la presión viene dada directamente por el modelo constitutivo proyectado sobre la discontinuidad y la descripción cinemática, ver figura 6.3:

$$p_S^e(\mathbf{x}, t) = \kappa \nabla \cdot \mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t)|_{\mathcal{S}} = -\kappa \left\{ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^e + \left[\frac{1}{h} \mathbf{n} - \nabla \varphi^e \right] \cdot \beta^e \right\}_S \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}^e \quad (6.78)$$

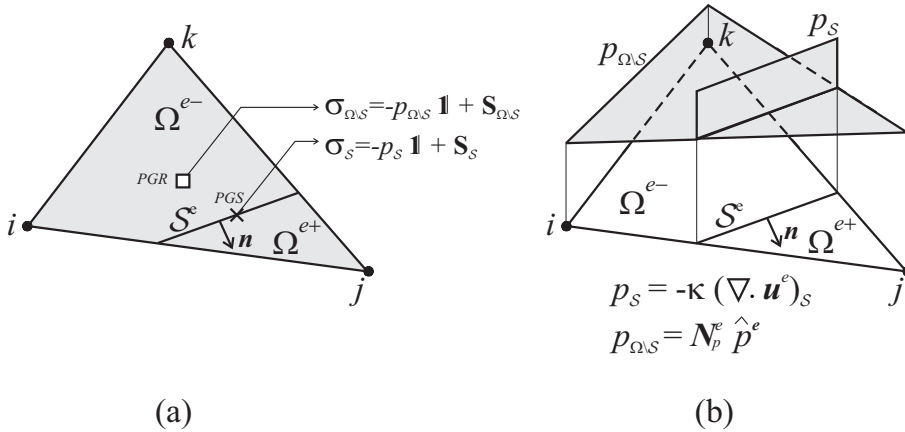


Figura 6.3: Aspectos de implementación: (a) Esquema alternativo de integración numérica. (b) Aproximación del campo de presiones p^e en la zona regular ($\Omega \setminus \mathcal{S}$) y singular (\mathcal{S}) del elemento finito.

Observación 32 de lo anterior se deduce que el campo de presiones es lineal por tramos en $\Omega \setminus \mathcal{S}$ pudiendo presentar una discontinuidad a través de la interface \mathcal{S} . Nótese sin embargo que el vector de tracciones, $\mathcal{T} = \sigma_S \cdot \mathbf{n} = (-p_S \mathbf{1} + \mathbf{S}_S)$, por condición de equilibrio, es necesariamente continuo.

La proyección L^2 del gradiente de presión discreto $\mathbf{\Pi}^e$, (definido sólo sobre $\Omega \setminus \mathcal{S}$), se aproxima utilizando funciones de forma idénticas a aquellas elegidas para los desplazamientos regulares:

$$\mathbf{\Pi}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{u}}}^e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{\Pi}}^e(t) \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}^e \quad (6.79)$$

$$\boldsymbol{\eta}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{u}}}^e(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\eta}}^e \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}^e \quad (6.80)$$

6.5.3. Ecuaciones discretas finales. Cálculo del residuo

Una vez definidos los espacios discretos de interpolación a utilizar, la versión discreta algorítmica del principio variacional (6.66), puede formularse como sigue: hallar el conjunto de parámetros $\hat{\bar{\mathbf{u}}}^{(i+1)}$, $\boldsymbol{\beta}^{(i+1)}$ y $\hat{\mathbf{p}}^{(i+1)}$ al instante de tiempo actual ($i+1$) tal que verifiquen las condiciones de borde esenciales, ecuaciones constitutivas, compatibilidad cinemática y el siguiente sistema:

$$\mathbf{R}_{(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{p})} = \mathbf{F}_{(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{p})}^{(int)} - \mathbf{F}^{(ext)} = \mathbf{0} \quad (6.81)$$

el cual se expresa en función del residuo de la formulación $\mathbf{R}_{(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{p})}$ obtenido a partir de los vectores de fuerza interna $\mathbf{F}_{(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{p})}^{(int)}$ generalizada:

$$\mathbf{F}_{(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{p})}^{(int)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{u}}}^{(int)} \\ \mathbf{F}_p^{(int)} \\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\beta}}^{(int)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S}^{e(i+1)} d\Omega \setminus \mathcal{S}^e \right] - \mathbf{G}_0 \hat{\mathbf{p}}^{(i+1)} \\ -\mathbf{G}_0^T \hat{\bar{\mathbf{u}}}^{(i+1)} - \left[\frac{1}{\kappa} \mathbf{M}_p + \mathbf{L} \right] \hat{\mathbf{p}}^{(i+1)} - \mathbf{Q} \boldsymbol{\beta}^{(i+1)} \\ \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{g}}^{eT} \boldsymbol{\sigma}^{e(i+1)} d\Omega^e \right] \end{bmatrix} \quad (6.82)$$

y fuerza externa $\mathbf{F}^{(ext)}$:

$$\mathbf{F}^{(ext)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{u}}}^{(ext)} \\ \mathbf{F}_p^{(ext)} \\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\beta}}^{(ext)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{u}}}^{eT} \mathbf{b}^{(i+1)} d\Omega^e + \int_{\Gamma_{\sigma}^e} \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{u}}}^{eT} \mathbf{t}^{*(i+1)} d\Gamma_{\sigma}^e \right] \\ -\mathbf{H}^T \hat{\mathbf{\Pi}}^{(i)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.83)$$

Las matrices \mathbf{G}_0 , \mathbf{M}_p , $\mathbf{M}_{\bar{\mathbf{u}}}$, \mathbf{L} , \mathbf{H} y \mathbf{Q} , en las formulas 6.82-6.83, se evalúan como sigue:

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbb{I} \mathbf{N}_p^e d\Omega \setminus \mathcal{S}^e \right] \quad (6.84)$$

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} \mathbf{N}_p^{eT} \mathbf{N}_p^e d_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} \right] \quad (6.85)$$

$$\mathbf{M}_{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{u}}}^{eT} \tau \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{u}}}^e d_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} \right] \quad (6.86)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} (\nabla \mathbf{N}_p^e)^T \tau (\nabla \mathbf{N}_p^e) d_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} \right] \quad (6.87)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{u}}}^{eT} \tau (\nabla \mathbf{N}_p^e) d_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} \right] \quad (6.88)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} \mathbf{N}_p^{eT} \mathbb{I}^T \mathbf{G}^e d_{\Omega \setminus \mathcal{S}^e} \right] \quad (6.89)$$

Observación 33 se observa que los arreglos 6.84-6.88 son análogos a los presentadas en el capítulo previo (sección 5.3.1), la única diferencia es que ahora se computan por medio de integrales restringidas al dominio regular del sólido $\Omega \setminus \mathcal{S}$.

Dado que los grados de libertad de saltos en desplazamientos poseen soporte elemental, la expresión que gobierna el equilibrio en \mathcal{S} puede condensarse estáticamente a nivel de cada elemento finito, eliminando de esta forma una variable independiente del problema. Aunque por simplicidad de notación se seguirá escribiendo dicha ecuación de balance en la fisura, téngase en cuenta que tales grados de libertad (β) no aportan al sistema final.

Siguiendo un razonamiento similar al planteado en el capítulo precedente, la forma compacta 6.83 considera una estrategia simplificada consistente en desacoplar el campo Π y evaluarlo en términos del valor convergido de la presión al paso (i):

$$\hat{\Pi}^{(i)} = \mathbf{M}_{\bar{\mathbf{u}}}^{-1} \mathbf{H}^{(i)} \hat{\mathbf{p}}^{(i)} \quad (6.90)$$

con el objeto de obtener un esquema numérico más eficiente desde el punto de vista computacional.

El algoritmo utilizado para la resolución del sistema 6.81 se basa en la incorporación de puntos de integración adicionales a los del elemento estándar y una reformulación compatible de la cuadratura [Oli6b] (ver figura 6.3-(a)). En este sentido, los términos $\mathbf{F}_{\bar{\mathbf{u}}}^{(int)}$ y $\mathbf{F}_p^{(int)}$, al estar definidos sobre la zona regular del elemento $\Omega \setminus \mathcal{S}^e$, se calculan en forma tradicional, es decir en puntos de Gauss regulares (PGR). Por otro lado, la evaluación de $\mathbf{F}_{\beta}^{(int)}$ requiere el computo de tensiones no sólo en $\Omega \setminus \mathcal{S}^e$ sino también en la discontinuidad, esto último se realiza a nivel de los puntos de gauss singulares (PGS).

A manera de resumen, los conceptos discutidos introducen un modelo numérico que presenta las siguientes características básicas:

- (i) mantiene estable la evolución de la parte esférica de la tensión en régimen elástico y plástico durante la etapa pre-bifurcación, en cuanto a la restricción de incompresibilidad.
- (ii) la tensión en la zona regular ($\sigma_{\Omega \setminus S}$) se reconstruye teniendo en cuenta la incorporación de la presión como variable independiente del problema, véase figura 6.3-(b) y ecuación (6.76).
- (iii) la tensión en el dominio singular (σ_S) no considera el grado de libertad adicional de presión sino que se obtiene directamente del modelo constitutivo y en forma compatible con la cinemática de discontinuidades fuertes, ver figura 6.3-(b) y ecuación (6.78).
- (iv) se verifica que, en régimen de discontinuidad fuerte, el modo de colapso inducido se corresponde con un modo de deslizamiento puro (banda de corte), lo cual es totalmente consistente con el modelo constitutivo utilizado.

6.5.4. Forma lineal. Matriz tangente consistente

El uso de un esquema de Newton-Raphson para resolver 6.81 requiere la evaluación del jacobiano \mathbf{J} asociado al sistema de ecuaciones. Considerando que $\mathbf{X} = [\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\beta}]^T$ es nuestro vector de variables independientes, la matriz tangente puede ser evaluada como sigue:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \quad (6.91)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{u}}}^{(int)} \\ \delta \mathbf{F}_p^{(int)} \\ \dots \\ \delta \mathbf{F}_{\boldsymbol{\beta}}^{(int)} \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{X})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}} & \mathbf{K}_{\bar{\mathbf{u}}p} & \vdots & \mathbf{K}_{\bar{\mathbf{u}}\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{K}_{p\bar{\mathbf{u}}} & \mathbf{K}_{pp} & \vdots & \mathbf{K}_{p\boldsymbol{\beta}} \\ \dots & \dots & \cdot & \dots \\ \mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta}\bar{\mathbf{u}}} & \mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta}p} & \vdots & \mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{u}} \\ \delta \hat{\mathbf{p}} \\ \dots \\ \delta \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{X}} \quad (6.92)$$

donde cada submatriz \mathbf{K}_{ij} resulta:

$$\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}} = \bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega \setminus S^e} (\mathbf{B}^{eT} \text{dev}(\mathbf{C}) \mathbf{B}^e) d_{\Omega \setminus S^e} \right] \quad (6.93)$$

$$\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{u}}p} = \mathbf{K}_{p\bar{\mathbf{u}}}^T = \underbrace{-\mathbf{G}_0}_{\Omega \setminus S^e} \quad (6.94)$$

$$\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{u}}\boldsymbol{\beta}} = \bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega \setminus S^e} (\mathbf{B}^{eT} \text{dev}(\mathbf{C}) \mathcal{G}^e) d_{\Omega \setminus S^e} \right] \quad (6.95)$$

$$\mathbf{K}_{pp} = - \underbrace{\left[\frac{1}{\kappa} \mathbf{M}_p + \mathbf{L} \right]}_{\Omega \setminus S^e} \quad (6.96)$$

$$\mathbf{K}_{p\beta} = \underbrace{-\mathbf{Q}}_{\Omega \setminus S^e} \quad (6.97)$$

$$\mathbf{K}_{\beta\bar{u}} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega \setminus S^e} (\tilde{\mathcal{G}}^{eT} \text{dev}(\mathbf{C}) \mathbf{B}^e) d_{\Omega \setminus S^e} \right] + \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{S^e} (\tilde{\mathcal{G}}^{eT} \mathbf{C} \mathbf{B}^e) d_{S^e} \right] \quad (6.98)$$

$$\mathbf{K}_{\beta p} = - \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega \setminus S^e} (\tilde{\mathcal{G}}^{eT} \mathbb{I} \mathbf{N}_p^e) d_{\Omega \setminus S^e} \right] \quad (6.99)$$

$$\mathbf{K}_{\beta\beta} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega \setminus S^e} (\tilde{\mathcal{G}}^{eT} \text{dev}(\mathbf{C}) \mathcal{G}^e) d_{\Omega \setminus S^e} \right] + \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{S^e} (\tilde{\mathcal{G}}^{eT} \mathbf{C} \mathcal{G}^e) d_{S^e} \right] \quad (6.100)$$

Dependiendo del tipo de aproximación utilizada para la matriz $\tilde{\mathcal{G}}^e$ es posible desarrollar distintas tipologías de elementos finitos. En particular en este trabajo presentamos una formulación simétrica ($\tilde{\mathcal{G}}^{eS}$) y una no simétrica ($\tilde{\mathcal{G}}^{eN}$) como se describió oportunamente.

6.6. Verificación numérica del modelo

Se analiza a continuación el comportamiento numérico del elemento propuesto, aquí denominado *PGPSD*, mediante la simulación computacional de dos problemas bidimensionales. Particularmente, estamos interesados en determinar la habilidad del modelo para capturar modos de localización de deformaciones que conducen al mecanismo de colapso y la carga límite estructural. Además se analizan otros aspectos fundamentales en el contexto de la mecánica de falla bajo régimen de ablandamiento, tal como la objetividad de los resultados numéricos con independencia del tamaño y orientación de la malla.

La validación matemática y consistencia de la estrategia numérica desarrollada se estudia comparándola con formulaciones alternativas de elementos finitos, las cuales se introducen utilizando la nomenclatura mostrada en la tabla 6.3. Como puede observarse allí, el conjunto de elementos usados para esta comparación pertenecen tanto a formulaciones generalizadas en desplazamientos (el triángulo de deformación constante *STDSD* y el elemento cuadrilátero *BBARSD* tomado de Simo et al. [SH98]), como a estrategias mixtas (velocidad-presión) incluyendo el esquema de estabilización *PGP*. Algunas de ellas enriquecidas con una cinemática de discontinuidades fuertes embebida de soporte local.

En la formulación *PGPSD*, la condición de continuidad de tracciones se ha implementado considerando dos procedimientos: el elemento simétrico *PGPSD-S* de acuerdo a la ecuación 6.61 y el no simétrico *PGPSD-N* gobernado por la ecuación 6.62.

Nomenclatura	Topología	Cinemática	Tratamiento de la incompresibilidad	Tipo de elemento
PGP	Triángulo	Estándar	Esquema PGP	
STDSD-N	Triángulo	Disc. Fuertes	Ninguno	No-Simétrico
STDSD-S	Triángulo	Disc. Fuertes	Ninguno	Simétrico
PGPSD-N	Triángulo	Disc. Fuertes	Esquema PGP	No-Simétrico
PGPSD-S	Triángulo	Disc. Fuertes	Esquema PGP	Simétrico
BBARSD-N	Cuadrángulo	Disc. Fuertes	Formulación BBAR	No-Simétrico
BBARSD-S	Cuadrángulo	Disc. Fuertes	Formulación BBAR	Simétrico

Cuadro 6.3: Formulaciones de elementos finitos para modelar bandas de deslizamiento.

Las soluciones para la estrategia *PGP* sin discontinuidades fuertes (denotada como cinemática estándar en la tabla 6.3) se obtuvieron a partir de una regularización clásica del módulo de ablandamiento H , redefiniéndolo para aquellos elementos en régimen post-bifurcación, de acuerdo a: $H^{reg} = h_e \bar{H}$, donde h_e es el tamaño característico del elemento finito y \bar{H} el módulo de ablandamiento intrínseco, computado mediante la fórmula 6.22.

También se reporta un estudio asociado al costo computacional relativo entre los elementos *PGPSD* y *BBARSD*.

El coeficiente de estabilidad “ c ” adoptado es del orden de la unidad.

6.6.1. Problema de estabilidad de talud

Cuando se establecen condiciones de carga no drenadas, el comportamiento constitutivo de un suelo cohesivo saturado puede ser aproximadamente modelado mediante una ley de plasticidad asociada y desviatórica. En este contexto, utilizamos un modelo J_2 para simular un problema típico de estabilidad de talud en estado plano de deformación y su correspondiente modo de fallo de tipo banda de deslizamiento. Un ejemplo similar fue presentado en Regueiro et al. [RB99] y en Oliver et al. [OHBL05] utilizando un elemento de tipo *BBAR* con discontinuidades fuertes embebidas. Debido a la falta, al menos en lo que concierne al conocimiento del autor, de una solución exacta o analítica para este problema, la estrategia antes mencionada (denotada como *BBARSD-N* en la tabla 6.3 y ampliamente reconocida en la comunidad científica), se utiliza como solución de referencia para comparar nuestros resultados cualitativos y cuantitativos.

El énfasis del análisis estará puesto en incluir o no los efectos del modo discontinuo de deformación. Además, la influencia que aporta la estabilización sobre la solución numérica se estudia contrastando el modelo propuesto con formulaciones similares que no utilizan tratamiento alguno para la incompresibilidad.

En la figura 6.4 se observa la geometría de la estructura y las condiciones de borde del modelo físico. El test consiste en aplicar (incrementalmente) un desplazamiento vertical prescrito $\delta \mathbf{u}$ en el punto medio de la zapata rígida ubicada por sobre la cima del talud (punto A). Esta situación origina un problema de inestabilidad y el desarrollo de una banda de corte que propaga a través del interior del terraplén en forma de una superficie de fallo. Se asume un modelo constitutivo de plasticidad J_2 con ablandamiento isótropo lineal caracterizado por los siguientes parámetros mecánicos: $E = 1,0e7 [Pa]$ (módulo de Young), $\nu = 0,45$ (coeficiente de Poisson), $\sigma_y = 1,0e5 [Pa]$ (tensión de fluencia), $H = -2,0e5 [Pa]$ (módulo de ablandamiento), $G_f = 8e3 [N/m]$ (energía de fractura).

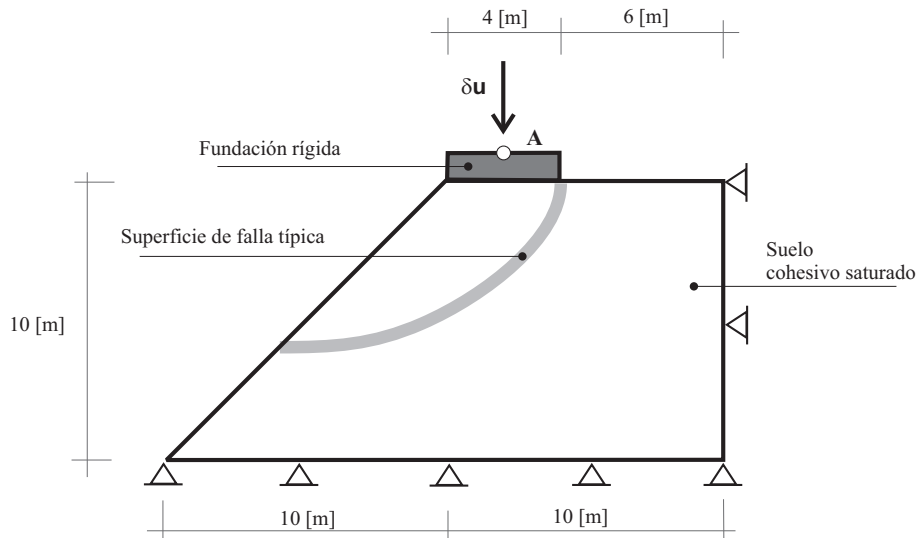


Figura 6.4: Problema de estabilidad de talud. Geometría y condiciones de contorno.

Para realizar los test numéricos se utilizaron tres mallas de elementos triangulares: M1, M2 y M3, véase figura 6.5, con un tamaño característico aproximado de $h_e = 1,0 [m]$, $h_e = 0,50 [m]$ y $h_e = 0,25 [m]$ respectivamente. Nótese que intencionalmente la orientación de la malla se ha generado de forma tal que ésta resulte opuesta al camino que toma la banda de corte y por lo tanto es la configuración topológica más desfavorable. Tal situación representa un verdadero desafío para la cinemática lineal de los elementos triangulares.

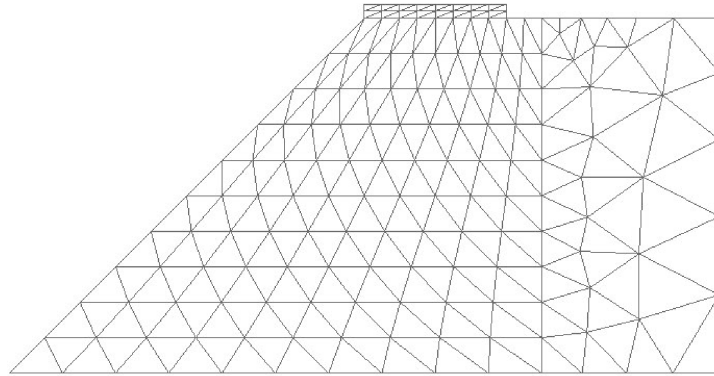
Este ejemplo está especialmente diseñado para evaluar si la formulación *PGPSD* presenta objetividad con respecto a la direccionalidad de la malla y por supuesto también en relación a la densidad de la misma.

Para obtener la solución de referencia utilizando la formulación *BBARSD-N*, se utiliza una malla de cuadrángulos M4, ver figura 6.6, con un tamaño de elemento similar a la malla M3.

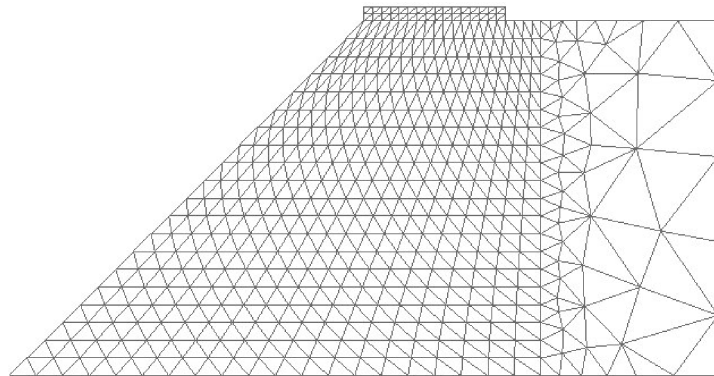
Desde el punto de vista fenomenológico, la localización se inicia en los elementos ubicados por debajo de la zapata, cuando el estado tensional satisface la condición de bifurcación discontinua. En estas circunstancias la descripción cinemática se enriquece incorporando modos de deformación mejorados. La figura 6.7 muestra, para la formulación *PGPSD-N* y la malla M3, la evolución temporal de aquellos elementos en los cuales sucesivamente se activan los grados de libertad de saltos β^e . En estado límite y para los estados más avanzados de análisis puede observarse claramente la generación de una superficie de fallo completamente desarrollada, formada por el conjunto de elementos atravesados por la componente discontinua del desplazamiento.

En la figura 6.8 se observa también el conjunto de elementos en régimen post-bifurcación para las tres mallas de triángulos (M1, M2, M3) utilizando la aproximación *PGPSD-N* y en correspondencia con el máximo desplazamiento impuesto ($\delta u = 0,20 [m]$). Podemos notar que las tres configuraciones de malla muestran una concordancia cualitativa con respecto a la trayectoria de la banda de corte inducida, con una notable tendencia para converger hacia una curva bien definida de fallo que, por otro lado, compara satisfactoriamente con aquella reportada por Regueiro. et al. [RB99].

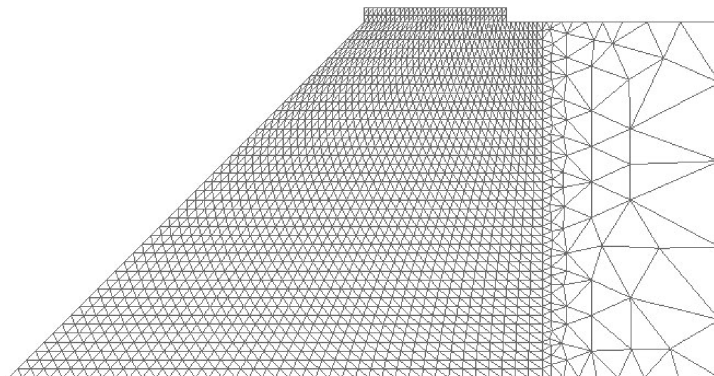
La capacidad del modelo para capturar el fenómeno de localización de deformaciones



(a) M1: 285 elementos triangulares

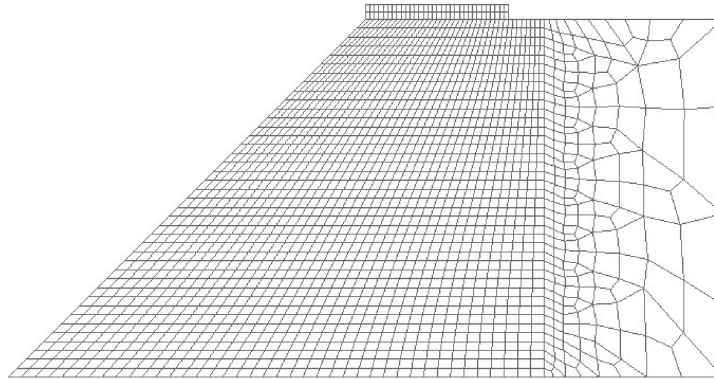


(b) M2: 969 elementos triangulares



(c) M3: 3541 elementos triangulares

Figura 6.5: Problema de estabilidad de talud. Secuencia de mallas de elementos triangulares: (a) Malla M1: 285 elementos, $h_e \approx 1 [m]$. (b) Malla M2: 969 elementos, $h_e \approx 0,50 [m]$. (c) Malla M3: 3541 elementos, $h_e \approx 0,25 [m]$.



M4: 1865 elementos cuadriláteros

Figura 6.6: Problema de estabilidad de talud. Malla M4, de cuadriláteros: 1865 elementos, $h_e \approx 0,25 [m]$.

queda aún más en evidencia si observamos la figura 6.9. Allí se muestran los elementos $PGPSD-N$ que alcanzan la condición de carga plástica para seis estados diferentes en el análisis. Inicialmente el comportamiento inelástico toma lugar desde los extremos de la placa rígida y evoluciona hacia el interior del terraplén. A medida que progresa el grado de sollicitación mecánico y a partir de la secuencia cronológica que se presenta en este gráfico, resulta claro notar cómo la geometría y condiciones de contorno del problema, inducen un modo asimétrico de falla. Este mecanismo se caracteriza por el desarrollo de una superficie de corte o deslizamiento en correspondencia con una delgada banda de elementos que continúan disipando energía de forma irreversible mientras que el resto del sólido experimenta descarga elástica. Este mecanismo de degradación es, de hecho, el proceso previo al colapso en materiales gobernados por leyes con ablandamiento por deformación. El esquema numérico propuesto parece tener suficiente habilidad para reproducir este comportamiento físicamente esperable del ejemplo en estudio.

La falla estructural puede también observarse en la figura 6.10, donde mostramos la respuesta del modelo $PGPSD-N$ en términos de tres representaciones gráficas alternativas para el campo de desplazamientos y en el estado último de carga: (i) norma L^2 , (ii) curvas de nivel y (iii) campo de vectores.

La figura 6.11-(a)-(b) muestra la geometría de EF en la configuración deformada comparando las soluciones que se obtienen al utilizar dos formulaciones estabilizadas, una de ellas con una cinemática regular estándar (PGP) y la otra incorporando la componente singular mediante la introducción de discontinuidades embebidas ($PGPSD-N$). En el primer caso, debe notarse que la zona con deformaciones localizadas tiene una pronunciada tendencia a seguir la alineación de los elementos (direcciones preferenciales). Además, el triángulo PGP presenta un modo de fallo bastante más difuso si lo comparamos con el elemento $PGPSD$ el cual permite capturar bandas con deformaciones altamente localizadas. Ambos efectos, determinan una notable diferencia en la respuesta estructural medida a través de la curva carga desplazamiento (véase figura 6.11-(c)), principalmente en la predicción de la carga límite y en la cantidad de energía disipada en el proceso completo de degradación.

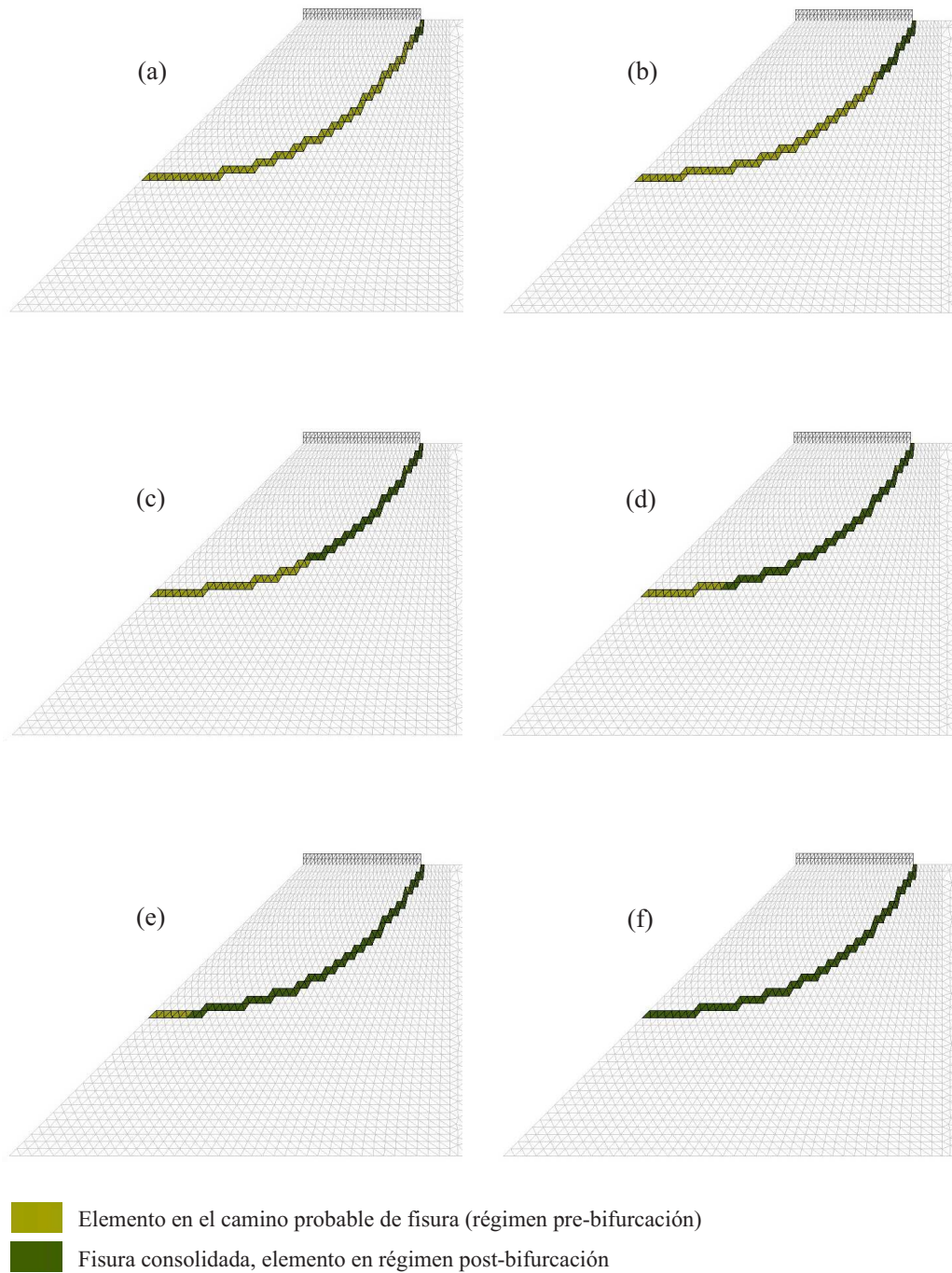
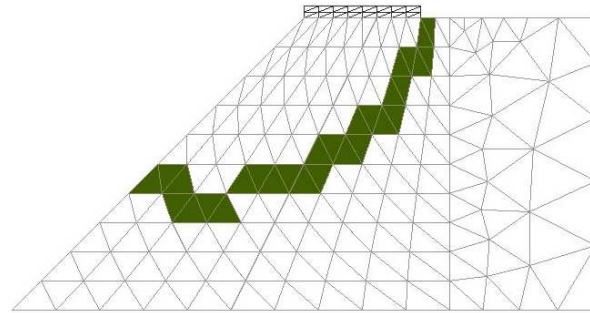
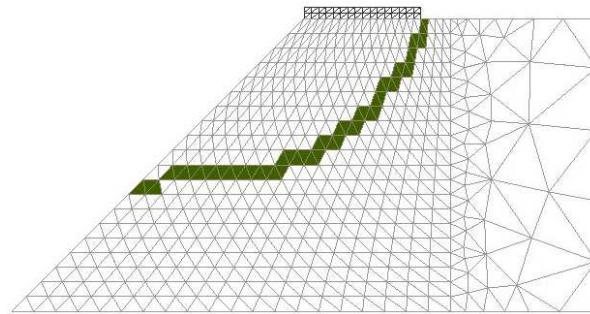


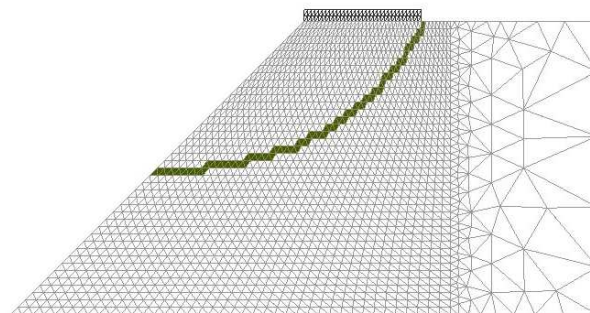
Figura 6.7: Problema de estabilidad de talud. Secuencia de elementos atravesados por la superficie de fallo conforme avanza el proceso de localización. Formulación $PGPSD-N$, Malla M3.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.8: Problema de estabilidad de talud. Elementos atravesados por la superficie de fallo para el máximo desplazamiento impuesto ($\delta \mathbf{u} = 0,20 [m]$). Formulación *PGPSD-N*: (a) Malla M1. (b) Malla M2. (c) Malla M3.

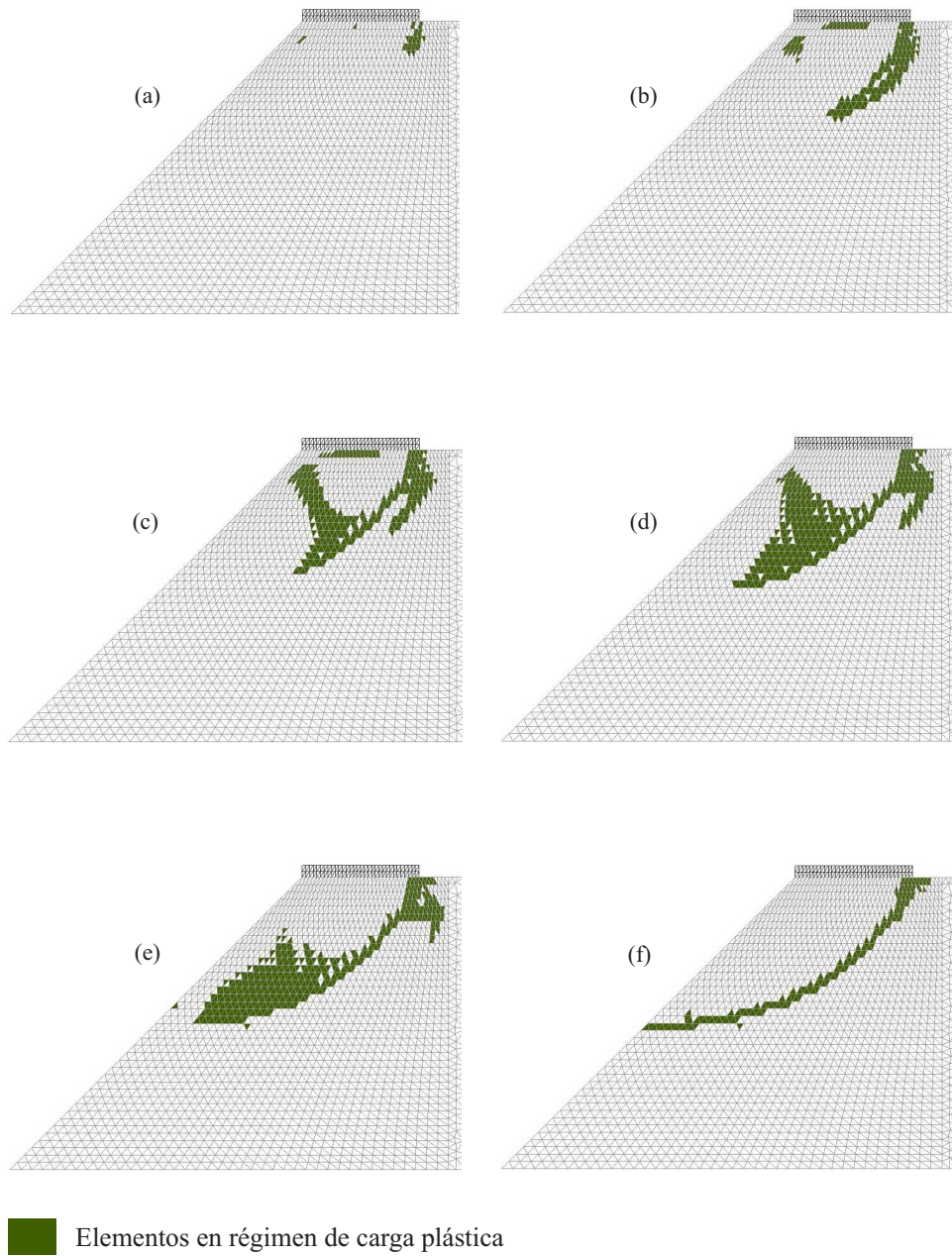


Figura 6.9: Problema de estabilidad de talud. Secuencia de elementos con comportamiento disipativo plástico conforme avanza el proceso de localización. Formulación $PGPSD-N$, Malla M3.

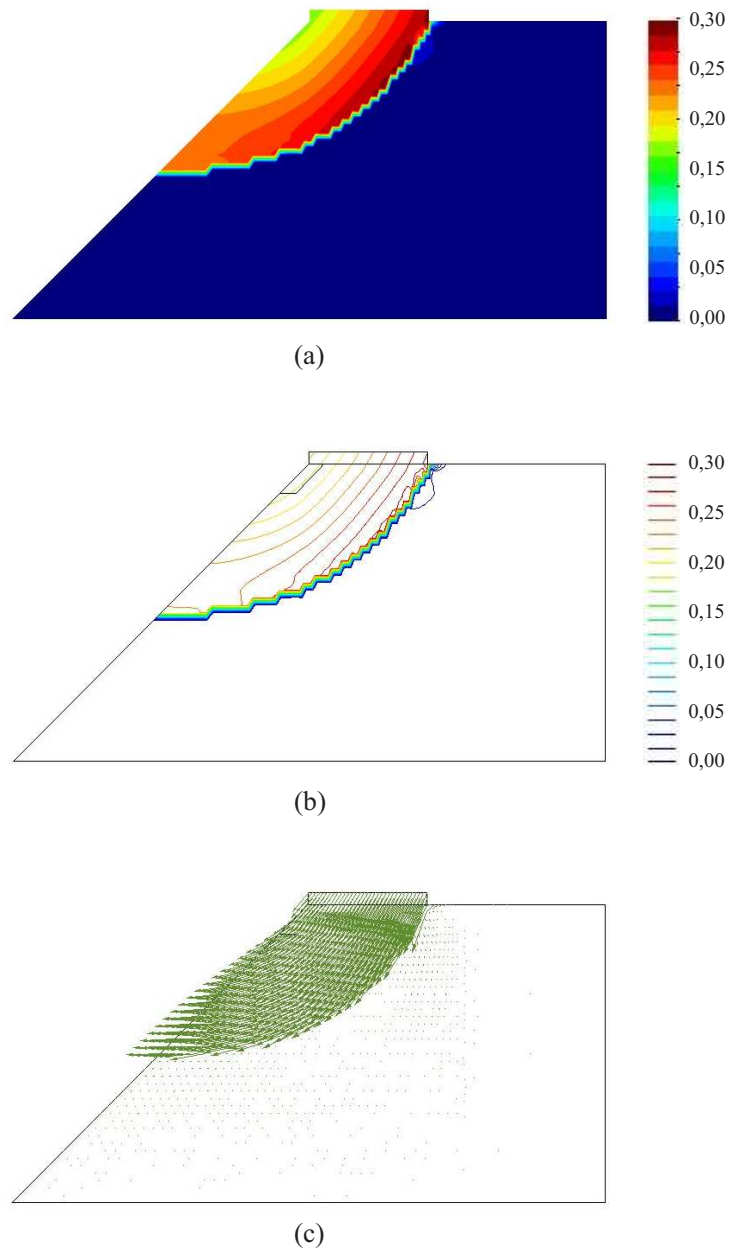


Figura 6.10: Problema de estabilidad de talud. Respuesta en desplazamientos para el modelo $PGPSD-N$, Malla M3: (a) Mapa de la medida L^2 de \mathbf{u} . (b) Curvas de nivel. (c) Campo de vectores.

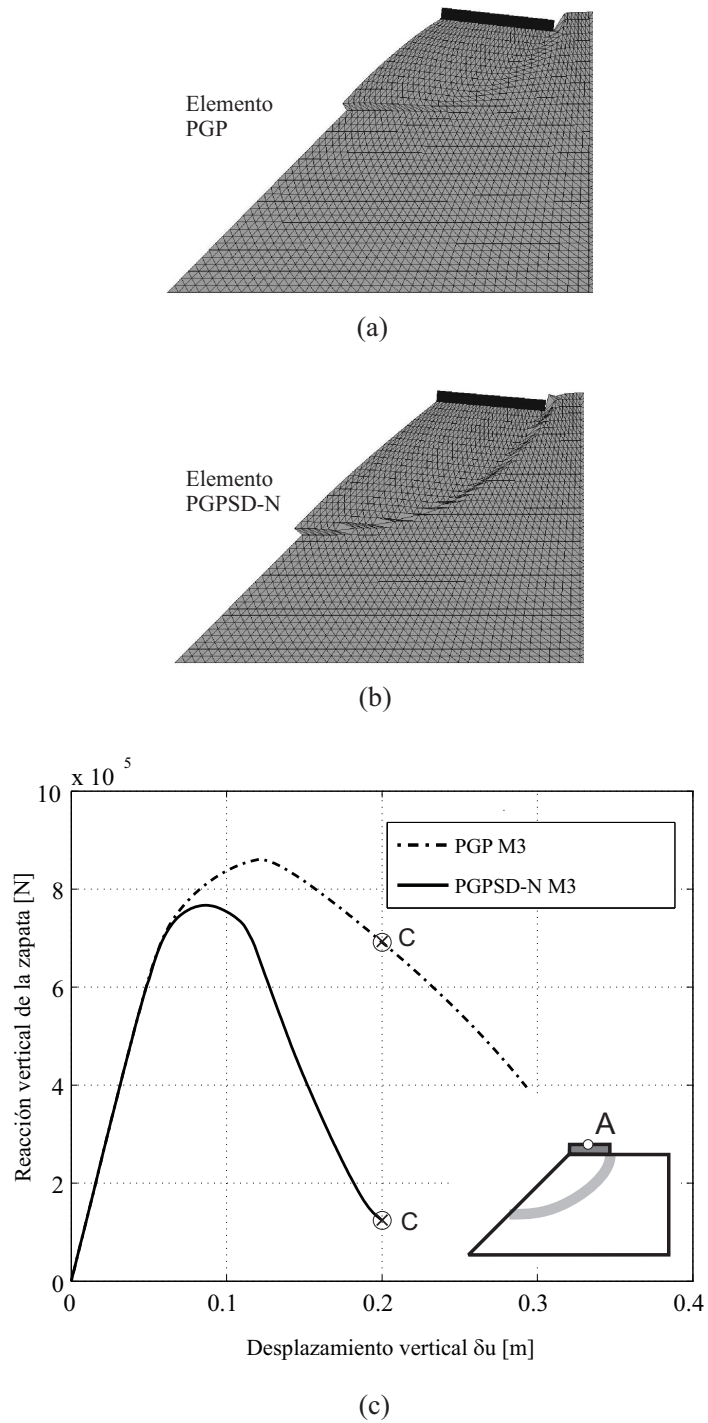


Figura 6.11: Problema de estabilidad de talud. Comparación entre la estrategia *PGP* y *PGPSD-N*: (a) Formulación *PGP*, geometría deformada a nivel del punto C en la curva de respuesta. (b) Formulación *PGPSD-N*, geometría deformada a nivel del punto C en la curva de respuesta. (c) Curva de equilibrio carga vs. desplazamiento del punto A, para ambos esquemas numéricos.

Hasta el momento sólo se ha analizado el modelo en función de características o propiedades cualitativas de la solución. A continuación, reportamos importantes resultados cuantitativos, estudiando la respuesta estructural en términos de la curva carga versus desplazamiento vertical $\delta \mathbf{u}$ en la cima de la zapata (punto A).

La figura 6.12-(a) muestra trayectorias de equilibrio para la formulación $PGPSD-N$ y para las diferentes mallas propuestas. La solución correspondiente a la configuración M3 compara satisfactoriamente con aquella obtenida utilizando la estrategia $BBARSD-N$ en todo el rango de análisis incluyendo el comportamiento post-crítico de ablandamiento. En la figura 6.12-(b) se observan, para la malla M3, los mismos resultados pero utilizando ahora distintas formulaciones de elementos. Las respuestas reportadas con el elemento $STDSD$ revelan un bloqueo cinemático espúreo producto de la restricción inducida por deformaciones isocóricas, como consecuencia se sobreestima la carga pico y la energía de fractura. La formulación $PGPSD-S$ presenta un comportamiento intermedio no del todo satisfactorio, sin embargo debe aclararse que, en este caso, las diferencias con la solución correcta no están asociadas a un bloqueo de tipo volumétrico. Es un hecho bien conocido que el esquema simétrico resulta menos preciso que el no simétrico, debido a la forma en que se impone el equilibrio a través de la discontinuidad. No se descarta la posibilidad de utilizar la forma simétrica del modelo $PGPSD$, en especial para la extensión de la formulación al caso tridimensional, como línea de trabajo futuro.

Nótese además que la estrategia $PGPSD-N$ no sólo tiene una adecuada convergencia en la predicción de la carga límite P_u (con respecto a la solución de referencia) sino también en términos de la energía disipada en el proceso de localización. De hecho esta importante característica del modelo, fácilmente observable en la figura 6.12-(a), puede ser cuantificada matemáticamente mediante un adecuado análisis de convergencia en malla. Con este objetivo en mente, definimos:

$$S^{PGPSD-N} = \{S_{(M1)}^{PGPSD-N}, S_{(M2)}^{PGPSD-N}, S_{(M3)}^{PGPSD-N}\} \quad (6.101)$$

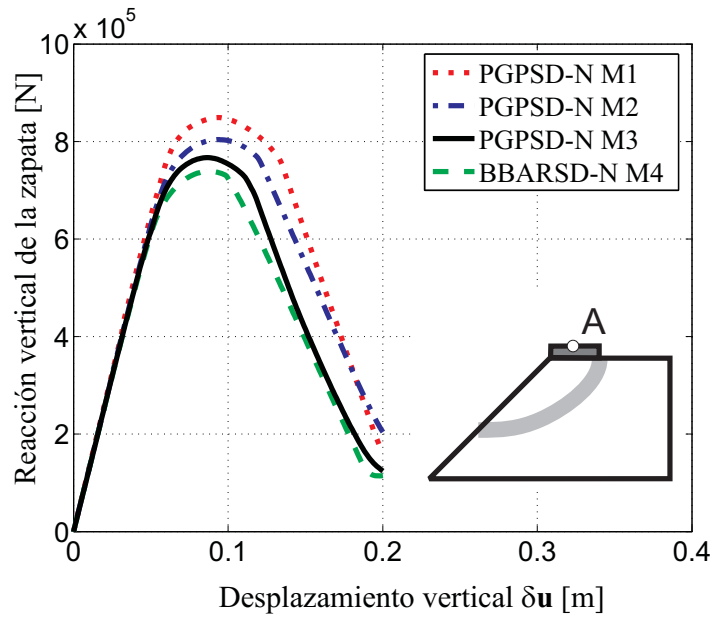
$$S^{STDSD-N} = \{S_{(M1)}^{STDSD-N}, S_{(M2)}^{STDSD-N}, S_{(M3)}^{STDSD-N}\} \quad (6.102)$$

como la secuencia de las trayectorias de equilibrio obtenidas con la formulación $PGPSD-N$ y $STDSD-N$ respectivamente, utilizando las tres discretizaciones de elementos finitos (M1, M2 y M3). La primer secuencia, ecuación 6.101, es precisamente aquella que se observa en la figura 6.12-(a).

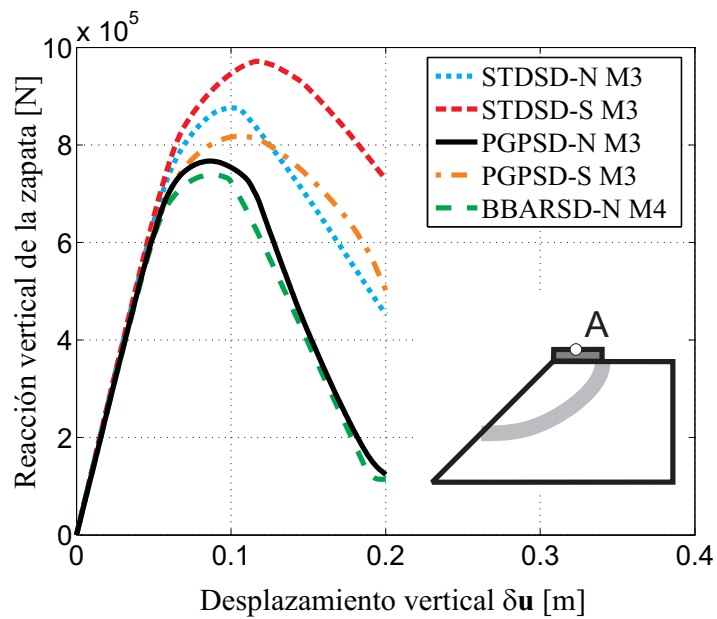
El error relativo $\|e\|_{L^2}$ de cada solución S_{Mi} , donde S_{Mi} es la curva carga vs. desplazamiento para la Malla Mi ($i=1, 2, 3$), se computa en términos de una norma L^2 en el espacio de funciones cuadrado integrables como sigue:

$$\|e\|_{L^2} = \frac{\|S_{(Mi)} - S_{(REF)}\|_{L^2}}{\|S_{(REF)}\|_{L^2}} = \frac{\sqrt{\int_0^{\tau_{max}} (S_{(Mi)} - S_{(REF)})^2 d\tau}}{\sqrt{\int_0^{\tau_{max}} (S_{(REF)})^2 d\tau}} ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.103)$$

donde el parámetro de integración τ corresponde al desplazamiento vertical ($\delta \mathbf{u}$), $\tau_{max} = \max(\delta \mathbf{u}) \approx 0,20 [m]$ es el mismo para todos los casos y $S_{REF} = S_{M3}^{BBARSD-N}$ es la solución de referencia.

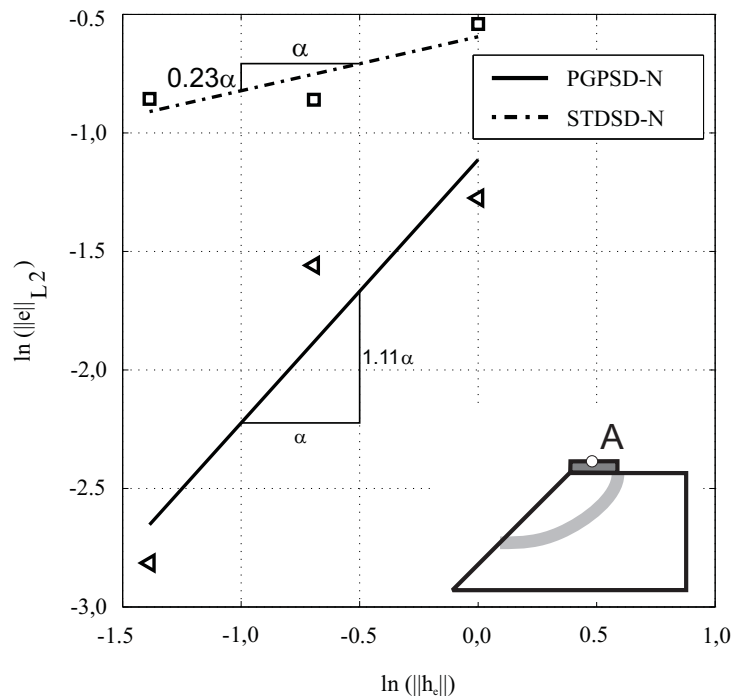


(a)

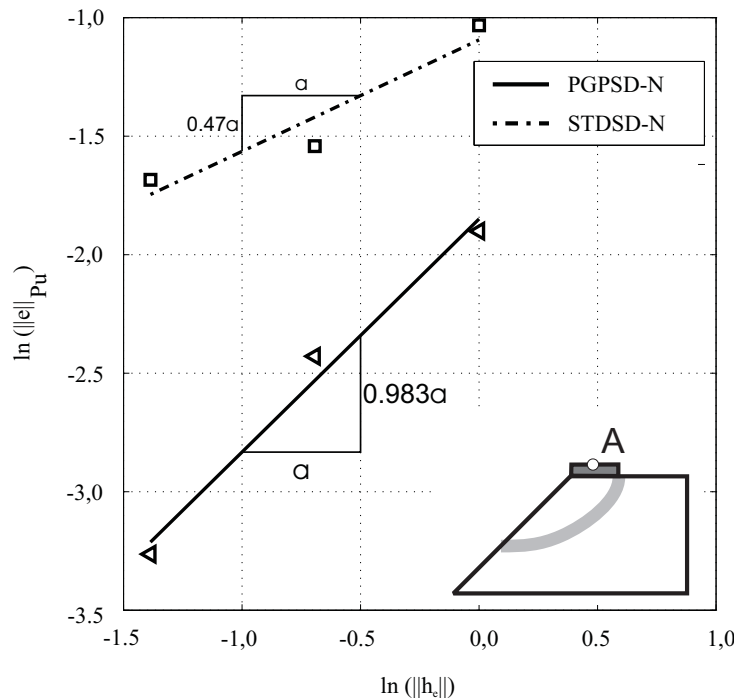


(b)

Figura 6.12: Problema de estabilidad de talud. Curva de equilibrio carga versus desplazamiento del punto A: (a) Convergencia en malla del modelo *PGPSD-N*. (b) Comparación de varias formulaciones de elementos, Malla M3.



(a)



(b)

Figura 6.13: Problema de estabilidad de talud. Tasa de convergencia de la formulación *PGPSD-N* comparada con el elemento *STDSD-N*: (a) Medida L^2 de la energía disipada. (b) Carga límite estructural.

En la figura 6.13-(a) mostramos la norma del error en energía disipada ($\|e\|_{L^2}$) como función del tamaño característico de la malla h_e en un clásico diagrama logarítmico de regresión lineal.

De forma análoga, es posible realizar el mismo estudio asociado a la carga límite estructural, véase figura 6.13-(b). En este último caso el error relativo $\|e\|_{Pu}$ se evalúa simplemente como:

$$\|e\|_{Pu} = \frac{\|Pu_{(Mi)} - Pu_{(REF)}\|}{\|Pu_{(REF)}\|} \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.104)$$

donde $Pu_{(Mi)}$ es el máximo valor de la reacción vertical de la placa de fundación y $Pu_{(REF)} = Pu_{(M3)}^{BBARSD-N}$

A partir de la figura 6.13, se observa claramente una mayor precisión en los resultados y una velocidad de convergencia más alta si se compara el modelo presente con el elemento triangular con discontinuidades fuertes *STDS-D-N* (sin tratamiento para incompresibilidad).

Como último ítem, se analiza el costo computacional que introduce la estrategia *PGPSD* con respecto a la otra alternativa que muestra buen comportamiento numérico, la formulación *BBARSD-N*. En la tabla 6.4 se visualiza el incremento relativo en tiempo de CPU, $t_R = \frac{t_{(PGPSD)}}{t_{(BBARSD)}}$, para diferentes partes del proceso de cálculo. En este sentido debe considerarse que la simulación numérica se llevó cabo en un ordenador personal con procesador Pentium 4 - 3,0 Ghz, 512 Mb de memoria RAM. Cada malla M1, M2 y M3 de triángulos es comparada con mallas de cuadriláteros de idéntico número de nodos y tamaño de elemento.

Malla	Computo del residuo y ensamble	Computo de la matriz de rigidez y ensamble	Resolución del sistema	Tiempo total
M1	1.44	1.16	2.10	1.37
M2	1.44	1.12	1.25	1.30
M3	1.48	1.06	1.33	1.31

Cuadro 6.4: Problema de estabilidad de talud. Costo computacional relativo entre la formulación *PGPSD* y la estrategia *BBARSD*.

6.6.2. Panel bidimensional con entalla

Como segundo ejemplo de validación se propone resolver un problema clásico en el contexto de la mecánica de fractura. El mismo consiste en una placa cuadrada ($20 \times 20 [cm]^2$) con una perturbación central materializada mediante una entalla de espesor despreciable, véase figura 6.14-(a). Esta configuración geométrica induce un modo específico de colapso y su correspondiente carga última asociada. El objetivo que nos planteamos es intentar reproducir las características más importantes del proceso de degradación material utilizando para ello la formulación numérica introducida en este capítulo (*PGPSD*). Se asume un modelo constitutivo de Von Mises dotado de una ley lineal de ablandamiento por deformación. Sus parámetros mecánicos se detallan a continuación: $E = 1,0e7 [Pa]$, $\nu = 0,499$, $\sigma_y = 1,0e5 [Pa]$, $H = -2,0e5 [Pa]$, $G_f = 4e3 [N/m]$. Obsérvese que el régimen de incompresibilidad está presente desde el inicio del período elástico.

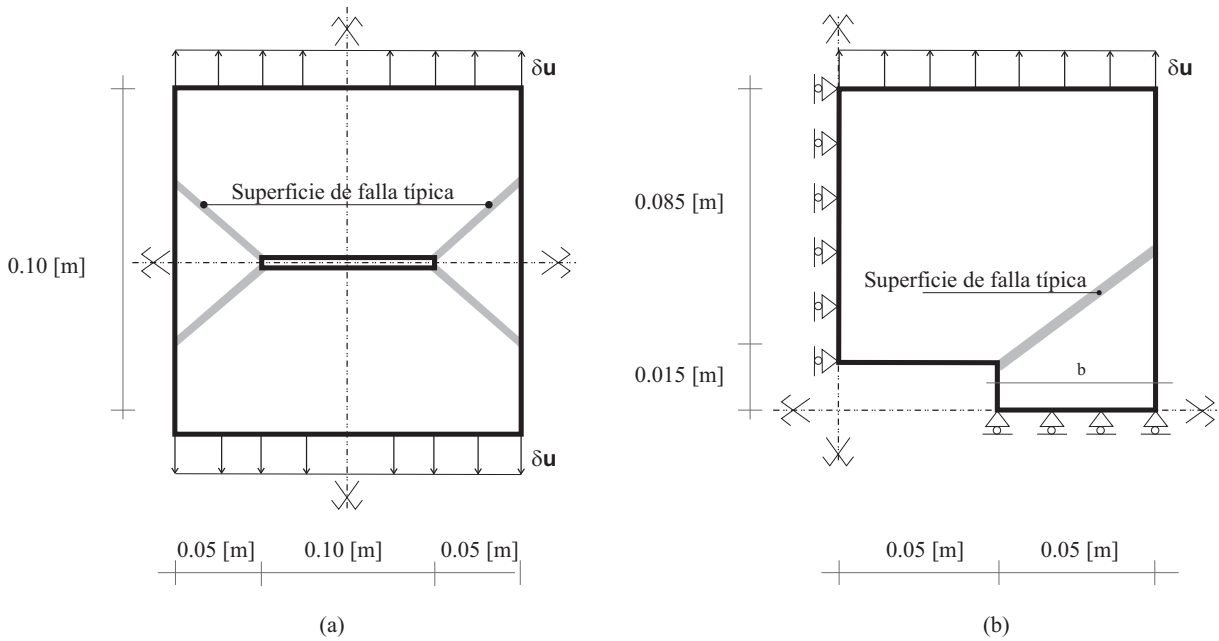


Figura 6.14: Problema de placa con entalla. Geometría y condiciones de borde: (a) Modelo físico. (b) Modelo numérico.

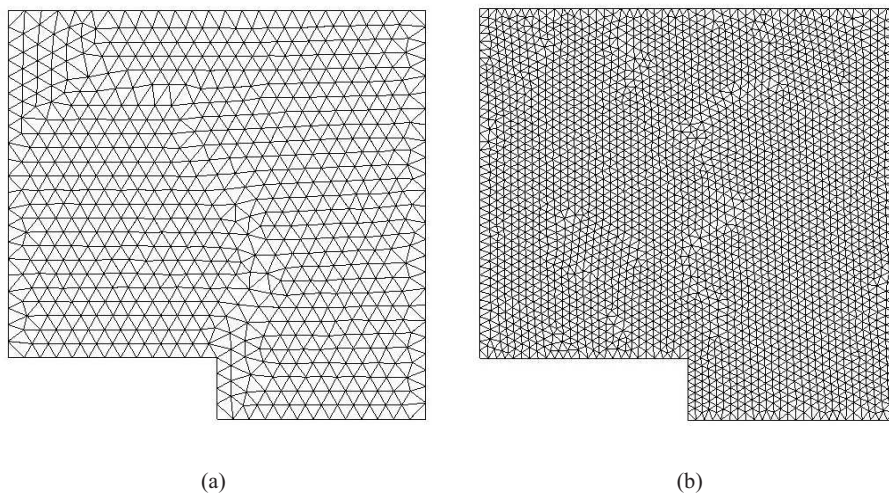


Figura 6.15: Problema de placa con entalla. Discretizaciones de elementos finitos utilizadas en la simulación: (a) Malla M1: $h_e \approx 4$ [mm], 1300 elementos. (b) Malla M2: $h_e \approx 2$ [mm], 5252 elementos.

A diferencia del ensayo numérico previo, adoptamos ahora una distribución arbitraria de elementos triangulares en cuanto a direccionalidad u orientación, como puede observarse en la figura 6.15, para las dos configuraciones de mallas M1 y M2 a utilizar.

En el caso particular de elasto plasticidad perfecta ($H = 0$) y condición de estado plano de deformación, la teoría de análisis límite plástico (*Limit Analysis Theory - LAT*) brinda una solución analítica del problema en términos de la carga máxima [KP85]:

$$P^{LAT} = \frac{4}{\sqrt{3}} b \sigma_y \quad (6.105)$$

Este valor será considerado como un límite *superior* de referencia dado que en nuestro modelo de *EF* se impone un comportamiento de *ablandamiento por deformación* ($H < 0$), con lo cual la carga pico obtenida por simulación debe ser necesariamente inferior.

Tomando ventaja de las condiciones de simetría que presenta el modelo físico sólo se modela un cuarto del panel, imponiendo las condiciones de borde necesarias para preservar el carácter simétrico en la respuesta mecánica, ver figura 6.14-(b).

Al aplicar en forma incremental el desplazamiento prescrito $\delta \mathbf{u}$ en la parte superior del modelo, se inicia un proceso irreversible de micro deslizamientos y dislocaciones plásticas en el seno del material. Este mecanismo disipativo induce finalmente, a nivel macroscópico, el desarrollo de una banda de corte y la falla de la probeta. La figura 6.16 muestra cómo el modelo *PGPSD-N* (Malla M2) reproduce este fenómeno al introducir en forma gradual una trayectoria de discontinuidad que propaga desde la zona próxima a la entalla hasta el borde opuesto, generando un modo completo de colapso. Conforme avanza el estado mecánico de sollicitación, allí se visualiza el conjunto de elementos que han alcanzado el régimen de post-bifurcación y su cinemática se enriquece para capturar tales discontinuidades en el campo de desplazamientos.

La superficie de falla también puede observarse en términos de la geometría deformada del modelo para instantes iniciales, intermedios y finales del proceso de carga, véase figura 6.17. Nótese cómo la ley cohesiva discreta actuando sobre la interface, genera un modo de deslizamiento puro, una vez alcanzado el régimen de discontinuidad fuerte.

La secuencia de elementos en carga plástica para la estrategia *PGPSD-N* se muestra en la figura 6.18. En ella se observa que inicialmente existen dos direcciones probables de localización d_1 y d_2 , sin embargo, las restricciones cinemáticas de contorno sólo hacen posible el desarrollo de una de éstas (d_1) y que se corresponde, precisamente, con el mecanismo de colapso físicamente observable.

En la figura 6.19 se presentan las curvas de equilibrio (desplazamiento vertical versus fuerza resultante P) obtenidas utilizando el modelo no simétrico propuesto (para ambas mallas M1 y M2) y también el esquema *PGP* sin modos discontinuos mejorados. En el primer caso, puede notarse una convergencia adecuada hacia la curva de respuesta de referencia (*BBARSD-N*) como así también un grado de precisión razonable con respecto a la carga límite analítica P^{LAT} (del orden de 95,5%). Debe aclararse que en este caso particular, el triángulo estándar *STDSD*, falla dramáticamente al intentar simular este test en donde la incompresibilidad predomina aun en régimen elástico.

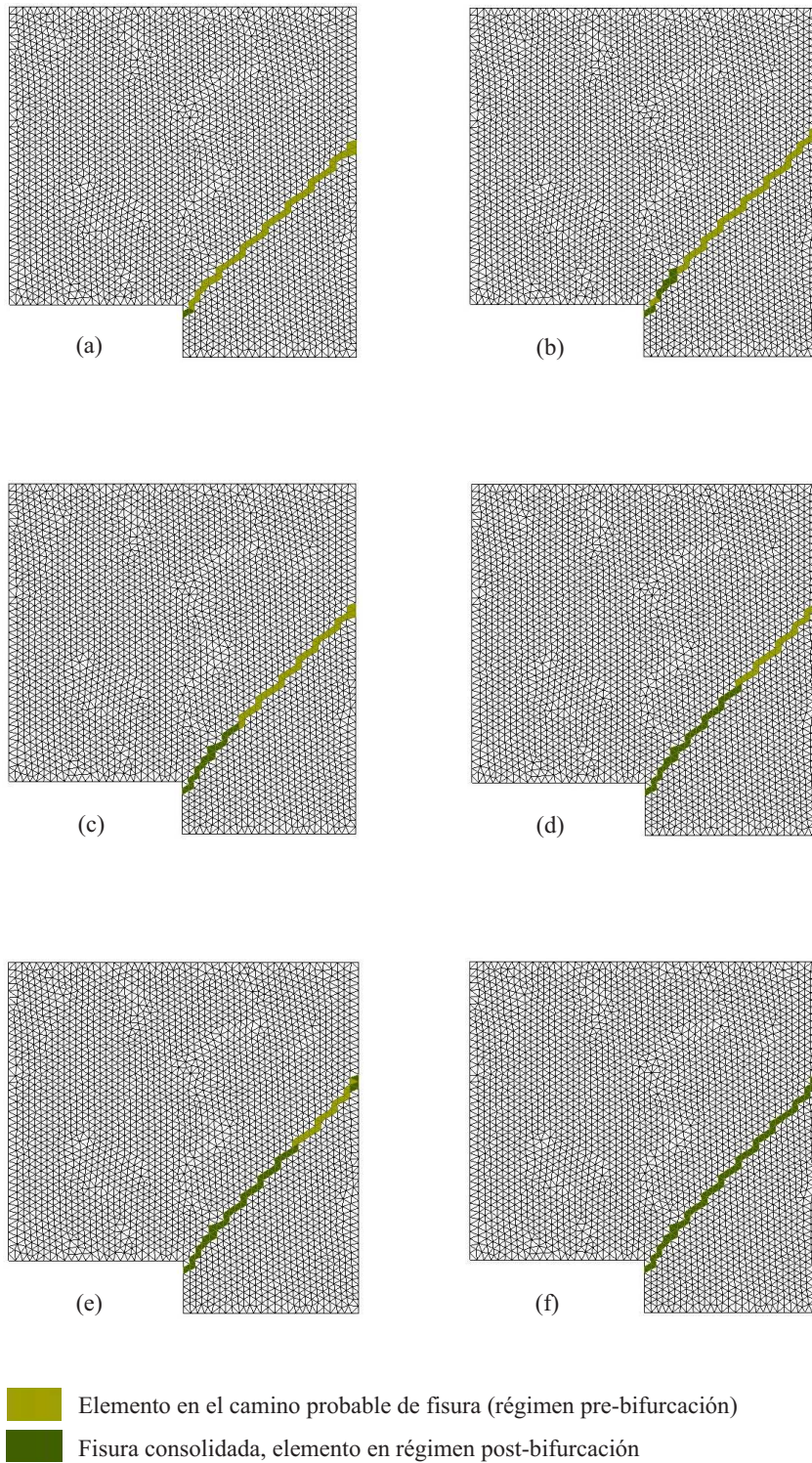


Figura 6.16: Problema de placa con entalla. Secuencia de elementos atravesados por la superficie de fallo conforme avanza el proceso de localización. Formulación $PGPSD-N$, Malla M2.

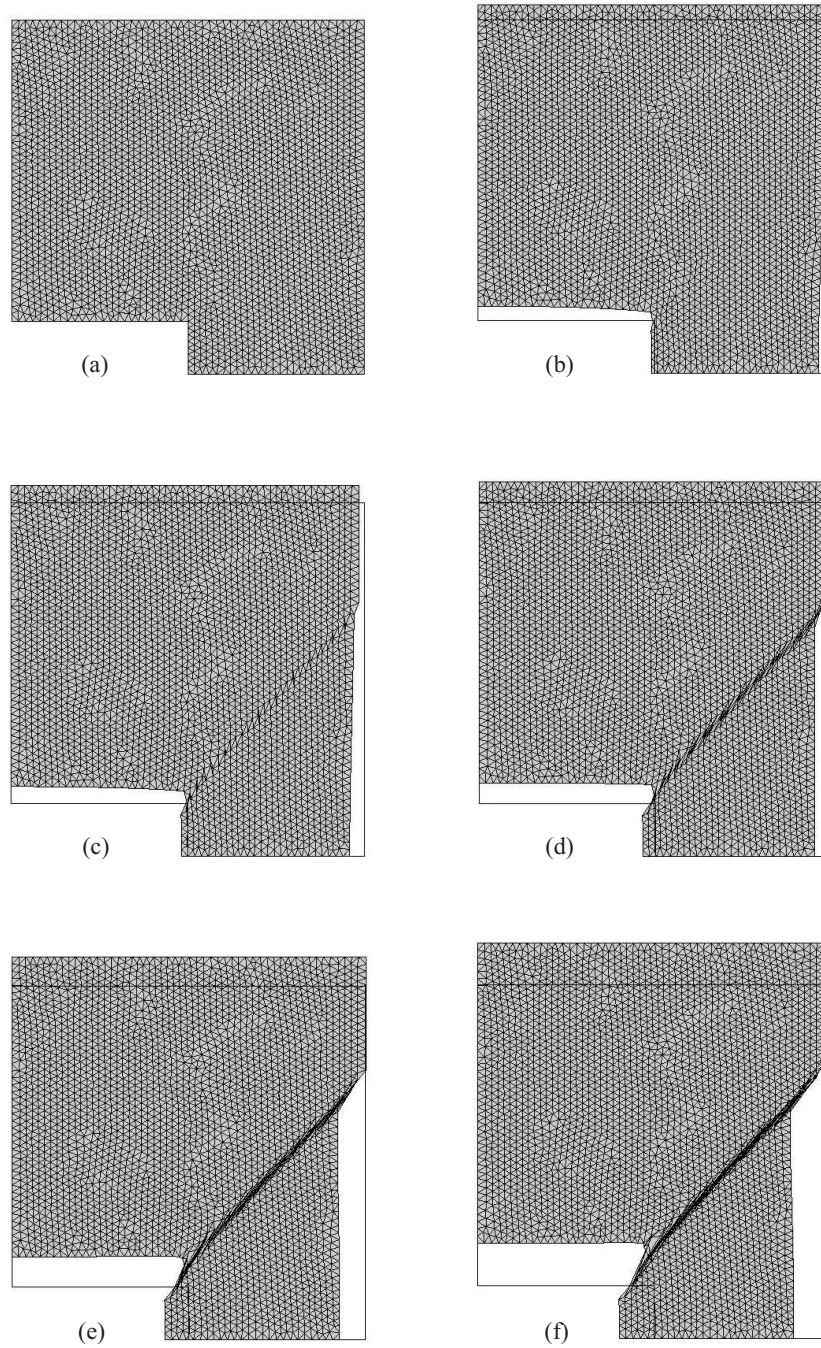


Figura 6.17: Problema de placa con entalla. Secuencia de configuraciones deformadas. Formulación $PGPSD-N$, Malla M2.

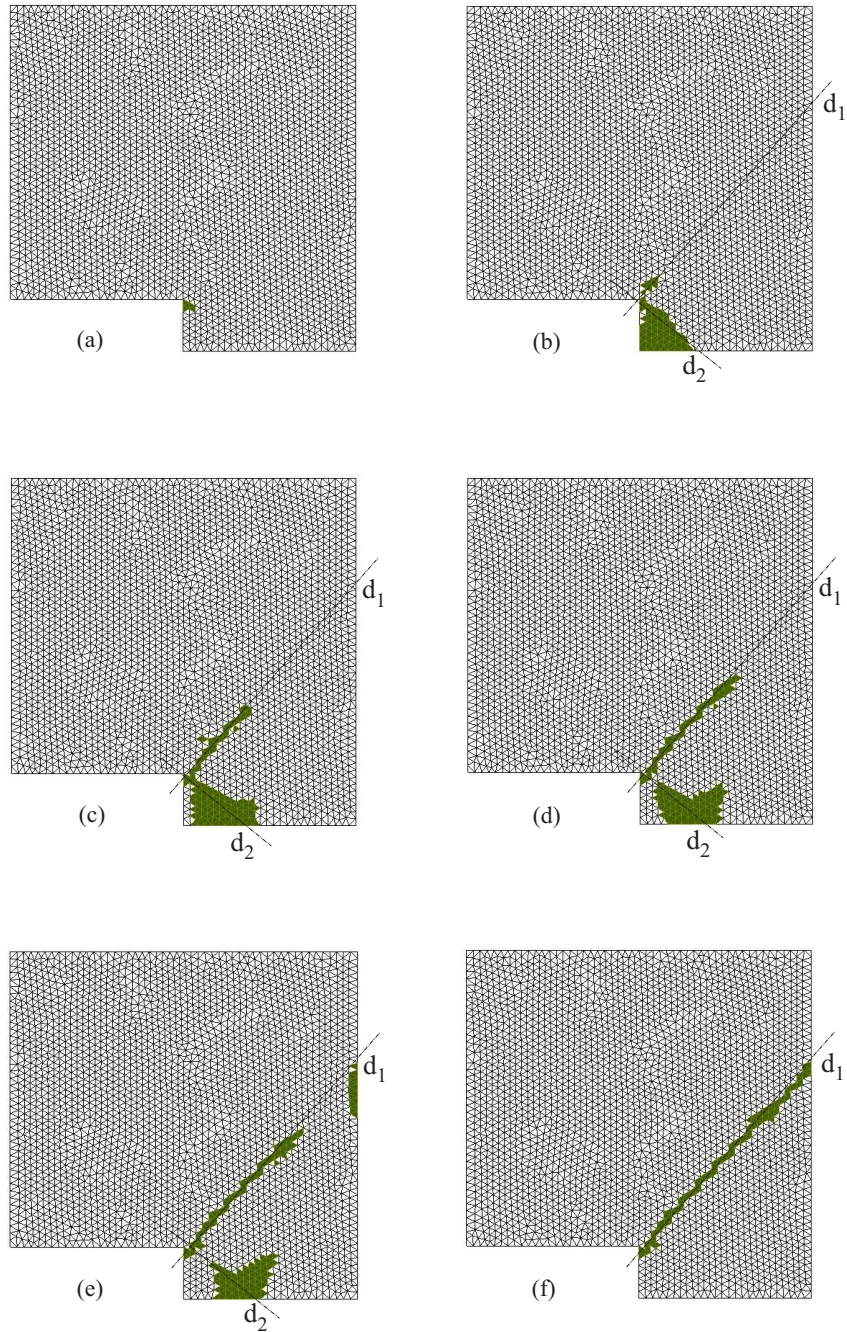


Figura 6.18: Problema de placa con entalla. Secuencia de elementos con comportamiento disipativo plástico conforme avanza el proceso de localización. Formulación $PGPSD-N$, Malla M2.

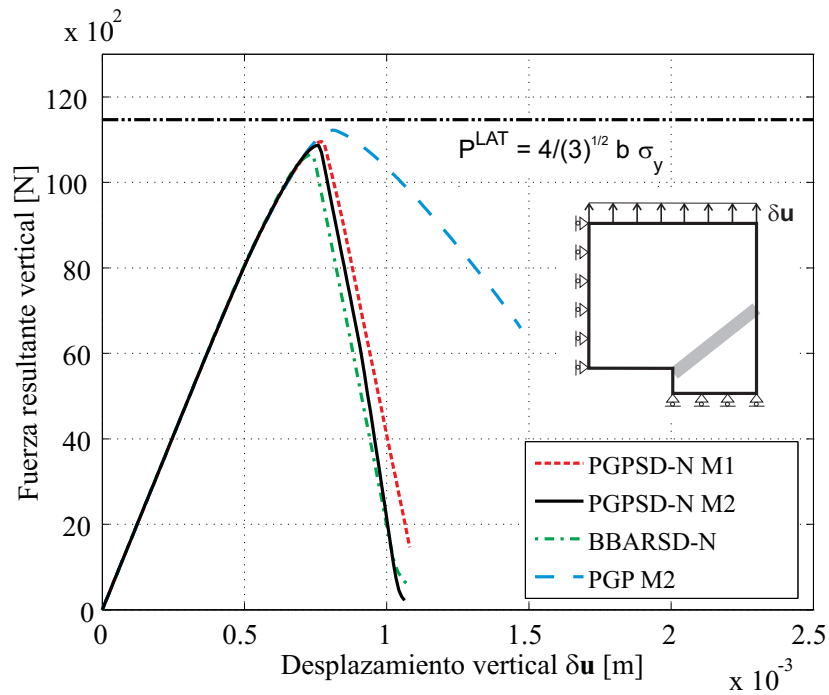


Figura 6.19: Problema de placa con entalla. Curvas de equilibrio carga versus desplazamiento para diversas formulaciones de elementos

A partir de los resultados reportados en este test numérico, nuevamente puede concluirse que, desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo, el modelo *PGPSD-N* logra capturar los ingredientes fundamentales del proceso de falla, resultando una estrategia confiable para estimar carga límite en sistemas estructurales y modos de fallo en pleno régimen de cuasi incompresibilidad, ya sea inducido por deformaciones isócoras o impuesto como restricción material.

Capítulo 7

Conclusiones

7.1. Resumen y discusión

A lo largo del presente trabajo de investigación, se ha estudiado el problema de falla en aquellos materiales que pueden caracterizarse mediante leyes constitutivas con ablandamiento por deformación. Para tal fin, se han propuesto distintas metodologías numéricas y, en particular, puede notarse una clara tendencia hacia el análisis y desarrollo de tecnologías de elementos finitos. Estas herramientas de simulación se han aplicado a problemas típicos 2D y 3D, en el contexto de fractura cuasi-frágil y falla dúctil. Seguidamente enunciamos algunas observaciones y comentarios importantes que surgen de dicho estudio.

Simulación de fractura frágil con modelos de gradientes

El modelo de daño con teoría de gradientes (implícito) de deformación, discutido en el apéndice A, resulta ser una estrategia relativamente sencilla de programar en un código estándar de elementos finitos dado que, al momento de su implementación y desde un punto de vista algorítmico, puede considerarse como un modelo local. En estos esquemas, se introduce consistentemente una longitud característica (l_c) dependiente de la microestructura material, que es necesario caracterizar adecuadamente. La dependencia del estado tensional en un punto, como función de gradientes de segundo orden en deformaciones (de alto orden en general), hace que las ecuaciones de gobierno permanezcan bien formuladas aun en presencia de ablandamiento, en el sentido de garantizar la elipticidad del modelo constitutivo (si nos referimos a un problema mecánico cuasi-estático). Esta estrategia postula la introducción de una nueva variable, que hemos denominado deformación equivalente no local $\tilde{\tau}_\varepsilon$, cuya evolución viene dada por una ecuación diferencial adicional, la cual puede ser resuelta en forma acoplada con el campo de desplazamiento, vía *MEF*. En particular, el formato implícito del modelo resulta adecuado para propósitos numéricos dado que la interpolación de $\tilde{\tau}_\varepsilon$ requiere sólo continuidad de tipo C^0 en las funciones de forma.

Desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo, los resultados obtenidos muestran un desempeño comparable con otros tipos de aproximaciones y se ajustan razonablemente bien con información experimental, fundamentalmente en la etapa donde el mecanismo inelástico dominante es la degradación material y micro fisuración. A nivel de la imple-

mentación por elementos finitos, no es necesario conocer a priori la dirección de falla, dado que la misma surge a partir de la evolución de las variables regularizadas definidas en el modelo.

Debemos, no obstante, remarcar ciertas limitaciones en la estrategia de gradientes estudiada, al menos en la presente implementación. La primera de ellas es la necesidad de una excesiva densidad de elementos en la zona de falla para obtener una respuesta estructural objetiva. En general el tamaño de los elementos debe ser inferior a la longitud característica material. Esto último representa un inconveniente importante si pretendemos modelar situaciones generales en donde no es factible estimar previamente el dominio probable de fractura. Se ha notado además que para estados avanzados de degradación, se produce un fenómeno espúreo (físicamente no admisible) de difusión de daño fuera de la zona de localización. Dicho mecanismo, de índole numérico, está asociado a una descripción cinemática limitada cuando el proceso dominante es la coalescencia de micro defectos y desarrollo de macro fisuras. Motivados por este inconveniente, algunos investigadores han propuesto soluciones de compromiso, como por ejemplo la introducción de un enriquecimiento adicional, basado en la incorporación de discontinuidades en desplazamientos cuando se satisface algún criterio motivado por la física del problema [CMP04, SS04]. Sin embargo, nuestra línea de trabajo no ha explorado esta última alternativa.

Simulación de fractura mediante *CSDA*

Mediante el uso utilización de los denominados esquemas discretos cohesivos se ha podido modelar una gran variedad de casos de propagación de fisuras. En particular hemos de enfatizar algunas ventajas propias de la aproximación por discontinuidades fuertes del continuo (*CSDA*) utilizada: (i) un único marco teórico subyacente (cinemático y constitutivo) para describir el comportamiento del continuo, para deducir las condiciones de bifurcación y para capturar los procesos de degradación y falla material cuando la misma está gobernada por la generación de discontinuidades en el medio, (ii) una cinemática compatible con saltos en el campo de desplazamiento, permitiendo simular modos de intensa deformación en forma objetiva y eficiente, (iii) la adopción de un único modelo constitutivo el cual tiene implicancia en la zona regular del sólido y que además, según el mecanismo explicado en el capítulo 3, se proyecta consistentemente en la interface de discontinuidad en forma de una ley cohesiva discreta, función de la apertura de la misma. Así mismo debe remarcar la robustez del algoritmo global utilizado para simular el mecanismo completo de falla, con ello nos referimos a las estrategias de trazado de discontinuidad, esquemas de integración, formulación optimizada de elementos finitos con modos embebidos, etc.

Basándonos en esta plataforma conceptual (*CSDA*), se ha trabajado especialmente en la aplicación a leyes constitutivas de daño isótropo y plasticidad clásica.

Simulación de fractura frágil mediante *CSDA*

En el contexto de la simulación computacional de fractura frágil se ha abordado un estudio original comparativo sobre dos tecnologías de elementos finitos con modos embebidos de deformación, aquí denominados *E-FEM* y *X-FEM*, ver capítulo 4. Este trabajo

se fundamenta en una implementación optimizada de ambos modelos de enriquecimiento, en el mismo código de *EF*, considerando elementos triangulares y tetraedros con interpolación lineal del desplazamiento regular. Las principales conclusiones de este análisis se describen a continuación:

- *ambas formulaciones convergen a la misma (única) solución*, tanto en resultados cualitativos como cuantitativos.
- considerando medidas de error relativo en términos de normas L^2 para curvas de respuesta carga-desplazamiento, *la velocidad de convergencia de ambos enriquecimientos es similar* y en general algo superior a la lineal.
- en contraposición con algunos comentarios encontrados en la literatura, nuestra observación es que *las diferencias entre los dos tipos de interpolaciones para el campo salto de desplazamiento, que postula cada esquema (lineal para X -FEM constante por elemento para el modelo E -FEM), no afectan sustancialmente la precisión en la representación de la superficie de discontinuidad ni las tasas de convergencia*. El hecho que la formulación X -FEM, a diferencia del elemento E -FEM, permite deformaciones regulares discontinuas a través de la interface \mathcal{S} , tampoco afecta en forma apreciable los resultados, ni las magnitudes de error y convergencia. Estas medidas parecen ser dependientes del grado de interpolación de los modos continuos de desplazamiento del elemento base seleccionado (lineal en este caso).
- se ha observado que, para mallas gruesas, la precisión y la suavidad en la respuesta es mayor en la estrategia E -FEM. Más específicamente, las curvas de equilibrio correspondientes al modelo X -FEM exhiben saltos más abruptos, hecho que puede estar asociado al retraso relativo en la activación de los grados de libertad de los modos enriquecidos, cuando un nuevo elemento es atravesado por la trayectoria de falla. Este efecto, que también puede observarse (aunque en menor grado) en la metodología E -FEM, disminuye con el refinamiento de malla y ha sido documentado por otros autores que utilizan el elemento X -FEM en sus simulaciones [GH05, Sim04]. En este sentido se ha reportado la incorporación de nuevos modos enriquecidos en la punta de la fisura [ZB03] que podrían, al menos parcialmente, corregir esta tendencia. Sin embargo este tipo de técnicas, aún en vías de desarrollo [LPRS05], pertenecen a un escalón más alto de sofisticación que no hemos considerado en el presente análisis comparativo, *para ninguno de los dos modelos*.
- *el costo computacional relativo es, en todos los casos, favorable al enriquecimiento E -FEM*. Para el modelado de problemas que involucran una única fisura, X -FEM es 1,10-1,20 (en 2D) y 1,30-2,50 (en 3D) veces más costoso que E -FEM. El factor relativo más bajo se corresponde a las mallas refinadas. Las razones de esta pérdida de eficiencia en el modelo X -FEM están asociadas a: (i) la activación de grados de libertad adicionales (no condensables) que se traducen en un incremento de la cantidad de ecuaciones por resolver y (ii) la necesidad de utilizar cuadraturas de alto orden. Estos valores, no obstante, deben tomarse como una tendencia ya que pueden ser modificados por implementaciones alternativas. Los mismos corresponden a la implementación más eficiente, a conocimiento del autor, tras un esfuerzo importante de programación, en un código de elementos finitos razonablemente bien validado.

- cuando se aborda la simulación de múltiples superficies de falla, *el costo computacional asociado a la tecnología E-FEM permanece prácticamente constante aun para un número creciente de fisuras activas*. Por el contrario, *para el elemento X-FEM, el tiempo de CPU se incrementa linealmente conforme se introducen nuevas discontinuidades en el análisis*. En el caso 3D considerado, se ha estimado un aumento de aproximadamente 20 %, respecto al costo total, por cada fisura adicional.
- hemos de dejar en claro que, en un futuro, ambos modelos podrían (potencialmente) reformularse y/o mejorarse, tanto desde el punto de vista conceptual como algorítmico. En ese caso deberá proponerse un estudio similar al reportado en esta tesis, que contemple tales escenarios alternativos de comparación.

Una mención especial merece el esquema de integración constitutiva utilizado en la resolución de estos problemas, aquí denominado *método implícito-explicito* [OHBL05, OHP⁺04b]. Este procedimiento, como se mencionó, asegura que la matriz de rigidez consistente se mantenga siempre definida positiva, incluso en presencia de ablandamiento, hecho que se torna de crucial importancia para evitar inconvenientes de mal condicionamiento del sistema. Además, el jacobiano es constante con lo cual, la convergencia se logra en una única iteración por paso de tiempo. Debe notarse que en todas las simulaciones se ha podido sobrepasar la carga crítica hasta alcanzar una completa degradación de la capacidad portante estructural. La utilización de este método significó un gran avance, fundamentalmente en la simulación numérica de problemas 3D, tanto desde el punto de vista de la robustez como del costo computacional. El error extra que se introduce puede minimizarse acortando suficientemente el paso de tiempo. Para tal fin, es posible además plantear estrategias automáticas de control las cuales siguen dos caminos: (i) en el paso actual mediante algoritmos adecuados de tipo arc-length y (ii) una estimación a priori del error de tal manera que el mismo se mantenga acotado en el paso siguiente, proponiendo para ello un escalamiento consistente de la longitud del paso.

Según nuestra experiencia y en lo concerniente al modelado de problemas de fractura cuasi-frágil, una adecuada conjunción de tecnologías eficientes de elementos finitos (como por ejemplo *E-FEM*), juntamente con algoritmos robustos de integración constitutiva, y estrategias confiables de trazado de discontinuidad, permite en la actualidad abordar el cómputo de problemas tridimensionales dominados por el desarrollo de numerosas fisuras, en un ordenador personal y a costo de procesamiento razonable, los cuales hasta hace muy poco tiempo eran impensables. Más aún, ya es posible encarar los primeros estudios de sensibilidad paramétrica que nos brinden estimaciones precisas de la probabilidad de falla en estructuras complejas, véase apéndice D.

Simulación de falla dúctil mediante *CSDA*

La mecánica de falla dúctil fue otro de los tópicos al cual se le ha dedicado especial esfuerzo y atención en esta tesis, abordando su estudio (una vez más) mediante la aproximación por discontinuidades fuertes de continuo. En este sentido hemos desarrollado una nueva tecnología de elementos finitos, denominada *PGPSD*. Como particular atractivo,

este modelo está orientado a la obtención de triángulos y tetraedros de bajo orden (lineales). Este hecho no sólo representa una ventaja importante desde el punto de vista de generación de mallas sino también desde la robustez que aportan los elementos simples, condición esta última, altamente apreciable en problemas de localización y falla.

La estrategia numérica propuesta postula la utilización de un esquema mixto estabilizado (denominado por practicidad *PGP*) ideado para aliviar restricciones de incompresibilidad material inducidas por leyes de tipo J_2 , el cual se formula en marco teórico subyacente de la *CSDA*.

El desarrollo de este modelo contempla en un principio la evaluación rigurosa de la técnica de estabilización en sí misma, para situaciones donde la condición de conservación volumétrica se torna crítica, tal es el caso de problemas de localización de deformaciones y desarrollo de mecanismos de falla en régimen de ablandamiento, véase capítulo 5. Las observaciones asociadas al desempeño del esquema *PGP*, se mencionan seguidamente:

- tomando en consideración ciertas hipótesis simplificadoras en el planteamiento teórico, la introducción del término estabilizante τ^{PGP} en las ecuaciones de equilibrio puede deducirse a partir de una formulación variacional basada en el concepto de sub-escalas (en particular sub-escalas ortogonales), véase anexo B.
- posee buen desempeño numérico en problemas gobernados por campos de deformaciones isocóricas dominantes (elasticidad incompresible y/o plasticidad de Von Mises).
- la velocidad de convergencia en las variables primales (desplazamiento-presión) no se ve sustancialmente afectada por el régimen cuasi-incompresible presente, como sí sucede en los esquemas mixtos de bajo orden sin estabilización.
- el comportamiento cuantitativo es comparable con otro esquema alternativo de estabilización (*PSPG*) reconocido y ampliamente utilizado por la comunidad científica.
- la forma simplificada (desacoplada) para resolver el campo de gradiente de presión proyectado (*II*), resulta una estrategia eficiente, conservando calidad en los resultados.
- en el modelado de problemas que involucran localización de deformaciones, especialmente cuando ésta es inducida por ablandamiento material, se ha observado cierta dependencia con la orientación de la malla, hecho que atenta desfavorablemente al momento de simular mecanismos de falla en forma objetiva.

Haciendo uso de la estrategia *PGP*, es posible lograr una mejora importante en el comportamiento de los elementos. Sin embargo ésta es sólo parcial dado que, para nuestros propósitos, existen aún limitaciones cinemáticas que inducen falta de objetividad en la respuesta. Con la intención de soslayar esta falencia, hemos desarrollado la formulación *PGPSD*. El capítulo 6 está íntegramente dedicado a tal fin. Allí presentamos el modelo matemático, las hipótesis introducidas, el correspondiente análisis en régimen de discontinuidad fuerte y los tópicos relacionados con su implementación computacional. Además se ha deducido la forma lineal exacta que toma la matriz de rigidez del problema mecánico no lineal, para la solución vía un procedimiento clásico Newton-Raphson. Un

aspecto interesante, también introducido, es la interpretación del modelo en un contexto de multi-escalas.

Este nuevo elemento goza de ciertas características favorables, las cuales se detallan a continuación:

- posee buen comportamiento en la fase pre-bifurcación dado que la estrategia de estabilización mantiene estable la evolución de la presión.
- posee buen comportamiento en la fase post-bifurcación dado que se activa una cinemática enriquecida con modos discontinuos embebidos, permitiendo una descripción realista del mecanismo de falla típico de banda de corte.
- los dos puntos anteriores hacen que el elemento tenga la habilidad de representar en forma adecuada el fenómeno de localización de deformaciones, propagación de discontinuidades en el medio y posterior modo de colapso estructural.
- en régimen de discontinuidad fuerte, la ley cohesiva proyectada sobre la interface de falla se corresponde a un modo de deslizamiento puro.
- la precisión del esquema *PGPSD* resulta comparable con otra estrategia de uso aceptado, basada en una tecnología de cuadrángulos de tipo *BBAR*, tanto en la predicción de la carga última como en el comportamiento post-crítico. No obstante, debe mencionarse la ventaja adicional de trabajar con elementos símplices de bajo orden.
- también se ha reportado buena concordancia en relación a una solución analítica en carga límite.
- mediante un análisis de convergencia en normas L^2 se ha demostrado que: (i) el elemento *PGPSD* posee mayor precisión y velocidad de convergencia que el triángulo estándar con discontinuidades fuertes embebidas y (ii) la solución predicha mediante la formulación propuesta, tanto en carga última como en trayectorias de equilibrio (carga-desplazamiento), converge hacia la obtenida con la estrategia *BBAR*.

Como contrapartida, el esfuerzo computacional relativo para los problemas bidimensionales estudiados, es (en promedio) aproximadamente un 35 % más costoso con respecto al cuadrángulo *BBAR*. No obstante, consideramos esta relación aceptable en función de las demás ventajas que introduce el modelo.

7.2. Aportes originales

Considerando lo expuesto anteriormente, las contribuciones originales de esta tesis pueden resumirse en la siguiente lista:

- formulación e implementación de una familia de modelos de daño escalar con teoría de gradientes (implícito) de deformación, [[SSH03](#)].

- desarrollo de algoritmos e implementación computacional optimizada de la tecnología *X-FEM* en el contexto de la aproximación por discontinuidades fuertes del continuo.
- estudio comparativo profundo entre los dos tipos de enriquecimiento cinemático con discontinuidades fuertes de vanguardia (*E-FEM* y *X-FEM*) tendiente a cuantificar la performance relativa de ambas formulaciones. Este análisis brinda información valiosa en cuanto a tópicos de especial importancia en la mecánica de falla, como ser: robustez, precisión, medidas de error relativo, convergencia, velocidad de convergencia, costo computacional, [OHS, SOHS05].
- aplicaciones a problemas 3D y de multi fisuración en fractura cuasi frágil. En especial se destacan las primeras aportaciones relativas al estudio de sensibilidad paramétrica material en estructuras complejas, para la posterior estimación precisa de la probabilidad de falla, [PPL+05].
- estudio crítico del desempeño numérico de un esquema mixto estabilizado (*PGP*) direccionado para medir su comportamiento en problemas de localización de deformaciones en plasticidad. Dentro de este punto debe mencionarse además como aspecto novedoso, la implementación y evaluación de dicha metodología en un entorno de cálculo paralelo. Así mismo, otro aporte original es la aplicación de un nuevo preconditionador (*ISP*), al momento de resolver (iterativamente) el sistema lineal mediante descomposición de dominios, en la estrategia estabilizada, [SSH04b, SHS04].
- planteamiento teórico, desarrollo matemático, implementación y validación de una nueva familia de elementos finitos, denominada (*PGPSD*), para el modelado de mecanismos de tipo banda de corte en plasticidad, [SSHO06, SSH04a].

7.3. Posibles líneas de investigación a futuro

No existe en la actualidad un criterio racional que permita decidir cual es la estrategia que marcará el rumbo definitivo en la mecánica computacional de falla. Por ello estamos convencidos que aún existe un extenso camino por recorrer. Sin embargo, a partir de la experiencia obtenida durante el desarrollo de esta tesis, podemos vislumbrar algunas posibles alternativas de trabajo futuro basadas en las metodologías aquí discutidas. En líneas generales se puede plantear:

- aplicación de la *CSDA* a modelos constitutivos de continuo más elaborados, analizando su correspondiente proyección sobre la interface de discontinuidad, para capturar con mayor nivel de aproximación la degradación y el modo de falla en materiales de comportamiento complejo, materiales compuestos, etc.
- extensión de las estrategias discutidas al contexto de la *Dinámica de Fractura*. En los últimos años, se ha notado un creciente interés hacia el desarrollo de esta promisoriosa línea de trabajo, fundado probablemente en su potencial aplicación industrial.

- análisis de las propiedades de estabilidad y nuevos desarrollos en relación al método de integración *implícito-explicito*. Resulta de especial interés proseguir con la formulación de algoritmos de control automático del error.

Así mismo, debemos enfatizar y reconocer que, a diferencia de los modelos para fractura frágil, aún existen limitaciones en cuanto al desarrollo de estrategias eficientes para simular falla dúctil y por lo tanto, se estima una mayor dedicación en el futuro próximo hacia este objetivo puntual. Posibles aspectos a tener en cuenta son:

- extensión del modelo *PGPSD* en el contexto general de grandes deformaciones plásticas.
- extensión del modelo *PGPSD* a tres dimensiones. A pesar de haber considerado sólo problemas planos, el presente trabajo contiene el fundamento conceptual y numérico para su aplicación a problemas 3D.
- generalización de la aproximación *PGPSD* para ecuaciones constitutivas capaces de incorporar modos mixtos de falla y no sólo de tipo deslizamiento, como se postula en esta tesis.
- extensión del método de integración *implícito-explicito* en mecánica de falla dúctil.
- es nuestro criterio que el modelado de ciertos fenómenos típicos de fractura dúctil no pueden ser alcanzados sólo con la utilización de modelos macroscópicos de fisura discreta cohesiva. Una opción viable es el planteamiento en multi-escalas, en el siguiente sentido: *(i)* las propiedades mecánicas de la ley cohesiva se derivan a partir de una *meso-escala*, considerando los mecanismos de deslizamiento en diferentes planos cristalinos y dislocaciones para caracterizar la plasticidad a ese nivel, en conjunción con *(ii)* un análisis estructural a nivel *macro-escala*, como por ejemplo el presentado en esta tesis, caracterizado por ecuaciones constitutivas fenomenológicas clásicas, tecnologías de elementos finitos enriquecidos, etc. Esta metodología representa un verdadero desafío en el contexto de la simulación computacional de falla.

Apéndice A

Modelo de daño con teoría de gradientes implícito

Se estudia en este anexo una clase particular de modelos constitutivos de daño con *teoría de gradientes* y su aplicación al modelado de materiales cuasi frágiles, [SSH03]. En este sentido, seguimos una formulación *implícita de gradientes*, la cual conserva en forma estricta la no localidad del problema [PGdBB01]. Se analiza además el desempeño de tal estrategia en dos ejemplos clásicos. Presentamos resultados en forma de curvas carga-desplazamiento y mapas de evolución de daño, comparando los mismos con soluciones numéricas alternativas y experimentales.

A.1. Introducción

La mecánica del continuo clásica o local introduce un conjunto de variables de estado capaces de describir explícitamente los procesos inelásticos responsables de la degradación. En este contexto, el modelado de la fractura material utiliza la mecánica de daño continuo como teoría subyacente, en la cual se introduce una variable auxiliar en la ecuación constitutiva, el daño, para representar el deterioro local de resistencia. Desde este punto de vista, la iniciación, crecimiento y propagación de una fisura surge entonces como un proceso natural a partir de la evolución de tal variable de daño hasta que su valor se torna crítico, donde se asume que el material es incapaz de soportar cualquier incremento de tensión.

No obstante, diversos estudios de estabilidad y bifurcación, muestran que la estrategia de daño local presenta severas inconsistencias para modelos con ablandamiento. Como se mencionó en el capítulo 2, una opción viable para mantener la buena postura del problema matemático es recurrir a generalizaciones de la mecánica del continuo estándar. Existen numerosas formulaciones que siguen esta filosofía. Los esquemas no locales pueden mencionarse como uno de los más populares [PCB87, BPC88, BL88]. En ellos deja de considerarse el principio de acción local, en consecuencia las variables en un punto material \boldsymbol{x} dependen de valores en un entorno del mismo. Para poder cuantificar tales variables (mecánicas o cinemáticas) se apela a integrales ponderadas dependientes de un parámetro de longitud interna l_c . En general, en la estimación de l_c , se consideran factores dependientes de heterogeneidades a nivel micro estructural.

Los esquemas de gradientes [Aif84b, PdBBdV96, dBM92], que en particular nos interesan, se basan en una idea similar, pero el argumento para introducir una longitud característica es distinto. En estos modelos, se utilizan gradientes de alto orden de las variables para reproducir la dependencia espacial (*no localidad*) y regularizar de esta forma la evolución de los mecanismos irreversibles.

Desde un punto de vista conceptual, la relación constitutiva para cada tipo de formulación, puede interpretarse mediante las expresiones siguientes:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{R}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})) \quad (\text{modelo local estándar}) \quad (\text{A.1})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{R}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \tilde{r}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \quad (\text{modelo no local}) \quad (\text{A.2})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{R}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \nabla \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), r(\mathbf{x}), \nabla r(\mathbf{x})) \quad (\text{modelo de gradientes}) \quad (\text{A.3})$$

en función del tensor de deformación ($\boldsymbol{\varepsilon}$) y variables internas (r), además hemos considerado que $(\tilde{\bullet})$ implica carácter no local en una variable arbitraria (\bullet) y $\boldsymbol{\xi}$ es cierto dominio alrededor del punto material \mathbf{x} en donde es posible ponderar las variables para incorporar la no localidad (ver figura A.1).

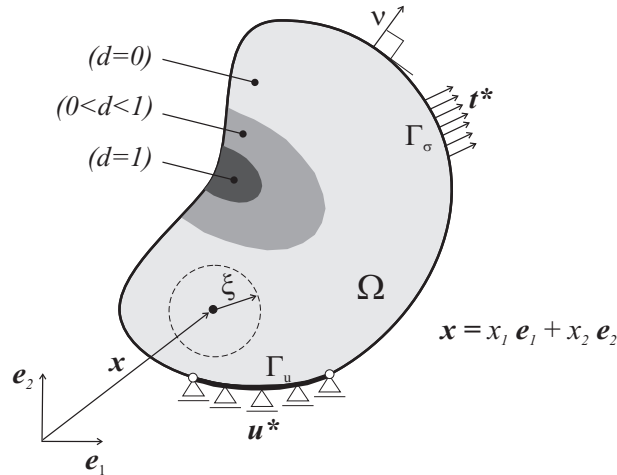


Figura A.1: Idealización del proceso de degradación material en términos de la variable de daño: $d \in [0, 1]$. Dominio de promediación $\boldsymbol{\xi}$ para incorporar no localidad

El objetivo de este anexo es caracterizar el comportamiento constitutivo de materiales frágiles con ablandamiento, considerando procesos de degradación por daño hasta alcanzar la fractura, haciendo uso de un modelo de continuo enriquecido. En esta línea de trabajo se ha implementado una formulación implícita de gradientes para modelos de daño con ablandamiento lineal y exponencial, siguiendo los trabajos de Borst et al. [dBM92], Peerlings et al. [PdBBdV96, PGdBB01, PdBBG02]. El esquema propuesto se valida numéricamente para dos problemas típicos. El primero de ellos corresponde al test de estiramiento uniaxial de una barra en estado plano de deformación, el segundo representa el problema de flexión de una viga apoyada en tres puntos bajo hipótesis de tensión plana.

A.2. Modelo de daño regularizado

Para no agregar complejidad, se utiliza la ley de daño escalar descrita en el capítulo 2 (sección 2.5) como marco de referencia teórico para los desarrollos siguientes. Su aplicación queda restringida entonces a problemas en los cuales pueden asumirse las siguientes hipótesis básicas: (i) las deformaciones plásticas son despreciables (comportamiento frágil), (ii) la evolución del daño es el mecanismo disipativo dominante, (iii) no se induce anisotropía material, (iv) deformaciones infinitesimales hasta alcanzar la fractura. Según este modelo, una única variable escalar $d \in [0; 1]$ es suficiente para describir completamente el proceso de degradación: $d = 0$ representa propiedades del sólido en estado virgen, $d = 1$ caracteriza la pérdida completa de integridad material, véase figura A.1. Recordamos que la función de degradación (ϕ) viene dada en términos de una medida de deformación *local*, la cual hemos denominado deformación equivalente (τ_ε), y su valor se computa mediante:

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon : \mathbf{C}^e : \varepsilon} \quad (\text{A.4})$$

La idea que incorporamos a continuación es una simple modificación a dicho criterio de daño, al postular que el mismo depende ahora de una variable interna con implicancia *no local*, $\tilde{\tau}_\varepsilon$, aún por definir. Esta hipótesis es precisamente la regularización que se introduce a nivel constitutivo para evitar que la localización de deformaciones y disipación de energía se produzca en un dominio de medida cero, como sí sucede en los modelos locales clásicos bajo régimen de ablandamiento.

Considerando las ecuaciones de equilibrio de Cauchy, el problema regularizado, en su forma fuerte, puede plantearse como sigue: dado $\mathbf{t}^* : \Gamma_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $\mathbf{u}^* : \Gamma_u \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ (fuerzas prescritas por unidad de superficie y desplazamientos impuestos respectivamente) encontrar el campo vectorial $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ tal que se verifique simultáneamente:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (a) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u & \quad (b) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{t}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma & \quad (c) \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\nabla \mathbf{u})^{sym} & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (d) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathfrak{R}(\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\tau}_\varepsilon) & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (e) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Observación 34 *se han despreciado las fuerzas de volumen en el planteo de las ecuaciones de balance.*

Las expresiones que definen la ley constitutiva de daño regularizado A.5-(e) se han resumido, por practicidad, en el cuadro A.1.

Allí puede observarse que la variable interna r está gobernada por la deformación equivalente no local $\tilde{\tau}_\varepsilon$. Mientras $\phi(\tilde{\tau}_\varepsilon, r) = \tilde{\tau}_\varepsilon - r < 0$ el material se comporta elásticamente y no hay evolución de los procesos disipativos. La condición $\phi(\tilde{\tau}_\varepsilon, r) = \tilde{\tau}_\varepsilon - r = 0$ determina trivialmente el valor de la variable $r = \tilde{\tau}_\varepsilon$, cuando el estado tensional ha superado el umbral de daño. Teniendo en cuenta el valor inicial $r_0 = r|_{t=0} = q_0 = q|_{t=0} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}}$ se tiene:

$$r = \text{máx}\{\tilde{\tau}_\varepsilon, r_0\} \quad (\text{A.11})$$

Relación tensión-deformación

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{q(r)}{r} \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} = (1 - d(r)) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.6})$$

Criterio de degradación

$$\phi(\tilde{\tau}_\varepsilon, r) = \tilde{\tau}_\varepsilon - r \leq 0 \quad (\text{A.7})$$

Ley de endurecimiento/ablandamiento

$$\dot{r} = \gamma \quad ; \quad r_0 = r|_{t=0} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{q} = H(r) \dot{r} \quad ; \quad q_0 = q|_{t=0} = r_0 \quad (\text{A.9})$$

Condiciones complementarias de carga-descarga

$$\phi(\tilde{\tau}_\varepsilon, r) \leq 0 \quad ; \quad \gamma \geq 0 \quad ; \quad \gamma \phi(\tilde{\tau}_\varepsilon, r) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Cuadro A.1: Ecuaciones básicas del modelo de daño escalar regularizado en términos una medida de deformación equivalente no local $\tilde{\tau}_\varepsilon$.

Si se incorpora una definición adecuada para $\tilde{\tau}_\varepsilon$ y se adopta además un mecanismo de ablandamiento dependiente del tipo de material (ecuación A.9), pueden evaluarse todas las variables del modelo con lo cual el sistema de ecuaciones A.5 queda íntegramente formulado.

A.3. Formulación del modelo con teoría de gradientes implícito

Las formulaciones de gradientes pueden deducirse a partir de teorías no locales. Para demostrar esto asumimos, como se discutió antes, que la evolución del daño en un punto \mathbf{x} está gobernada la medida $\tilde{\tau}_\varepsilon$ de la deformación, aquí denominada *deformación equivalente no local*. En este trabajo hemos considerado que $\tilde{\tau}_\varepsilon$ se define como el promedio ponderado de la deformación equivalente *local*, τ_ε , en un entorno de dicho punto:

$$\tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\Psi(\mathbf{x})} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tau_\varepsilon(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{1}{\Psi(\mathbf{x})} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 1 \quad (\text{A.13})$$

donde $\boldsymbol{\xi}$ es un vector con origen en el punto \mathbf{x} que denota una bola alrededor del mismo, ver figura A.1, $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ es una función de peso adecuada asociada a la longitud interna micro estructural l_c y $\Psi(\mathbf{x})$ una magnitud necesaria para propósitos de normalización.

Si se desarrolla la deformación equivalente local, $\tau_\varepsilon(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})$, en serie de Taylor y en un entorno de \mathbf{x} :

$$\tau_\varepsilon(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) = \tau_\varepsilon(\mathbf{x}) + [\nabla\tau_\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2!} [\nabla\nabla\tau_\varepsilon(\mathbf{x})] : (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}) + \mathcal{O}(\boldsymbol{\xi}^3) \quad (\text{A.14})$$

y se reemplaza esta última ecuación en la expresión integral A.12, asumiendo condiciones de isotropía y despreciando términos de orden superior ($\mathcal{O}(\boldsymbol{\xi}^3)$), se llega a la clásica formulación explícita de gradientes:

$$\tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \tau_\varepsilon(\mathbf{x}) + c \nabla^2 \tau_\varepsilon(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{A.15})$$

Puede observarse que el parámetro de longitud interna material l_c , presente en el modelo no local, se preserva en el esquema de gradientes a través del coeficiente c , el cual posee en este caso, unidades de longitud al cuadrado. Tal coeficiente queda determinado por el promedio de las funciones de ponderación $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ en el volumen que genera $\boldsymbol{\xi}$.

Los modelos de gradientes asumen que $\tilde{\tau}_\varepsilon$ puede considerarse como una variable independiente adicional a resolver junto con el campo de desplazamientos. En este contexto, el tipo de aproximación que sugiere la ecuación A.15 para el cómputo de $\tilde{\tau}_\varepsilon$ resulta, sin embargo, inadecuada para implementaciones numéricas vía *MEF* ya que la presencia del operador laplaciano sobre la deformación equivalente local requiere funciones de interpolación con continuidad C^1 para el campo de desplazamiento. Esta desventaja puede salvarse mediante simples manipulaciones matemáticas, para finalmente obtener la forma implícita del modelo de gradientes [PdBBdV96]:

$$\tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x}) - c \nabla^2 \tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \tau_\varepsilon(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{A.16})$$

Considerando $\tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x})$ como una variable nodal independiente, que debe satisfacer la ecuación A.16, sólo se necesita continuidad C^0 para su aproximación. Desde el punto de vista matemático la ecuación diferencial extra de segundo orden, presente en el modelo de gradientes implícito, requiere la definición de condiciones de contorno sobre la variable $\tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x})$ o su derivada normal, para obtener unicidad de solución. Siguiendo los trabajos de Belytschko [LB88], Mühlhaus y Aifantis [MA91], se adopta una condición de borde natural del tipo:

$$\nabla \tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (\text{A.17})$$

Cabe mencionar que aún no se dispone de una justificación teórica estricta ni una correcta interpretación física sobre tales condiciones de contorno adicionales.

En vista de los conceptos discutidos, la forma fuerte del problema de daño con teoría de gradientes implícito se describe como: conocido $\mathbf{t}^* : \Gamma_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $\mathbf{u}^* : \Gamma_u \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$, encontrar el campo vectorial $\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y el campo escalar $\tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ compatibles con el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (a) \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{u}} & \quad (b) \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{t}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} & \quad (c) \\
\boldsymbol{\varepsilon} &= (\nabla \mathbf{u})^{sym} & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (d) \\
\boldsymbol{\sigma} &= \mathfrak{R}(\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (e) \\
\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}} & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (f) \\
\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) - c \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\varepsilon}} & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (g) \\
\nabla \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu} &= 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma & \quad (h)
\end{aligned} \tag{A.18}$$

A.4. Implementación numérica

A.4.1. Discretización espacial

Siguiendo la metodología estándar del *MEF*, la forma variacional (débil) y discreta del modelo puede entonces expresarse: dado $\mathbf{t}^* : \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $\mathbf{u}^* : \Gamma_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$, hallar el campo $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h$ (que satisfaga las condiciones de contorno cinemáticas A.18-(b)) y el campo $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^h \in \Theta^h$, tal que:

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}} (\mathbf{w}^h \cdot \mathbf{t}^*) d\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_0^h \tag{A.19}$$

$$\int_{\Omega} (\eta^h \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^h) d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \eta^h \cdot c \nabla \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^h) d\Omega = \int_{\Omega} (\eta^h \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^h) d\Omega \quad \forall \eta^h \in \Theta_0^h \tag{A.20}$$

donde $\mathcal{V}_0^h \subset H_0^1(\Omega)$, $\Theta_0^h \subset H_0^1(\Omega)$, además \mathbf{w}^h y η^h son variaciones en el campo de desplazamiento y deformación equivalente no local respectivamente.

Observación 35 *el segundo término integral del lado izquierdo en la ecuación A.20 surge de debilitar $(-c \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}})$ y considerar la condición de borde natural supuesta sobre $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (expresión A.18-(h))*

Si se utiliza nomenclatura matricial y se integra el modelo constitutivo mediante un esquema implícito, haciendo uso de un procedimiento de ensamble a nivel elemental, se obtiene la versión algorítmica de las ecuaciones para el paso de tiempo actual $(i + 1)$:

$$\sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_{\mathbf{u}}^{eT} \boldsymbol{\sigma}^{(i+1)}) d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}^e} (\mathbf{N}_{\mathbf{u}}^{eT} \mathbf{t}^{*(i+1)}) d\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}^e = \mathbf{0} \tag{A.21}$$

$$\underbrace{\sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^{eT} \mathbf{N}_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^e + \mathbf{B}_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^{eT} c \mathbf{B}_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^e) d\Omega^e}_{M_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} + D_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i+1)} - \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^{eT} \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i+1)}) d\Omega^e = \mathbf{0} \tag{A.22}$$

siendo \mathbf{N}_u^e y $\mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^e$ los arreglos de funciones de forma para interpolar \mathbf{u} y $\tilde{\tau}_\epsilon$ respectivamente; el símbolo $(\hat{\bullet})$ representa valores nodales de una variable, en este caso $\hat{\tau}_\epsilon^{(i+1)}$ es el vector de parámetros nodales de la deformación equivalente no local, el supraíndice e hace referencia a un elemento finito en particular. En A.21-A.22 definimos también los siguientes operadores: $\mathbf{B}_u^e = (\nabla \mathbf{N}_u^e)^{sym}$ y $\mathbf{B}_{\tilde{\tau}}^e = (\nabla \mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^e)$.

Observación 36 *por claridad en la lectura, se ha quitado el supraíndice h que hace referencia a campos discretos.*

En forma compacta, el residuo $\mathbf{R}_{(\mathbf{u}, \tilde{\tau}_\epsilon)}^{(i+1)}$ del sistema de ecuaciones A.21-A.22 puede expresarse:

$$\mathbf{R}_{(\mathbf{u}, \tilde{\tau}_\epsilon)}^{(i+1)} = \mathbf{F}_{(\mathbf{u}, \tilde{\tau}_\epsilon)}^{(int)(i+1)} - \mathbf{F}^{(ext)(i+1)} = \mathbf{0} \quad (\text{A.23})$$

en función del vector de fuerzas internas generalizada $\mathbf{F}_{(\mathbf{u}, \tilde{\tau}_\epsilon)}^{(int)}$:

$$\mathbf{F}_{(\mathbf{u}, \tilde{\tau}_\epsilon)}^{(int)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{(int)} \\ \mathbf{F}_{\tilde{\tau}_\epsilon}^{(int)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_u^{eT} \boldsymbol{\sigma}^{(i+1)}) d\Omega^e \right] \\ (\mathbf{M}_{\tilde{\tau}} + \mathbf{D}_{\tilde{\tau}}) \hat{\tau}_\epsilon^{(i+1)} - \sum_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^{eT} \tau_\epsilon^{(i+1)}) d\Omega^e \right] \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

y el de fuerzas externas $\mathbf{F}^{(ext)}$:

$$\mathbf{F}^{(ext)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{(ext)} \\ \mathbf{F}_{\tilde{\tau}_\epsilon}^{(ext)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Gamma_\sigma^e} (\mathbf{N}_u^{eT} \mathbf{t}^{*(i+1)}) d\Gamma_\sigma^e \right] \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

A.4.2. Retorno a la superficie de daño

La actualización del tensor de tensiones y el cálculo del operador tangente consistente se realiza siguiendo un esquema de Euler retrasado. En este contexto, el algoritmo de retorno a la superficie de daño puede formularse según el procedimiento que se resume en el cuadro A.2.

A.4.3. Módulo tangente algorítmico

Para la implementación del modelo en un esquema iterativo de Newton-Raphson, es necesario calcular la linealización exacta del esquema constitutivo. En este sentido la primera variación de la expresión de equilibrio y de la ecuación adicional de gradientes se plantea:

$$\delta \mathbf{F}_u^{(int)(i+1)} = \mathbf{K}_{uu} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(i+1)} + \mathbf{K}_{u\tilde{\tau}} \delta \hat{\tau}_\epsilon^{(i+1)} \quad (\text{A.26})$$

$$\delta \mathbf{F}_{\tilde{\tau}}^{(int)(i+1)} = \mathbf{K}_{\tilde{\tau}u} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(i+1)} + \mathbf{K}_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} \delta \hat{\tau}_\epsilon^{(i+1)} \quad (\text{A.27})$$

Proyección elástica: Estado Trial	
$r_{trial}^{(i+1)} = r^{(i)} \quad ; \quad q_{trial}^{(i+1)} = q^{(i)} \quad ; \quad d_{trial}^{(i+1)} = d^{(i)}$	
$\phi_{trial}^{(i+1)} = \tilde{\tau}_{\varepsilon}^{(i+1)} - r^{(i)}$	
$\bar{\sigma}^{(i+1)} = \mathbf{C}^e : \varepsilon^{(i+1)} \quad ; \quad \tau_{\varepsilon}^{(i+1)} = \sqrt{\varepsilon : \mathbf{C}^e : \varepsilon}$	
si $\phi_{trial}^{(i+1)} \leq 0$ (paso elástico)	
$r^{(i+1)} = r^{(i)} \quad ; \quad q^{(i+1)} = q^{(i)} \quad ; \quad d^{(i+1)} = d^{(i)} \quad ; \quad \beta_1^{(i+1)} = 0$	
$\beta_2 = \frac{q^{(i+1)}}{r^{(i+1)}} \quad ; \quad \sigma^{(i+1)} = \beta_2 \bar{\sigma}^{(i+1)}$	
si $\phi_{trial}^{(i+1)} > 0$ (paso con evolución de daño)	
$r^{(i+1)} = \tilde{\tau}_{\varepsilon}^{(i+1)} \quad ; \quad \beta_1^{(i+1)} = 1$	
Ablandamiento Lineal	Ablandamiento exponencial
$q^{(i+1)} = q^{(i)} + H \Delta r$	$q^{(i+1)} = q_0 e^{\frac{H_0 [r^{(i+1)} - r_0]}{q_0}}$
$\beta_2^{(i+1)} = \frac{q^{(i+1)}}{r^{(i+1)}} \quad ; \quad \sigma^{(i+1)} = \beta_2 \bar{\sigma}^{(i+1)}$	$\beta_2^{(i+1)} = \frac{q^{(i+1)}}{r^{(i+1)}} \quad ; \quad \sigma^{(i+1)} = \beta_2 \bar{\sigma}^{(i+1)}$
$\beta_3^{(i+1)} = \frac{H_0 r^{(i+1)} - q^{(i+1)}}{[r^{(i+1)}]^2}$	$\beta_3^{(i+1)} = -\frac{q^{(i+1)}}{[r^{(i+1)}]^2} \left[-\frac{H_0 r^{(i+1)}}{q_0} + 1 \right]$

Cuadro A.2: Algoritmo de retorno a la superficie de daño para la formulación con gradientes implícito.

en donde se define:

$$\mathbf{K}_{uu} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^{eT} \beta_2^{(i+1)} \mathbf{C}^e \mathbf{B}_u^e d\Omega^e \right] \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{K}_{u\tilde{\tau}} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^{eT} \beta_1^{(i+1)} \beta_3^{(i+1)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} \mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^e d\Omega^e \right] \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{\tau}u} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \frac{1}{\tau_{\varepsilon}^{(i+1)}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^{eT} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)T} \mathbf{B}_u^e d\Omega^e \right] \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_{\tilde{\tau}}^{eT} c \mathbf{B}_{\tilde{\tau}}^e + \mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^{eT} \mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^e) d\Omega^e \right] = \mathbf{D}_{\tilde{\tau}} + \mathbf{M}_{\tilde{\tau}} \quad (\text{A.31})$$

La forma explícita del tensor constitutivo algorítmico resulta en consecuencia:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\tilde{\tau}} \\ \mathbf{K}_{\tilde{\tau}u} & \mathbf{K}_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

A.5. Resultados numéricos

Para los dos ejemplos reportados, se consideran elementos triangulares y cuadrangulares con interpolación cuadrática en desplazamientos y lineal en deformación equivalente no local.

A.5.1. Test de tracción

El problema consiste en estirar uniaxialmente una barra, bajo hipótesis de estado plano de deformación, hasta que el proceso de degradación por daño produzca la falla material. Los parámetros geométricos y mecánicos utilizados para la simulación numérica son (ver figura A.2): longitud de la barra $L = 100$ [mm], área $A = 10$ [mm²] (por unidad de longitud), tensión última $\sigma_y = 2$ [N/mm²], módulo de Young $E = 20000$ [N/mm²], ablandamiento lineal caracterizado por un módulo $H_0 = -0,008 = cte$ (disipación mecánica máxima $D_{mech} = 0,0125$ [N/mm²]).

Para activar el mecanismo de localización se perturba la región central de la barra en una longitud $l_p = 10$ [mm] en donde la tensión última se reduce un 10%. El parámetro longitud intrínseca micro estructural l_c está representado por un coeficiente $c = 1$ [mm²]. Por condiciones de simetría sólo se modela la mitad de la barra. En la figura A.3 se han dibujado curvas carga desplazamiento para distintos niveles de discretización (160, 320, 640 elementos cuadrangulares). Estos resultados concuerdan con los obtenidos por Peerlings et al. [PdBBdV96] y claramente muestran convergencia a una solución con energía de fractura finita, conforme se refina la malla.

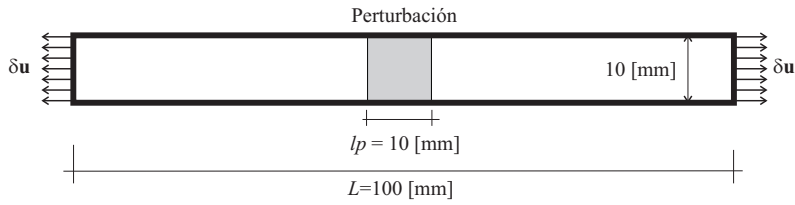


Figura A.2: Test de tracción uniaxial. Geometría del modelo.

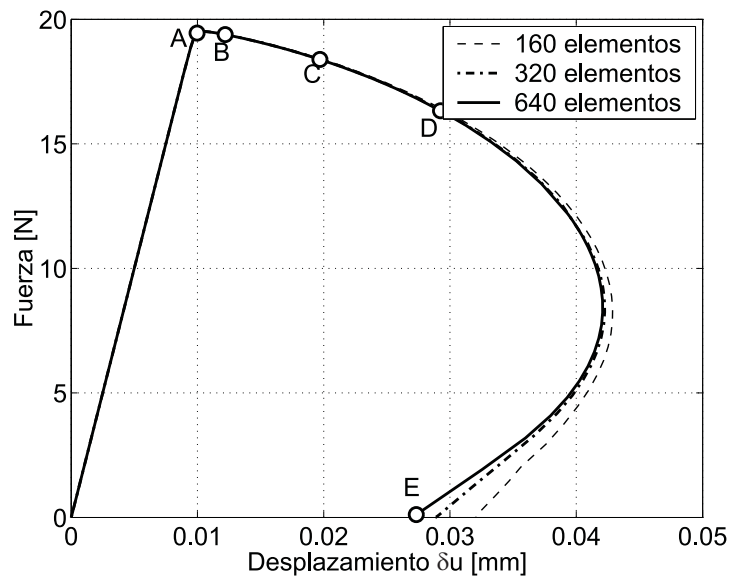


Figura A.3: Test de tracción uniaxial. Ley de ablandamiento lineal. Curva carga desplazamiento para distintas mallas.

La evolución de la variable interna de daño (d) y la deformación equivalente no local ($\tilde{\tau}_e$), sobre distintos puntos en la curva de equilibrio, puede observarse en la figura A.4, en la semi longitudud de la barra (test de 640 elementos).

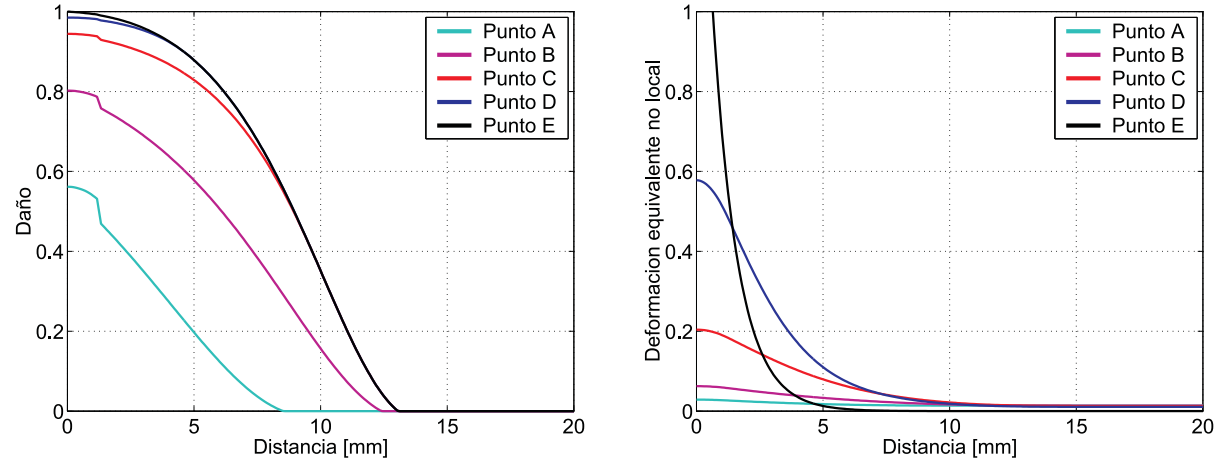


Figura A.4: Test de tracción uniaxial. Ley de ablandamiento lineal. Curvas de evolución: (a) Variable de daño d . (b) Deformación equivalente no local $\tilde{\tau}_e$

Para este problema particular, la formulación de gradientes tiene la capacidad de capturar adecuadamente el proceso de incremento de deformación en la zona de localización y descarga elástica fuera de la misma.

A continuación asumimos la misma barra con idénticas características geométricas pero en este caso con un mecanismo de ablandamiento de tipo exponencial con un módulo inicial $H_0 = -0,016$. La curva de respuesta fuerza desplazamiento es significativamente diferente (ver figura A.5-(a)) respondiendo al tipo de ley impuesta.

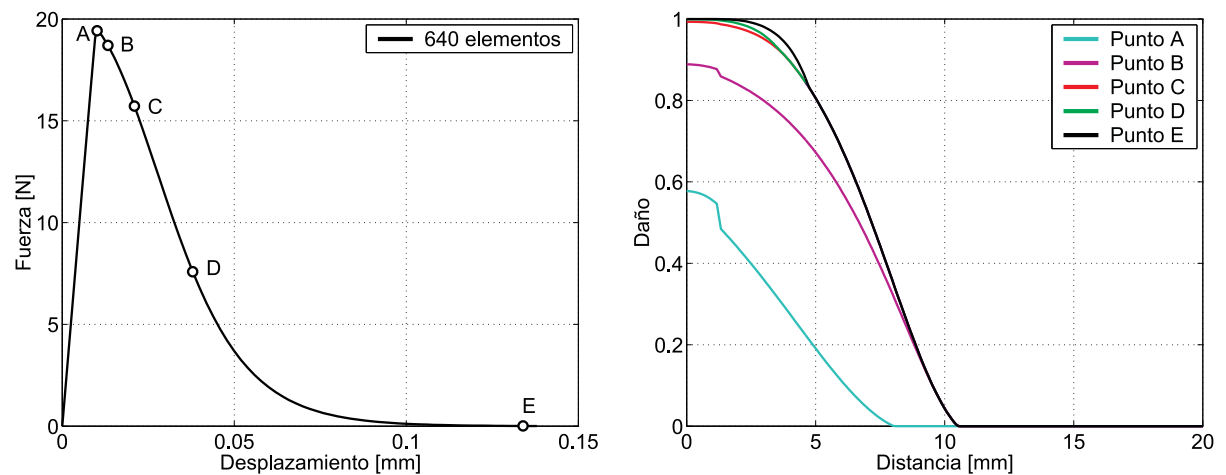


Figura A.5: Test de tracción uniaxial. Ley de ablandamiento exponencial: (a) Curva de respuesta carga desplazamiento. (b) Curva de evolución de la variable de daño.

La figura A.5-(b) revela una falencia propia de la formulación. Como se observa, la curva de daño correspondiente al punto C ha alcanzado su valor máximo, sin embargo

a partir de ese momento incrementos de deformación producen un fenómeno de difusión del daño desde el centro hacia los extremos de la barra. Este mecanismo, físicamente inadmisibles, es consecuencia de una pobre descripción cinemática incapaz de capturar macro fisuras cuando la degradación material es completa. En estas circunstancias, la inclusión de una discontinuidad en desplazamientos parece ser una estrategia adecuada capaz de incorporar una condición de borde libre de tensiones y evitar el proceso de difusión espúreo del daño [SWS03].

A.5.2. Viga de tres puntos

Este ejemplo representa un test clásico de flexión en una viga sometida a fuerzas en tres puntos. El ensayo está especialmente diseñado para fomentar el modo I de fractura. El mismo consiste en una pieza de hormigón simplemente apoyada a la cual se le impone un desplazamiento vertical monótonamente creciente (δu) en correspondencia con una entalla practicada en la sección central de la viga, induciendo la iniciación del proceso de degradación y posterior desarrollo de fisura. Las proporciones geométricas del modelo pueden observarse en la figura A.6. Los parámetros mecánicos utilizados para el análisis son los siguientes: $E = 300000 [kg/cm^2]$, $\nu = 0,20$, $\sigma_y = 33 [kg/cm^2]$, $e = 5 [cm]$ (espesor de la viga). Desde el punto de vista constitutivo, el material se caracterizó teniendo en cuenta varios aspectos: un coeficiente $c = 0,01 [cm^2]$ (de acuerdo con los trabajos de M.G.D. Geers et al. [GdBP00]), un modelo de daño exponencial modificado para que la degradación se produzca sólo en tracción (ver capítulo 2, sección 2.6), y un módulo de ablandamiento por deformación $H_0 = -0,026$, estimado de forma tal que se verifique la energía de fractura correspondiente al material en estudio (aproximadamente $G_f = 0,120 [kg/cm]$).

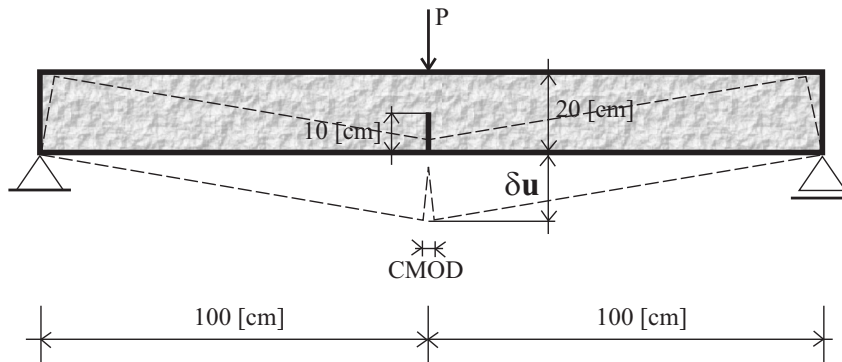


Figura A.6: Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Geometría y condiciones de contorno del modelo.

La curva de respuesta obtenida, en términos de la carga P y desplazamiento de apertura $CMOD$ (*Crack Mouth Opening Displacement*), se ajusta bastante bien a resultados experimentales y es comparable con otro tipo de aproximación basada en un modelo de discontinuidades fuertes como el discutido en el cuerpo de esta tesis (ver figura A.7).

En la figura A.8 puede observarse un detalle de la discretización en la zona próxima a la entalla y la posición deformada para el máximo desplazamiento impuesto. Un total de 2770 elementos triangulares se han utilizado para la simulación numérica.

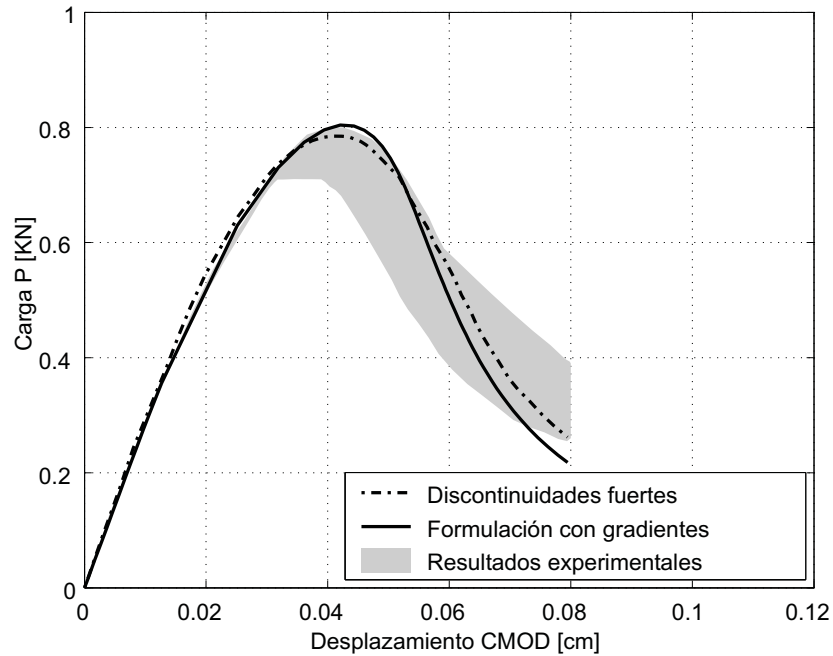


Figura A.7: Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Carga P vs. Desplazamiento $CMOD$. Comparación de respuesta entre dos formulaciones alternativas y una envolvente experimental.

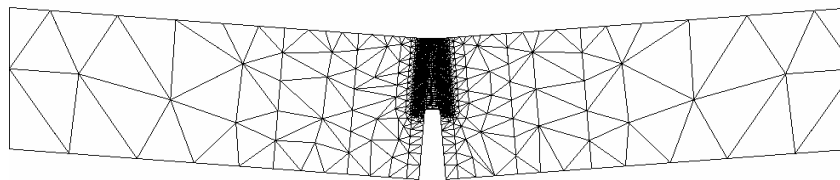


Figura A.8: Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Malla de elementos finitos utilizada en la configuración deformada (≈ 2770 elementos).

La figura A.9 pone de manifiesto la capacidad de la formulación para predecir modos de propagación de fisura en función de la evolución de la variable interna de daño.

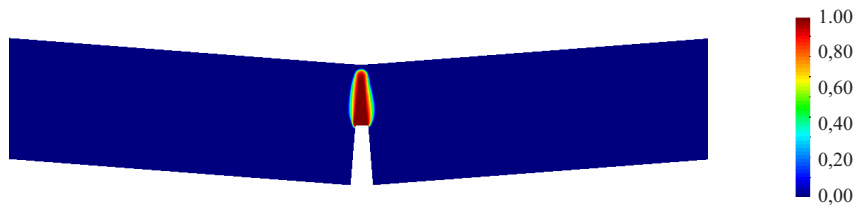


Figura A.9: Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Mapa de la variable de daño d para un estado avanzado de degradación.

A.6. Discusión

En este anexo se ha estudiado e implementado un modelo constitutivo de daño isotrópico con ablandamiento lineal y exponencial enriquecido con una formulación de gradientes implícita para simular numéricamente el comportamiento de materiales frágiles.

En vista de los resultados obtenidos puede decirse que el esquema resulta adecuado como limitador de localización, evita la pérdida de elipticidad en la ecuación de equilibrio incremental, predice modos de iniciación y propagación de fisura físicamente correctos; además, para un adecuado nivel de discretización (en general muy elevado), se obtiene objetividad en la respuesta. El valor de la carga límite y el comportamiento post-pico pueden ajustarse bastante bien a resultados experimentales en función de los parámetros que gobiernan el modelo.

Un aspecto importante a destacar es que la dirección de propagación de fisura surge en forma natural, a partir de la evolución de la variable de daño. Este hecho representa una ventaja frente a las clásicas formulaciones cohesivas discretas basadas en elementos con modos embebidos, en las cuales es necesario estimar a priori tal trayectoria de propagación.

Debe mencionarse la necesidad de una densidad de elementos importante para capturar en forma objetiva los gradientes de deformación durante el proceso de falla, hecho que se traduce en un costo computacional excesivo. En este aspecto debemos dejar en claro que desde el punto de vista de la eficiencia computacional y a partir del presente estudio, nuestra conclusión es que el modelo de gradientes desarrollado no puede competir con formulaciones de tipo discontinuidades fuertes, a igual nivel de precisión en resultados. Además, en problemas generales, dado que la trayectoria de discontinuidad no se conoce a priori, si se pretende ganar performance numérica se debe contemplar la posibilidad de acoplar algún esquema de remallado adaptativo.

Cuando la variable de degradación alcanza el valor unitario en algún punto del sólido, hemos notado un fenómeno de difusión espúrea del daño, evidenciada principalmente por el modelo con ablandamiento exponencial. Este fenómeno (ya reportado por otros investigadores) no tiene justificación física y, como consecuencia secundaria, restringe severamente la posibilidad avanzar sobre la curva de equilibrio, condición indispensable para modelar estructuras reales, en donde es común que durante la generación del mecanismo de falla, una porción del dominio se encuentre completamente sin resistencia.

En síntesis del presente análisis concluimos que la mecánica del continuo enriquecida con formulaciones de gradientes representa una estrategia adecuada para simular los procesos inelásticos en donde el mecanismo predominante es la degradación material y la micro fisuración asociada. Cuando tales micro-fisuras coalescen y originan macro fisuras la cinemática subyacente del continuo resulta demasiado limitada para capturar la realidad física. Este inconveniente sugiere la necesidad de introducir de forma explícita en el modelo numérico una discontinuidad. Algunos investigadores ya han insinuado la incorporación de una cinemática discontinua en medios regularizados [SWS03, SS04, CMP04], resultando en una línea de investigación factible.

Apéndice B

Estabilización mediante sub-escalas ortogonales

En este apartado se pretende deducir el término de estabilización del esquema *PGP* (\mathcal{S}_{st}^{PGP}) en el contexto teórico del método de las sub escalas o multi escalas (*sub-grid scales*) brindando una justificación conceptual y variacionalmente consistente de la técnica de estabilización introducida. La idea original de esta estrategia fue inicialmente propuesta por Hughes [Hug95] para resolver ecuaciones escalares del tipo convección-difusión.

B.1. Método de sub escalas

Resolver un problema por el método de elementos finitos consiste en encontrar dentro de un espacio de dimensión finita $\mathcal{V}^h \subset H^1_{(\Omega)}$ la mejor aproximación a la solución matemática del modelo continuo. Dicho espacio discreto \mathcal{V}^h queda definido en términos de la cantidad de grados de libertad adoptado y del orden de interpolación de los elementos. Esto implica que, una vez seleccionados estos dos ingredientes básicos del *MEF* (discretización y tipo de función de interpolación), queda definido un nivel de aproximación o *escala*, que se denominará de aquí en adelante la escala de elementos finitos \mathbb{E}^h , capaz de capturar una parte de la solución real. En muchos problemas prácticos, la escala \mathbb{E}^h dispone suficiente cantidad de información de tal forma que el modelo formulado sólo en términos de ésta brinda resultados satisfactorios. Por el contrario, en otras situaciones \mathbb{E}^h resulta sobre restringida, ante ciertas características particulares cinemáticas del continuo, siendo imposible representar el comportamiento físicamente observable del material.

En este sentido, la idea subyacente que introduce el método de las sub escalas consiste en incorporar explícitamente una nueva escala al problema \mathbb{E}^s (sub escala) para aproximar aquella fracción de la solución que no pertenece a \mathbb{E}^h y por ende no se puede capturar por un modelo simple de elementos finitos. En otras palabras, se asume la existencia de una componente no resuelta y por ello se enriquece el espacio discreto de aproximación para al menos lograr capturar los efectos de \mathbb{E}^s sobre la escala que sí se resuelve numéricamente. Esta metodología es absolutamente general y de hecho se la ha utilizado en diferentes contextos en la mecánica del continuo (problemas de restricción por incompresibilidad, localización de deformaciones, etc).

Para nuestro caso en particular, es bien sabido que al utilizar formulaciones mixtas con

igual orden de interpolación en las variables primales (\mathbf{u}, p) , el espacio de aproximación del campo de desplazamientos resulta demasiado limitado comparado con el de presiones, obteniéndose como consecuencia final resultados numéricos oscilatorios. Una alternativa lógica podría ser la introducción de una sub escala adicional en el campo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Se asume entonces que el campo de desplazamientos del continuo tiene dos componentes, una asociada a la escala discreta \mathbb{E}^h (gruesa) y la otra vinculada a la sub escala \mathbb{E}^s (fina). Luego para que la estrategia numérica capture en forma adecuada el comportamiento real, se hace necesario aproximar consistentemente \mathbb{E}^h y \mathbb{E}^s . La escala gruesa \mathbb{E}^h puede resolverse mediante interpolación estándar de elementos finitos, sin embargo no resulta tan evidente como aproximar \mathbb{E}^s . De hecho en la practica nos conformamos con proponer un espacio para \mathbb{E}^s (aquí referenciado como \mathcal{V}^s) que al menos incluya localmente (a nivel de cada elemento finito) los *efectos* de la escala fina en la solución. En este apartado se introducen las hipótesis y simplificaciones básicas adoptadas para tal fin.

A partir de estas ideas surge que el espacio en donde ha de buscarse la solución al problema tiene la forma:

$$\mathcal{V} \approx \mathcal{V}^h \oplus \mathcal{V}_0^s \quad (\text{B.1})$$

teniendo en cuenta que la sub escala no aporta enriquecimiento en la frontera Γ , de allí la simbología \mathcal{V}_0^s . En la expresión anterior se ha considerado:

$$\mathcal{V}^h \subset H_{(\Omega)}^1 ; \mathcal{V}^h : \text{espacio discreto estándar de } EF \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{V}_0^s \subset \Psi ; \mathcal{V}_0^s : \text{espacio discreto de la sub escala} \quad (\text{B.3})$$

donde Ψ^1 es un espacio, aún por definir, pensado para incorporar la fracción de la solución que no está incluida en $H_{(\Omega)}^1$.

El campo de desplazamientos se aproxima entonces considerando dos componentes:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^h + \mathbf{u}^s \quad (\text{B.4})$$

definiendo:

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V} ; \mathbf{u} : \text{campo de desplazamiento discreto total} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h ; \mathbf{u}^h : \text{componente asociada a la escala gruesa } \mathbb{E}^h \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{u}^s \in \mathcal{V}_0^s ; \mathbf{u}^s : \text{componente asociada a la escala fina } \mathbb{E}^s, \mathbf{u}^s|_{(\mathbf{x} \in \Gamma)} = \mathbf{0} \quad (\text{B.7})$$

Con el mismo razonamiento, se construyen las variaciones admisibles de \mathbf{u} de la forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^h + \mathbf{w}^s \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{w} \in \mathcal{V}_0 ; \mathbf{w} : \text{variación admisible de desplazamiento} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_0^h ; \mathbf{w}^h : \text{variación admisible en } \mathbb{E}^h, \mathbf{w}^h|_{(\mathbf{x} \in \Gamma_u)} = \mathbf{0} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^s ; \mathbf{w}^s : \text{variación admisible en } \mathbb{E}^s, \mathbf{w}^s|_{(\mathbf{x} \in \Gamma)} = \mathbf{0} \quad (\text{B.11})$$

¹Como se demuestra en este anexo, la elección de Ψ será consistente con el criterio siguiente: $\Psi \perp H_{(\Omega)}^1$

donde como es natural se tiene además:

$$\mathcal{V}_0 \approx \mathcal{V}_0^h \oplus \mathcal{V}_0^s \quad (\text{B.12})$$

Los conceptos discutidos hasta el momento se representan gráficamente en la figura B.1. Allí se observa la curva de respuesta del modelo parametrizada en función del tiempo $t \in [0, T]$, y en particular el vector solución $\mathbf{u}(t)$ en un instante dado de la historia de carga, en el espacio ampliado $\mathcal{V} = \mathcal{V}^h \oplus \mathcal{V}_0^s$.

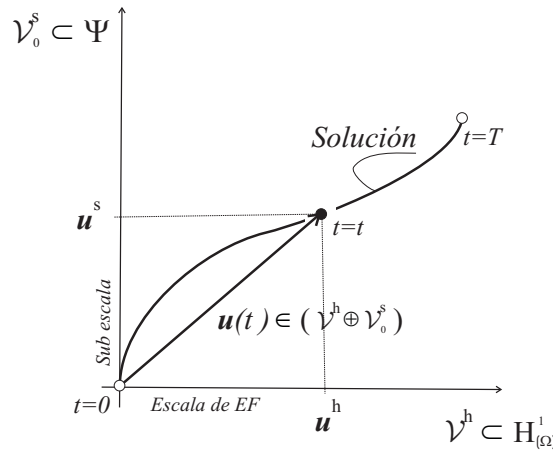


Figura B.1: Representación esquemática del método de sub escalas en el espacio $\mathcal{V}^h - \mathcal{V}_0^s$

Observación 37 *se puede advertir que, en este contexto de análisis, no se considera enriquecimiento alguno para el campo de presiones, pero en teoría podría también incorporarse.*

La versión integral del problema mecánico mixto 5.8, considerando la introducción de la sub escala \mathbb{E}^s puede plantearse en un formato variacional clásico como sigue: encontrar los campos discretos $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h$, $\mathbf{u}^s \in \mathcal{V}_0^s$ y $p^h \in \mathcal{Q}^h$ tal que se satisfaga:

$$\langle \mathbf{w}^h ; \nabla \cdot [-p^h \mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{u}^h + \mathbf{u}^s)] \rangle + \langle \mathbf{w}^h ; \mathbf{b} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_0^h \quad (\text{B.13})$$

$$\langle \mathbf{w}^s ; \nabla \cdot [-p^h \mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{u}^h + \mathbf{u}^s)] \rangle + \langle \mathbf{w}^s ; \mathbf{b} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^s \quad (\text{B.14})$$

$$\langle q^h ; \frac{p^h}{\kappa} + \nabla \cdot (\mathbf{u}^h + \mathbf{u}^s) \rangle = 0 \quad \forall q^h \in \mathcal{Q}^h \quad (\text{B.15})$$

observándose que las ecuaciones B.13 y B.15 están definidas en el espacio de elementos finitos, mientras que B.14 en el de la sub escala.

Una primera hipótesis a introducir es que el tensor desviador de tensiones puede escribirse como la suma de dos componentes: una inducida sólo por la escala \mathbb{E}^h y la otra sólo inducida por la sub escala \mathbb{E}^s , estando ambas desacopladas:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}^h + \mathbf{u}^s) \approx \mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) + \mathbf{S}^s(\mathbf{u}^s) \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) = 2\mu \text{dev}[(\nabla \mathbf{u}^h)^{sym} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p^h}] \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{S}^s(\mathbf{u}^s) = 2\mu \text{dev}[(\nabla \mathbf{u}^s)^{sym}] \quad (\text{B.18})$$

Observación 38 la propuesta B.16 es lícita en régimen elástico. Como es sabido, en plasticidad la función tensorial \mathbf{S} no es lineal en \mathbf{u} con lo cual la expresión anterior deja de ser estrictamente cierta. No obstante, si consideramos a \mathbf{u}^s como una pequeña perturbación del campo \mathbf{u}^h , es decir $\|\mathbf{u}^s\| \ll \|\mathbf{u}^h\|$ (el efecto de la sub escala es de orden $\mathbf{u}^s \approx \mathcal{O}(h^2)$ Codina [Cod00b]), es razonable admitir que la sub escala de desplazamiento no genera deformaciones plásticas, o bien que las mismas son despreciables frente a las inducidas por \mathbf{u}^h , con lo cual la aproximación B.16 conserva sentido aun en el campo inelástico. Una justificación alternativa puede encontrarse en [CCVdS03].

Observación 39 una importante consecuencia de la simplificación introducida es que $\mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h)$ puede evaluarse mediante un algoritmo estándar de retorno a la superficie de fluencia, ya que sólo depende del campo de desplazamiento asociado a la escala \mathbb{E}^h .

Teniendo en cuenta B.16, las ecuaciones B.13 (previa integración por partes), B.14 y B.15 pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} & \langle (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym}; \mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) \rangle + \underbrace{\langle (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym}; \mathbf{S}^s(\mathbf{u}^s) \rangle}_{\mathcal{S}_{st}^1} - \\ & - \langle \nabla \cdot \mathbf{w}^h; p^h \rangle - \langle \mathbf{w}^h; \mathbf{b} \rangle - \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{w}^h \cdot \mathbf{t}^*) d\Gamma_\sigma = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_0^h \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\langle \mathbf{w}^s; \nabla \cdot \mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) \rangle + \langle \mathbf{w}^s; \nabla \cdot \mathbf{S}^s(\mathbf{u}^s) \rangle - \langle \mathbf{w}^s; \nabla p^h \rangle + \langle \mathbf{w}^s; \mathbf{b} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^s \quad (\text{B.20})$$

$$\langle q^h; \left(\frac{p^h}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u}^h \right) \rangle + \underbrace{\langle q^h; \nabla \cdot \mathbf{u}^s \rangle}_{\mathcal{S}_{st}^2} = 0 \quad \forall q^h \in \mathcal{Q}^h \quad (\text{B.21})$$

Salvo por la presencia de los dos términos adicionales \mathcal{S}_{st}^1 y \mathcal{S}_{st}^2 , las formas integrales B.19 y B.21 corresponden a la aproximación usual de elementos finitos para un problema mixto (nótese que están definidas sobre los espacios \mathcal{V}^h y \mathcal{Q}^h). Estos son precisamente términos de estabilización, responsables de incluir el efecto de la sub escala sobre la solución discreta estándar del MEF. Por otro lado, la ecuación B.20 asociada a \mathbb{E}^s , se utiliza como restricción adicional para aproximar \mathbf{u}^s , con lo cual el problema completo queda definido, al menos desde un punto de vista conceptual.

Para llegar a las expresiones finales del esquema PGP, discutidas en el capítulo 5 sección 5.3.1, aún se hace necesario introducir algunas hipótesis simplificativas y operar matemáticamente sobre el sistema B.19-B.21. Debe enfatizarse que el objeto fundamental de estas aproximaciones es obtener una estimación computacionalmente factible de los efectos que introduce la sub escala en la formulación, sin que ello implique la necesidad de calcular exactamente \mathbf{u}^s . Las consideraciones que se detallan a continuación, y hasta el final del apéndice, siguen esta filosofía.

El término \mathcal{S}_{st}^1 , teniendo en cuenta B.18, se puede escribir:

$$\mathcal{S}_{st}^1 = \langle (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym}; 2\mu \operatorname{dev}[(\nabla \mathbf{u}^s)^{sym}] \rangle \quad (\text{B.22})$$

$$= -\langle \nabla \cdot \{2\mu \operatorname{dev}[(\nabla \mathbf{w}^h)^{sym}]\}; \mathbf{u}^s \rangle + \int_{\Gamma} [\mathbf{u}^s \cdot (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym} \cdot \boldsymbol{\nu}] d\Gamma \quad (\text{B.23})$$

luego si se utiliza interpolación lineal por tramos para \mathbf{u}^h (y en consecuencia para \mathbf{w}^h), como el caso presente, y recordando que $\mathbf{u}^s|_{(\mathbf{x} \in \Gamma)} = 0$, se concluye trivialmente que \mathcal{S}_{st}^1 no tiene influencia en la formulación, con lo cual la expresión B.19 representa el balance de momento lineal estándar. Dicho de otra forma, en este contexto de análisis no existe estabilización en la ecuación de equilibrio clásica.

Observación 40 *el término \mathcal{S}_{st}^1 no se anula al utilizar espacios discretos de mayor orden, en tales situaciones es necesaria su correcta evaluación.*

Un punto clave en el planteamiento formal de esta metodología es conservar el carácter *fuerte* (en el sentido de no aplicar integración por partes) en la ecuación B.20. Este hecho aporta varias consecuencias favorables, a saber:

- permite escribir B.20 de una forma alternativa:

$$\langle \mathbf{w}^s ; \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{S}^s(\mathbf{u}^s)}_{\mathcal{L}(\mathbf{u}^s)} \rangle = - \langle \mathbf{w}^s ; \underbrace{[\nabla \cdot \mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) - \nabla p^h + \mathbf{b}]}_{\mathbf{r}^h} \rangle \quad \forall \mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^s \quad (\text{B.24})$$

donde se observa claramente que $\nabla \cdot \mathbf{S}^s(\mathbf{u}^s)$ (y por lo tanto \mathbf{u}^s) depende en cierta medida de la proyección del residuo obtenido a partir de la escala de elementos finitos \mathbf{r}^h , sobre el espacio de la sub escala \mathcal{V}_0^s .

- permite, basándose en la misma justificación expuesta anteriormente, anular el término $\langle \mathbf{w}^s ; \nabla \cdot \mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) \rangle$, al utilizar interpolación lineal para \mathbf{u}^h .
- dado que el campo \mathbf{u}^s está afectado por una doble diferenciación espacial, aquí representada por la aplicación $\mathcal{L}(\mathbf{u}^s)$, es posible introducir localmente (a nivel de cada elemento finito) una aproximación de la forma:

$$\mathcal{L}_e(\mathbf{u}^s) \approx -\boldsymbol{\tau}_e^{-1} \mathbf{u}_e^s \quad (\text{B.25})$$

donde $\boldsymbol{\tau}_e$ es una matriz de estabilización, que según el razonamiento siguiente (véase B.26), dependerá en forma proporcional a h_e^2 , siendo h_e una medida característica de cada elemento:

$$\|\nabla \cdot \mathbf{S}_e^s\| = \|\nabla \cdot [2\mu \text{dev}(\nabla^{\text{sym}} \mathbf{u}_e^s)]\| \approx \underbrace{\frac{\alpha 2\mu}{h_e^2}}_{\boldsymbol{\tau}_e^{-1}} \|\mathbf{u}_e^s\| \quad (\text{B.26})$$

Un formato muy utilizado para el operador $\boldsymbol{\tau}_e$ y que ha generado resultados satisfactorios es simplemente:

$$\boldsymbol{\tau}_e = \text{diag}(\tau_e, \dots, \tau_e) \quad (\text{B.27})$$

definiendo τ_e como sigue:

$$\tau_e = c \frac{h_e^2}{2\mu^*} \quad (\text{B.28})$$

donde $c \approx \mathcal{O}(1)$ es un coeficiente de estabilidad y μ^* el módulo de corte secante. Debe aclararse que desde el punto de vista computacional τ_e es un parámetro robusto, en el sentido que variaciones del coeficiente c (dentro del orden establecido $\mathcal{O}(1)$), no tienen un impacto significativo en la respuesta. En Codina [Cod00b] puede encontrarse un estudio basado en análisis de Fourier para deducir valores admisibles del parámetro τ_e .

B.2. Método de sub escalas ortogonales

Hasta el momento, nada se ha dicho con relación a qué criterio debe adoptarse para estimar el campo \mathbf{u}^s y dar un formato definitivo al segundo término de estabilización \mathcal{S}_{st}^2 en B.21. Si bien existen diversas alternativas, una elección natural para generar el espacio complementario \mathcal{V}_0^s , de la sub escala \mathbb{E}^s , es proponer que éste resulte ortogonal al espacio de elementos finitos \mathcal{V}^h . De este modo surge el procedimiento de estabilización denominado *Método de Sub Escalas Ortogonales (Orthogonal Sub Scales (OSS))* [Cod00a].

En esta metodología se considera entonces que:

$$\mathcal{V}_0^s \perp \mathcal{V}_0^h \quad (\text{B.29})$$

$$\mathcal{V}_0^s \approx \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.30})$$

donde \mathcal{V}_0^s es el espacio complementario ortogonal al de elementos finitos. La sub escala \mathbf{u}^s y su variación admisible \mathbf{w}^s quedan definidas mediante:

$$\mathbf{u}^s \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.31})$$

$$\mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.32})$$

Por practicidad se introducen los operadores de proyección sobre \mathcal{V}^h y $\mathcal{V}^{h\perp}$ de la forma:

$$P^h\{\mathbf{u}\} = \mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h \quad (\text{B.33})$$

$$P^{h\perp}\{\mathbf{u}\} = \mathbf{u}^s \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.34})$$

$$P^{h\perp}\{(\bullet)\} = (\bullet) - P^h\{(\bullet)\} \quad (\text{B.35})$$

Si además se asume, como es usual, que el campo de fuerzas de volumen \mathbf{b} puede ser descrito completamente en el espacio \mathcal{V}^h :

$$P^{h\perp}\{\mathbf{b}\} = 0 \quad (\text{B.36})$$

la ecuación B.20, considerando el conjunto de hipótesis enunciadas e introduciendo un proceso de ensamble de términos integrales evaluados a nivel de cada elemento finito, se puede expresar como:

$$\bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \mathbf{w}_e^s; \tau_e^{-1} \mathbf{u}_e^s \rangle = \bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \mathbf{w}_e^s; \mathbf{r}_e^h \rangle \quad \forall \mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.37})$$

$$\bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \mathbf{w}_e^s; \tau_e^{-1} \mathbf{u}_e^s \rangle = \bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \mathbf{w}_e^s; -\nabla p_e^h \rangle \quad \forall \mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.38})$$

$$\bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \mathbf{w}_e^s; \tau_e^{-1} \mathbf{u}_e^s \rangle = \bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \mathbf{w}_e^s; P^{h\perp} \{-\nabla p_e^h\} \rangle \quad \forall \mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.39})$$

de donde surge trivialmente que la definición del campo de desplazamiento asociado a la sub escala responde a la forma:

$$\mathbf{u}_e^s = \tau_e P^{h\perp} \{-\nabla p_e^h\} = -\tau_e (\nabla p_e^h - P^h \{\nabla p_e^h\}) \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.40})$$

Observación 41 de acuerdo con B.37, \mathbf{u}^s es la proyección del residuo \mathbf{r}^h sobre el espacio ortogonal a EF , a menos de un factor de escala. Según las consideraciones introducidas, únicamente la componente ∇p^h interviene en tal proyección, véase B.38.

Observación 42 la componente \mathbf{u}^s no necesariamente es continua a través de los contornos elementales. Para obtener las ecuaciones finales B.37-B.39 debe considerarse sólo la contribución de la sub escala en el interior de los elementos, despreciando las integrales entre las interfaces de los mismos.

El campo de gradiente de presión proyectado sobre el espacio de elementos finitos, $P^h \{\nabla p^h\}$, se incorpora como una nueva variable independiente, referenciada por simplicidad como:

$$\mathbf{\Pi}^h = P^h \{\nabla p^h\} \quad ; \quad \mathbf{\Pi}^h \in \mathcal{V}^h \quad (\text{B.41})$$

la cual también se aproxima por interpolación lineal a trozos.

Reemplazando la ecuación B.40 en B.21 y debilitando el término \mathcal{S}_{st}^2 se obtiene:

$$\langle q^h; \nabla \cdot \mathbf{u}^h \rangle + \langle q^h; \frac{p^h}{\kappa} \rangle + \underbrace{\bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \nabla q^h; \tau_e (\nabla p_e^h - \mathbf{\Pi}_e^h) \rangle}_{\mathcal{S}_{st}^{PGP}} = 0 \quad \forall q^h \in \mathcal{Q}^h \quad (\text{B.42})$$

Finalmente, la formulación mixta estabilizada puede describirse en los siguientes términos: encontrar $(\mathbf{u}^h, p^h, \mathbf{\Pi}^h) \in (\mathcal{V}^h \times \mathcal{Q}^h \times \mathcal{V}^h)$ tal que se satisfaga:

$$\langle (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym}; \mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{w}^h; p^h \rangle - \langle \mathbf{w}^h; \rho \mathbf{b} \rangle = \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{w}^h \cdot \mathbf{t}^*) d\Gamma_\sigma \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_0^h \quad (\text{B.43})$$

$$\langle q^h; \frac{p^h}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u}^h \rangle + \bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \nabla q^h; \tau_e (\nabla p_e^h - \mathbf{\Pi}_e^h) \rangle = 0 \quad \forall q^h \in \mathcal{Q}^h \quad (\text{B.44})$$

$$\langle \boldsymbol{\eta}^h; (\nabla p^h - \mathbf{\Pi}^h) \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}^h \quad (\text{B.45})$$

donde $\boldsymbol{\eta}^h$ es el campo de variaciones admisibles del gradiente de presión proyectado ($\boldsymbol{\eta}^h \equiv \delta \boldsymbol{\Pi}$). Obsérvese además que la ecuación B.45 es la que permite computar $\boldsymbol{\Pi}^h$ en forma consistente con el espacio complementario de la sub escala adoptado.

El sistema B.43-B.45 es precisamente aquel presentado y evaluado numéricamente en el capítulo 5.

De los aspectos discutidos en este apéndice se pueden enumerar algunas observaciones finales:

- el campo de la sub escala efectivamente tiene orden $\mathcal{O}(h_e^2)$, con lo cual su aporte cinemático decrece al refinar la malla.
- \boldsymbol{u}^s es lineal por tramos y discontinuo entre elementos.
- a pesar que \boldsymbol{u}^s se evalúa a nivel elemental no es posible condensarlo en forma estática.
- según las consideraciones hechas, sólo se incorpora estabilización en la ecuación de restricción volumétrica, mientras que el balance de cantidad de movimiento lineal se resuelve en forma estándar.
- si bien durante el procedimiento descrito pueden observarse ciertas hipótesis carentes de una justificación completamente consistente, debe considerarse también que al densificar la malla su “*posible*” influencia sobre la respuesta disminuye rápidamente. El fin que tienen tales simplificaciones es aproximar en forma eficiente el efecto de la sub escala para aliviar una restricción presente en la escala de EF (\mathbb{E}^h), sin que ello implique su evaluación exacta.

Apéndice C

Esquema *PGP*. Implementación en un entorno paralelo.

Para poder abordar eficazmente la simulación computacional de grandes problemas estructurales, es necesario utilizar estrategias numéricas de alta performance (*HPC: High Performance Computing*). Si bien el estudio de estas técnicas avanzadas no está estrechamente vinculado a la línea general seguida en la presente disertación, la tendencia actual seguida por la comunidad científica mundial durante los últimos años hacia este tipo de desarrollos, hace más que razonable su estudio. Se pretende con ello disponer de un fundamento conceptual introductorio para posibles desarrollos futuros en esta promisoriosa rama de la mecánica computacional.

Siguiendo tal filosofía, en este apartado se introducen los aspectos básicos de implementación del esquema mixto estabilizado *PGP* (discutido oportunamente en el capítulo 5) en un entorno de cálculo distribuido, [SSH04b, SHS04]. Como objetivo más ambicioso, y por ende fuera del alcance de este trabajo, se pretende formular todo un conjunto de algoritmos y estrategias numéricas para el modelado de fractura en materiales, haciendo uso de metodologías en paralelo.

C.1. Tópicos de implementación en paralelo

La plataforma de trabajo utilizada es un código general de elementos finitos en paralelo de propósito múltiple *PETSc-FEM* (Storti et al. [SNP]). Este es un software abierto que se encuentra en constante desarrollo en el *Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)*.

PETSc-FEM corre en un cluster tipo Beowulf, haciendo uso de las librerías *PETSc* [BBG⁺01, BBG⁺02, BGMS97] para resolver operaciones de álgebra lineal, *MPI* [GLS95] como herramienta de comunicación entre procesadores y está basado en un paradigma de programación orientado a objetos. De hecho *PETSc-FEM* es una librería formada por un conjunto de aplicaciones desarrolladas para simular problemas de multi-física, como por ejemplo:

- ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes
- ecuaciones compresibles de Euler

- modelo de aguas poco profundas (*shallow water*)
- sistemas advectivos-difusivos generales
- ecuaciones de Laplace
- elasticidad
- y como aporte adicional, en el marco de esta tesis, se han agregado modelos de plasticidad junto con una formulación mixta estabilizada para resolver casos de incompresibilidad en mecánica de sólidos.

Cada una de estas aplicaciones puede dividirse conceptualmente en dos módulos: rutinas a nivel de los elementos y algoritmo principal.

En el primero de ellos se computan los vectores de estado, el residuo de las ecuaciones discretas y el jacobiano o matriz de rigidez consistente con la formulación. En este punto, la algoritmia a utilizar no logra diferenciarse en absoluto de un código secuencial.

En el segundo módulo, el algoritmo principal, se especifican características globales del problema a resolver (definiendo por ejemplo si es un caso lineal o no-lineal, estacionario o transitorio, etc), también a este nivel se ejecutan rutinas para lectura de malla, se ensamblan vectores y matrices globales de tipo *PETSc*, se verifica la convergencia, etc. En este sentido, la librería *PETSc* permite al usuario manipular estructuras de datos complejas, alocar información en cada nodo del cluster, como así también realizar llamadas a subrutinas de álgebra matricial (incluyendo solvers de sistemas de ecuaciones lineales), todo ello en un entorno de memoria distribuida y con la ventaja adicional de no tener que programar explícitamente en paralelo.

Básicamente, el flujo de cálculo se distribuye entre varios procesadores (*se paraleliza*) en dos puntos bien definidos dentro de la estrategia numérica global.

Como es sabido, en el contexto del *MEF* estándar, el cómputo de las variables en el interior de cada elemento está completamente desacoplado de los restantes, induciendo naturalmente un primer nivel de bifurcación en el cálculo. Para ello se hace necesario fraccionar la malla de manera tal que cada nodo contenga un patch (o grafo) de elementos y realice cuentas sobre ellos. En *PETSc-FEM*, esta subdivisión de la malla se realiza utilizando un particionador de grafos no estructurado (*METIS* [KK97]).

El otro punto clave de paralelización es al momento de factorizar el sistema de ecuaciones. En general para tal propósito se utilizan estrategias iterativas ya que los métodos directos de solución resultan extremadamente acoplados, con lo cual la excesiva comunicación entre procesadores hace disminuir drásticamente la eficiencia computacional, véase figura C.1.

Observación 43 *la introducción de una formulación mixta estabilizada, como el caso presente, incrementa el número de incógnitas a resolver, pero no varía la estructura básica del algoritmo paralelo descrito.*

C.2. Solución del sistema de ecuaciones

Nuestro estudio se restringe a analizar las propiedades de convergencia de métodos iterativos y costo computacional en paralelo para resolver el sistema de ecuaciones resultante del esquema mixto estabilizado *PGP*. Debe aclararse que dicha formulación resulta simétrica pero no necesariamente definida positiva. Los resultados mostrados en este anexo se corresponden a la solución del sistema monolítico 5.24, que por comodidad se describe a continuación:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S}^e(\hat{\mathbf{u}}^e) d\Omega^e \right] - \mathbf{G}_0 \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_u^{(ext)} \\ -\mathbf{G}_0^T \hat{\mathbf{u}} - \left[\frac{1}{\kappa} \mathbf{M}_p + \mathbf{L} \right] \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{H} \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{M}_u \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

es decir sin desacoplar el campo $\hat{\mathbf{I}}$, lo cual representa un desafío incluso mayor para el solver lineal. El hecho de evaluar monolíticamente C.1 nos ha permitido además verificar satisfactoriamente la metodología simplificada descrita en el capítulo 5 (sección 5.3.2) en términos cualitativos y cuantitativos.

En particular se analizan dos estrategias iterativas para resolver C.1:

- Estrategia *E-1*: procedimiento iterativo global, aquí referenciado como *GGMRES*, resolviendo el sistema completo de ecuaciones en paralelo utilizando *GMRES* (*Generalized Minimal Residual Method*).
- Estrategia *E-2*: método de Descomposición de Dominio (*DDM*). Se ha encontrado que, en cuanto a eficiencia computacional, las metodologías del tipo *DDM* son más adecuadas frente a los esquemas iterativos globales, especialmente para problemas grandes y mal condicionados. Esta técnica se basa en particionar el dominio completo en subdominios y distribuirlos entre los diferentes nodos, de tal forma que el procedimiento completo de cálculo pueda dividirse en dos fases: resolver las incógnitas internas en cada subdominio y resolver las incógnitas globales en las interfaces de los mismos. El sistema de incógnitas internas se resuelve localmente en cada procesador utilizando métodos directos (típicamente descomposición *LU*). Los grados de libertad en la interface forman parte de un sistema global, el cual se resuelve iterativamente utilizando nuevamente un esquema de tipo *GMRES*. Por lo expuesto, este procedimiento de cálculo se referencia de aquí en adelante como esquema *IISD* (*Interface-Iterativo/Subdominio-Directo*).

Observación 44 debe agregarse que, siguiendo la misma filosofía descrita anteriormente, a su vez cada subdominio en cada nodo del cluster puede resolverse utilizando nuevamente un Método de Descomposición de Dominios (*DDM*).

El requerimiento de memoria para el procedimiento iterativo global (*GGMRES*) y para Descomposición de Dominios (*DDM*) crece a medida que disminuye la tolerancia del

error admisible en la solución. *DDM* necesita mayores recursos de memoria (y tiempo de CPU) que *GGMRES* para tolerancias groseras. Sin embargo la tasa de crecimiento del consumo de memoria RAM (y del tiempo de CPU), al disminuir la tolerancia, es mayor para *GGMRES* comparado con *DDM*, como se muestra en la figura C.1. Luego, *DDM* resulta más eficiente cuando se requieren tolerancias más ajustadas, como suele suceder en aplicaciones prácticas, para mayor detalle véase además [SDP+03].

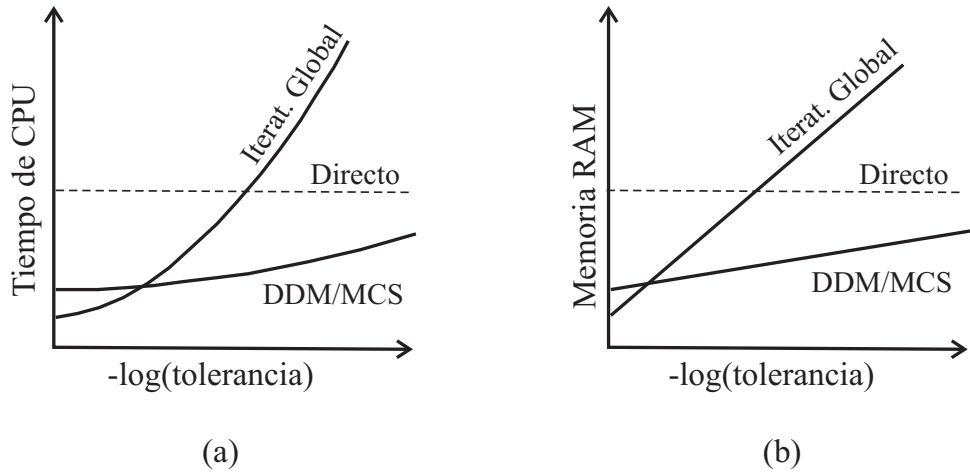


Figura C.1: Performance en paralelo para solvers directos e iterativos: (a) Tiempo de CPU para distintas estrategias de solución. (b) Consumo de memoria RAM para distintas estrategias de solución.

Como se mencionó, el hecho de fraccionar el dominio completo en subdominios no solapados origina un problema de interface cuya matriz representativa se denomina Matriz de Complemento de Schur (*MCS*). El tamaño del sistema de interface es mucho menor que el sistema global y por lo tanto se encuentra mejor condicionado. Aun así, para mejorar la performance computacional, el problema de interface puede *precondicionarse* con lo cual el número de condición de la *MCS* disminuye. En este sentido, aquí utilizamos un preconditionador denominado *ISP* (*Interface Strip Preconditioner*) recientemente desarrollado por Storti et al. [SDP+03], diseñado para métodos de descomposición de dominios. Éste está basado en resolver un problema sobre una delgada tira de nodos alrededor de las interfaces de los subdominios, de forma tal que las altas frecuencias del operador de Steklov¹ puedan capturarse correctamente. El preconditionador *ISP* requiere menos memoria y costo computacional que el clásico preconditionador Neumann-Neumann y sus variantes. Además el ancho de la tira de nodos puede utilizarse como un parámetro para decidir qué cantidad de memoria asignar para propósitos de preconditionamiento.

En este trabajo se ha extendido la aplicación de las estrategias *IISD/ISP* al contexto de la mecánica de sólidos, comparando además su performance con otros esquemas alternativos de solución y preconditionamiento.

¹Asumiendo que \mathcal{L} es el operador que gobierna el problema a nivel del continuo, el operador de Steklov es aquel que proyecta a \mathcal{L} sobre el espacio de la interface. La Matriz de Complemento de Schur representa la versión discreta tal proyección.

C.3. Test de elasticidad incompresible

El problema de elasticidad incompresible en 3D presentado en el capítulo 5, se estudia ahora desde el punto de vista de la eficiencia computacional en paralelo (para mayores detalles en cuanto a la descripción del ejemplo véase en particular la sección 5.4.2). Para su resolución se ha utilizado un conjunto de 9 procesadores *P4* 2,4 [GHz], 1 Gb-RAM DDR 333 [MHz].

En la figura C.2 se observan los dos modelos discretos de elementos finitos utilizados en el presente test, cada uno compuesto de aproximadamente 56000 y 90000 tetraedros lineales en $\hat{\mathbf{u}}$, \hat{p} y $\hat{\boldsymbol{\Pi}}$ (desplazamiento, presión y gradiente de presión proyectado) respectivamente.

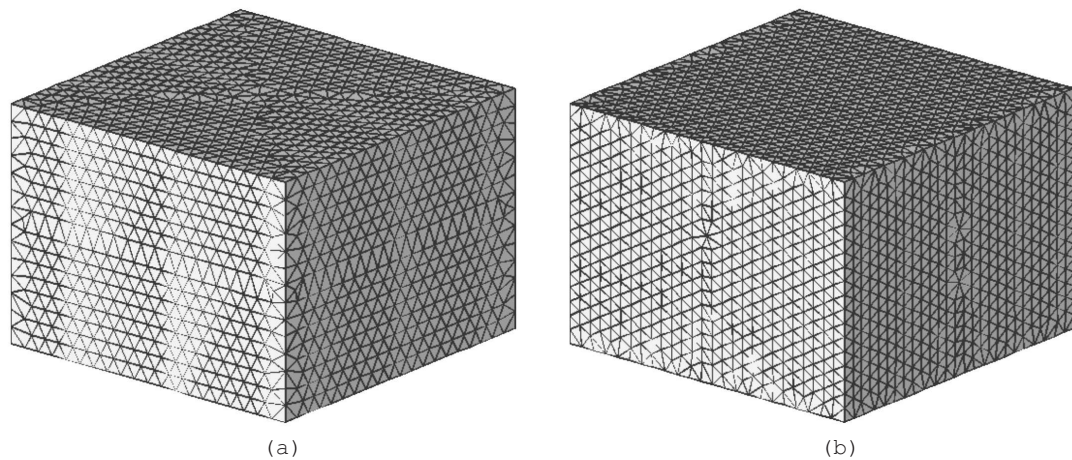


Figura C.2: Modelo *PGP*, performance en paralelo. Ejemplo de bloque elástico incompresible. Mallas de elementos finitos: (a) 56000 elementos tetraédricos (b) 90000 elementos tetraédricos.

El análisis comparativo del costo computacional para resolver el sistema monolítico C.1, considera las dos estrategias ya mencionadas en la sección anterior. En el primer caso (*E-1: GGMRES*) se utiliza un preconditionador estándar *Jacobi*, mientras que en el segundo (*E-2: IISD*) se analiza la performance relativa del preconditionador *ISP*² con el de *Jacobi*.

En las figuras C.3 y C.4, se muestra el número de iteraciones requeridas por el solver lineal al reducir 10 órdenes de magnitud la norma relativa del residuo, para las dos mallas respectivamente. Las diferencias entre *IISD* y *GGMRES* son más que evidentes, véase también tabla C.1 y C.2.

Nótese que en el contexto de la estrategia *IISD*, el preconditionador *ISP* requiere menos iteraciones que el preconditionador estándar *Jacobi* en una relación prácticamente de 1/2 para ambas mallas, consecuentemente, el consumo de memoria para almacenar el espacio de Krylov generado disminuye. Este hecho por sí solo no implica necesariamente una mejor performance del algoritmo. Sin embargo cuando comparamos tiempos totales de CPU, en las tablas C.1 y C.2, se observa una mejora de aproximadamente 12% entre *ISP* y *Jacobi*. Si bien actualmente todavía se está trabajando para lograr una implementación

²En este ejemplo adoptamos para el preconditionador *ISP* un ancho de banda de nodos unitario

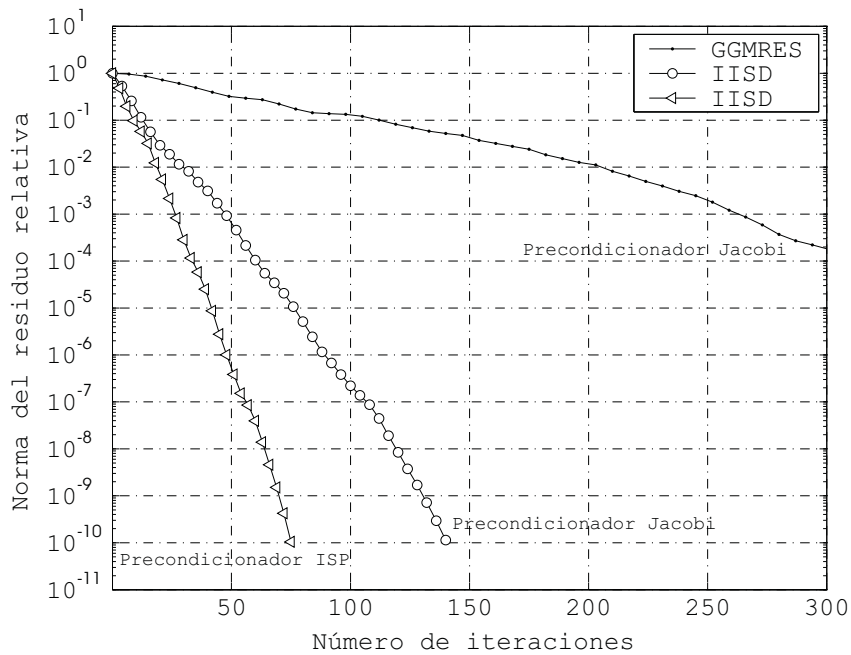


Figura C.3: Modelo *PGP*, performance en paralelo. Ejemplo de bloque elástico incompresible. Convergencia del solver lineal, test con 56000 elementos.

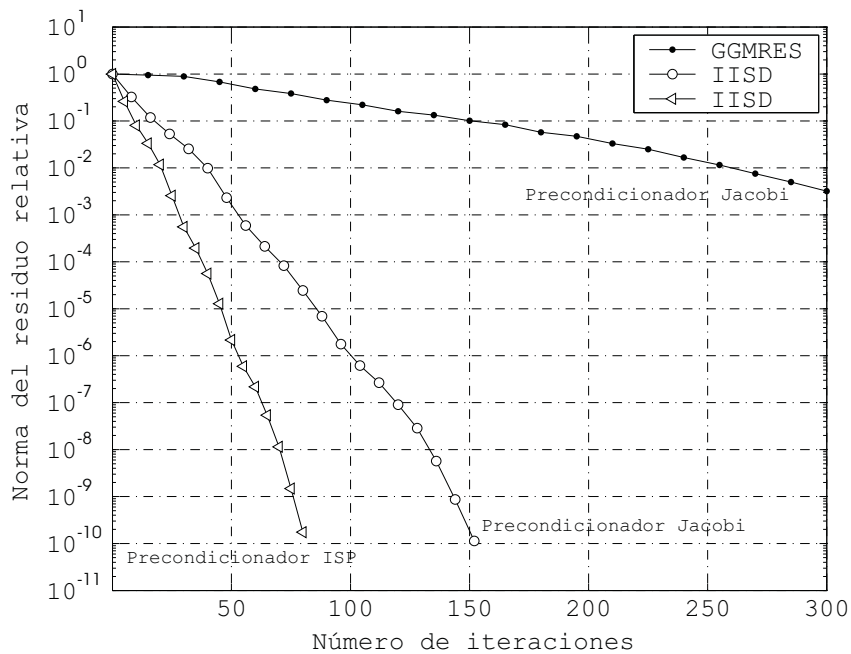


Figura C.4: Modelo *PGP*, performance en paralelo. Ejemplo de bloque elástico incompresible. Convergencia del solver lineal, test con 90000 elementos.

más eficiente del preconditionador *ISP*, los resultados mostrados en este apéndice son alentadores.

Estrategia de solución	Precondicionador	Tiempos Absolutos	Tiempos Relativos
<i>GGMRES</i>	<i>Jacobi</i>	64,85 [seg]	3,33
<i>IISD</i>	<i>Jacobi</i>	19,47 [seg]	1,00
<i>IISD</i>	<i>ISP</i>	16,93 [seg]	0,87

Cuadro C.1: Modelo *PGP*, performance en paralelo. Tiempos medidos en segundos de CPU, referidos a la estrategia *IISD-Jacobi*. Test con 56000 elementos

Estrategia de solución	Precondicionador	Tiempos Absolutos	Tiempos Relativos
<i>GGMRES</i>	<i>Jacobi</i>	197,02 [seg]	3,83
<i>IISD</i>	<i>Jacobi</i>	51,49 [seg]	1,00
<i>IISD</i>	<i>ISP</i>	45,99 [seg]	0,89

Cuadro C.2: Modelo *PGP*, performance en paralelo. Tiempos medidos en segundos de CPU, referidos a la estrategia *IISD-Jacobi*. Test con 90000 elementos

Apéndice D

Aplicación de la *CSDA* al análisis de vulnerabilidad estructural.

En este anexo se reportan resultados parciales de una línea de investigación aún en desarrollo, cuyo objetivo fundamental es la cuantificación precisa de la probabilidad de falla en estructuras de importancia, [PPL⁺05]. El trabajo completo se ha enmarcado en un proyecto europeo de investigación denominado *NW-IALAD: Network on the Integrity Assessment of Large Concrete Dams*. El mismo contempla la utilización de un código de *Redes Neuronales (Neuronal Network: NN)* basado en un procedimiento de tipo *Monte Carlo (MC)* para el análisis de vulnerabilidad estructural¹ de grandes diques en conjunción con una secuencia de análisis no lineal por elementos finitos hasta la falla². Nuestro aporte radica en la obtención de una gran cantidad de soluciones numéricas (determinísticas) para una misma estructura utilizando la *CSDA*, en términos de carga límite y mecanismos de colapso.

Este apéndice se ha incluido con la única finalidad de enfatizar la capacidad (robustez) del algoritmo numérico global utilizado para simular fractura frágil, descrito en el capítulo 3 y 4, en un problema 3D complejo dominado por el desarrollo de múltiples fisuras. Con esta idea en mente, no pretendemos discutir aquellos aspectos ajenos al análisis mecánico de falla, y que complementan el desarrollo del proyecto.

D.1. Introducción

Durante los últimos años, las teorías y procedimientos para confiabilidad estructural han alcanzado un importante desarrollo. Entre éstos puede mencionarse la incorporación del tratamiento probabilístico de las incertezas en los estados de cargas, resistencias del material, etc. La vulnerabilidad, entendida como la probabilidad de falla frente a diversos escenarios de carga, es un aspecto de suma importancia en el diseño, construcción, monitoreo y mantenimiento de obras civiles de alta prioridad como por ejemplo las presas. Este análisis intenta cuantificar la probabilidad que tiene la estructura para satisfacer comple-

¹Institute of Structural Analysis and Seismic Research, National Technical University of Athens (NTUA), Athens 15780, Greece.

²Technical University of Catalonia (UPC), Campus Nord, Edifici C-1, C/Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona, Spain.

tamente los requerimientos de servicio y diseño con un nivel aceptable de seguridad ante el colapso.

Encarar este complejo problema no es una tarea sencilla. Esta contribución forma parte de un proyecto interdisciplinario que avanza hacia este objetivo involucrando recursos de varios institutos y/o universidades europeas (NTUA, UPC). Como una primera aproximación, este estudio supone considerar que las incertidumbres están asociadas sólo a la caracterización del comportamiento material, mientras que los demás factores como estados de cargas, condiciones de contorno, condiciones de construcción, etc, no se consideran entre estas incertezas. Siguiendo esta idea, la lista global de tareas a desarrollar puede resumirse en:

- identificación y definición de las propiedades materiales que pueden sufrir variaciones importantes (parámetros inciertos) a utilizar en el modelo mecánico de falla. Para el hormigón, se adopta:
 - Módulo de Young (E)
 - Relación de Poisson (ν)
 - Tensión última uniaxial (σ_y)
 - Energía de fractura específica (G_f)
- estimación o caracterización estadística de tales parámetros inciertos. Esto último puede asumirse en función de estudios previos o bien obtenerse mediante ensayos experimentales.
- generación de un número definido (n_T) de combinaciones, cada una estará asociada a un conjunto de cuatro parámetros materiales $\{E, \nu, \sigma_y, G_f\}_i$ $i = 1 \dots n_T$, obtenidos siguiendo una función de densidad de probabilidad pre-especificada (en general una distribución normal) a partir de los valores medios del material.
- selección de un caso de prueba (benchmark) para realizar la cantidad pre-establecida (n_T) de análisis límite estructural y consecuente cómputo de capacidad de carga última (trabajo presente).
- cálculo de la confiabilidad (probabilidad de falla) utilizando un entorno de Redes Neuronales entrenado en forma apropiada.

Este apéndice se limita sólo a presentar algunos resultados correspondientes al cuarto punto de la lista previa, y puede interpretarse como un estudio de sensibilidad paramétrico asumiendo que las propiedades del material pueden modificarse dentro de un rango físicamente admisible de variación.

D.2. Ejemplos numéricos

Se desarrollan a continuación dos ejemplos. Para la resolución de ambos se adopta la *CSDA*, involucrando las estrategias numéricas discutidas en esta tesis (en particular aquellas presentadas en el capítulo 4) como por ejemplo: algoritmo de integración

implícito-explicito, metodología global de trazado de discontinuidad y elementos con modos enriquecidos de deformación. Con respecto a este último punto se utiliza la tecnología *E-FEM*, por cuestiones de precisión y costo computacional.

D.2.1. Viga de 4 puntos. Caso 2D

En esta sección reproducimos un test experimental clásico, ampliamente utilizado en mecánica de fractura para validaciones numéricas. El mismo corresponde al caso de una viga apoyada en 4 puntos sometida a un modo predominante de flexión, véase figura D.1. Recordamos que este ejemplo ha sido presentado en el capítulo 4, pero en esta ocasión el objetivo es distinto. Se pretende ahora resolver este problema de propagación de fractura una gran cantidad de veces (1000 para ser más específicos) variando la caracterización del material.

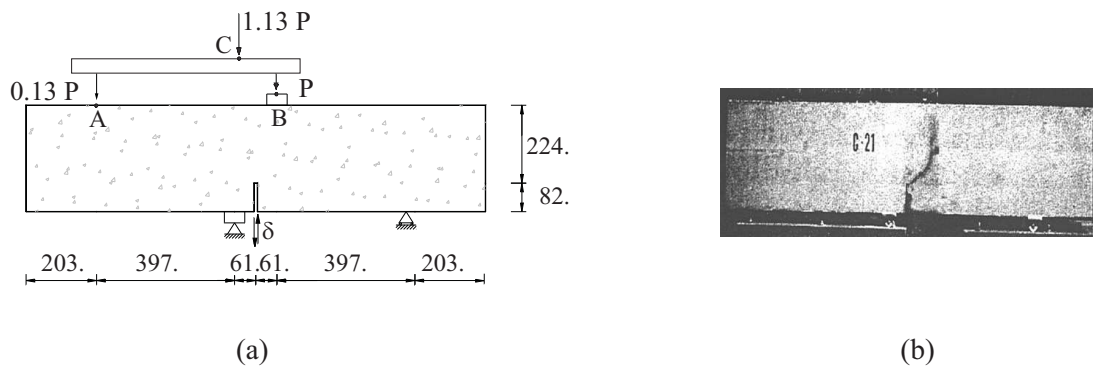


Figura D.1: Viga de 4 puntos: (a) Descripción geométrica del modelo. (b) Trayectoria de fisura obtenida experimentalmente.

En el cuadro D.1 se muestra el valor promedio de los parámetros mecánicos, en concordancia con el ensayo experimental reportado por Arrea & Ingrafea [AI82], y los máximos y mínimos adoptados para cada propiedad material.

	E [MPa]	ν	σ_y [MPa]	G_f [N/m]
Valor máximo	37081	0.331	4.904	158.941
Valor promedio	24800	0.18	2.80	100.0
Valor mínimo	13471	0.017	0.670	43.054

Cuadro D.1: Viga de cuatro puntos. Valores promedio y rango admisible de variación para los parámetros del material.

Considerando tales valores y postulando que la aleatoriedad sigue una función densidad de probabilidad Gaussiana, se generan 1000 test, uno por cada combinación de cuatro parámetros y se efectúan los correspondientes análisis de falla utilizando la aproximación por discontinuidades fuertes del continuo.

En la figura D.2-(a) puede observarse la respuesta en términos de la curva carga P versus el desplazamiento en modo deslizamiento (*CMSD*) obtenida numéricamente para los valores medios del material y la envolvente experimental documentada por Arrea &

Ingrafea, acorde a la misma caracterización constitutiva (mismos parámetros). Se advierte una adecuada correspondencia entre las dos soluciones.

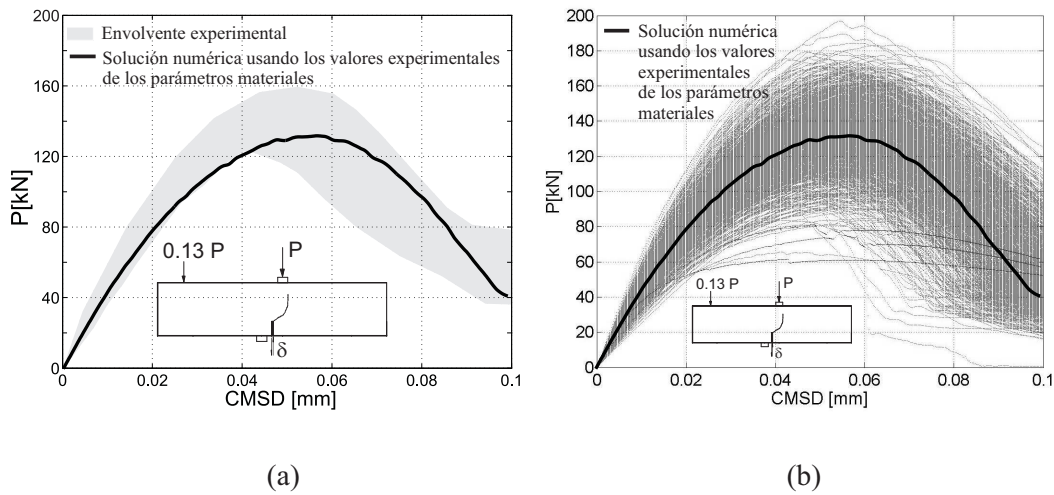


Figura D.2: Viga de 4 puntos. Curvas de respuesta carga P vs. desplazamiento $CMSD$: (a) Comparación entre la solución numérica vía *CSDA* y la envolvente experimental. (b) Curvas de equilibrio para todos los casos analizados.

Las trayectorias de equilibrio (P - $CMSD$) para la totalidad de los ejemplos estudiados se muestran en la figura D.2-(b). A partir de la figura D.3-(a) y D.3-(b) queda en evidencia la variación en la carga pico y del desplazamiento $CMSD$, según el problema considerado.

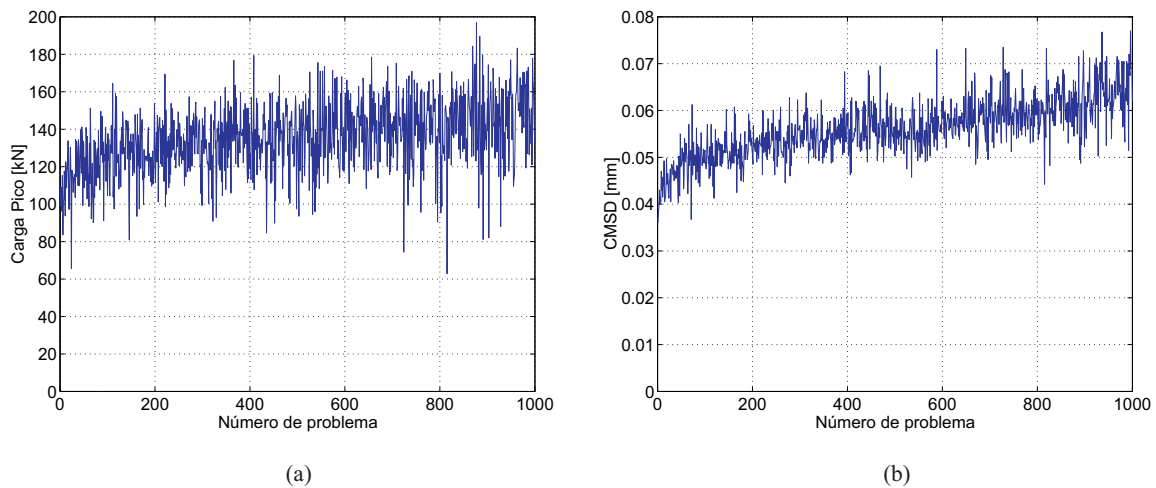


Figura D.3: Viga de 4 puntos. Resultados para los 1000 casos analizados: (a) Variación de la carga límite según el problema considerado. (b) Variación del desplazamiento $CMSD$, en correspondencia con la carga límite, según el problema considerado.

Finalmente, a modo ilustrativo, en el cuadro D.2 se transcriben 10 de los casos analizados.

Nombre del problema	E [MPa]	ν	σ_y [MPa]	G_f [N/m]	Carga última [kN]	CMSD [mm]
v4p-0015	27699	0,2197	2,4831	60,6210	117,6618	0,0405
v4p-0020	24982	0,1824	2,1489	62,6940	108,8068	0,0442
v4p-0150	23036	0,1558	2,8217	81,3010	127,6422	0,0493
v4p-0225	23953	0,1684	2,5206	86,3941	125,1792	0,0543
v4p-0458	19840	0,1121	4,1581	98,0562	140,7802	0,0615
v4p-0550	23406	0,1610	2,9645	102,2470	140,3054	0,0550
v4p-0700	22288	0,1455	2,8721	109,4215	136,1133	0,0592
v4p-0745	27161	0,2123	1,7504	111,8349	115,6962	0,0512
v4p-0840	23285	0,1592	2,3254	117,8936	129,2772	0,0623
v4p-0970	25829	0,1941	2,6397	133,6778	148,5738	0,0633

Cuadro D.2: Viga de cuatro puntos. Conjunto de datos y resultados obtenidos para 10 combinaciones, tomadas arbitrariamente, de parámetros del material.

Observación 45 debe enfatizarse que la resolución de cada problema hasta alcanzar el máximo valor de CMSD (falla completa), compuesto por aproximadamente 2000 elementos (1000 nodos) y considerando 400 pasos de tiempo (400 iteraciones), insume (en promedio) sólo 1,4-1,5 minutos en un ordenador personal estándar.

D.2.2. Presa de Scalere

El problema propuesto corresponde a la presa de arco de Scalere³. Esta represa fue construida entre 1910 – 1911 y se encuentra ubicada en región centro-norte de Italia. La cota máxima de la cresta es 830,5 [metros] a.s.l., la altura máxima del dique es de 34 [metros] y la longitud de la cresta 158 [metros].

Para el análisis sistemático de falla se consideran fijos todos los parámetros que definen la estrategia numérica, permitiendo solamente variaciones en la descripción material. En consecuencia, los resultados estarán asociados a tales perturbaciones físicas.

Geometría

La geometría del dique de hormigón se ha tomado de [NW-]. Sólo se modela una pequeña parte de la fundación debido a que el análisis está especialmente direccionado al colapso de la presa propiamente dicha. Sin embargo, para recuperar el comportamiento mecánico real, se deben aplicar las condiciones de borde apropiadas al modelo numérico.

En la figura D.4 y D.5 puede observarse la malla de elementos finitos desde distintas perspectivas. La discretización está compuesta por aproximadamente 13580 elementos tetraédricos y 3047 nodos.

Condiciones de contorno

Las restricciones cinemáticas a considerar son muy simples, a saber: las dos superficies laterales y la cara inferior se asumen empotradas (A, B y C en la figura D.4-(b)), mientras que las restantes están libres.

³Este ejemplo se ha tomado como benchmark en Wp3Tg4 [GMMF03] (7th International Benchmark Workshop 2003, Bucharest, Romania), véase también <http://nwialad.uibk.ac.at/Wp2/Tg3/Se5/Ss9/Sss1>.

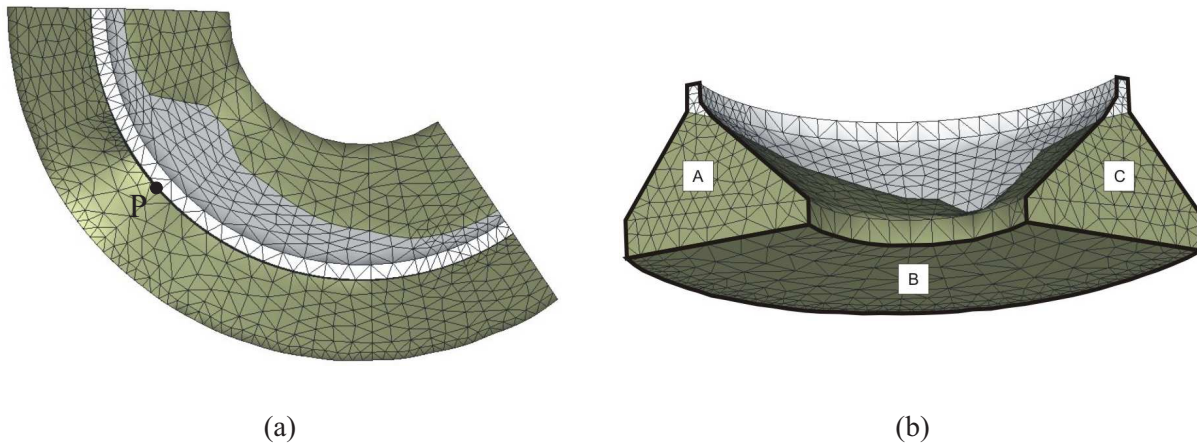


Figura D.4: Presa de Scalere. Geometría del modelo numérico: (a) Vista superior. (b) Perspectiva inferior

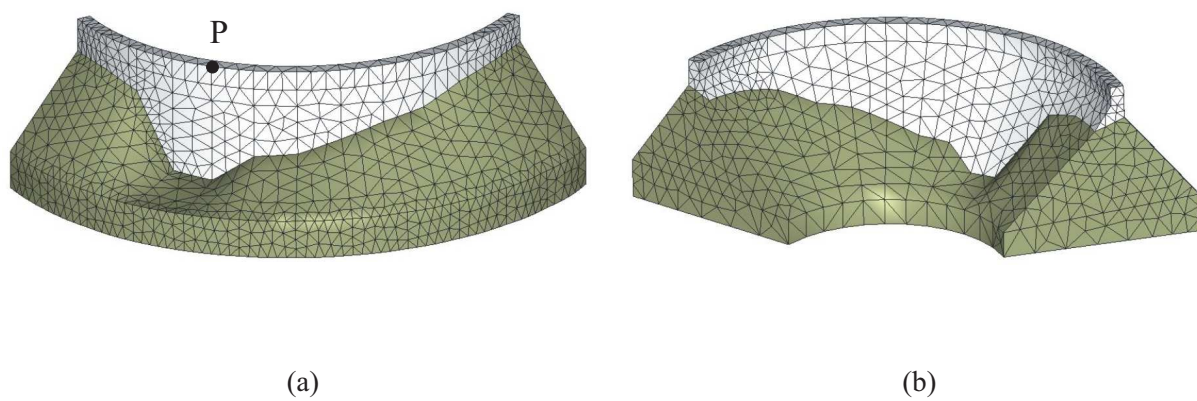


Figura D.5: Presa de Scalere. Geometría del modelo numérico: (a) Perspectiva aguas arriba. (b) Perspectiva aguas abajo.

El estado de cargas externas comprende el peso propio de la estructura (constante) y la presión hidrostática (variable). Se asume que el reservorio se llena con agua hasta la cresta de la presa, ver figura D.6. La evolución, en el pseudo-tiempo, del factor de carga debe entenderse como un factor de proporcionalidad aplicado a la densidad del agua, de tal forma que en un principio la densidad es cero, incrementándose posteriormente hasta que se alcanza la carga última de la presa. Este no es el escenario común adoptado en el diseño de diques, sin embargo, consideramos que este criterio es más aceptable desde el punto de vista de la falla estructural y además simplifica en gran medida la aplicación del empuje hidrostático. El valor máximo del factor de carga obtenido, determina el coeficiente de seguridad.

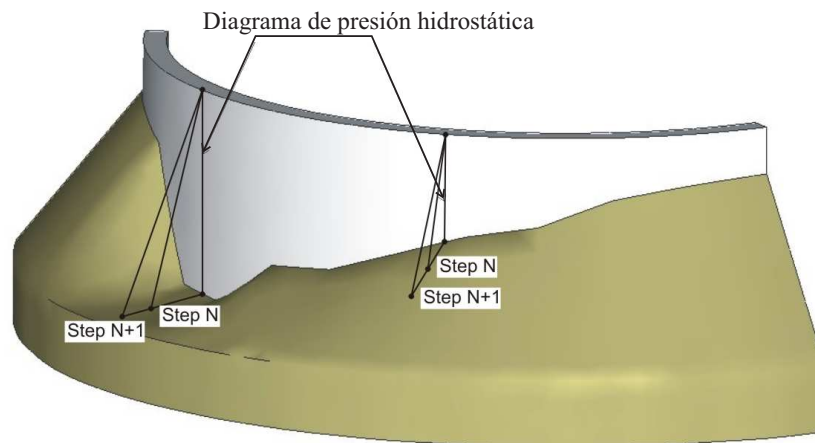


Figura D.6: Presa de Scalere. Esquema simplificado para la aplicación de la presión hidrostática. Evolución del factor de carga.

Propiedades del material

La estructura en estudio esta formada por dos materiales: la roca de fundación y el hormigón que conforma la presa. Para ambos se asume un modelo de daño continuo isótropo con diferente resistencia a compresión y tracción. Como simplificación adicional se consideran incertezas sólo en la caracterización del hormigón (cuadro D.3) mientras que el comportamiento mecánico de la roca se postula como determinístico (cuadro D.4). En consecuencia, el análisis presente está dirigido a evaluar la *probabilidad de falla de la estructura* más que la *probabilidad de falla del sistema estructura-fundación*.

Observación 46 *nótese, en el cuadro D.3, que ni la tensión última a compresión ($\sigma_y^{(-)}$) ni la densidad material (ρ) se consideran como variables aleatorias.*

Como en el ejemplo previo, a partir de los valores medios del hormigón y adoptando una distribución de probabilidad, se genera una cantidad establecida (n_T) de combinaciones de parámetros ($\{E, \nu, \sigma_y, G_f\}$), y se realiza un análisis hasta la falla de cada una de ellas. En este caso particular hemos adoptado $n_T = 100$, y por ende se computaron 100 magnitudes distintas de carga última.

Hormigón						
	E	ν	$\sigma_y^{(-)}$ Compresión	σ_y Tracción	G_f	ρ Densidad
	[MPa]		[MPa]	[MPa]	[N/m]	[kg/m ³]
Valores máximos	22297	0.235	10.0	1.399	113.988	2300
Valores promedio	20000	0.20	10.0	1.0	100.0	2300
Valores mínimos	17690	0.172	10.0	0.614	88.907	2300

Cuadro D.3: Presa de Scalere. Valores promedio y rango admisible de variación para los parámetros del hormigón.

Roca de Fundación				
E	ν	$\sigma_y^{(-)}$ Compresión	σ_y Tracción	G_f
[MPa]		[MPa]	[MPa]	[N/m]
20000	0.20	10.0	1.0	100

Cuadro D.4: Presa de Scalere. Parámetros materiales para la roca de fundación.

Resumen de las hipótesis introducidas

A continuación remarcamos las principales hipótesis hechas para la resolución de todos los casos:

- sólo dos materiales se modelizan: hormigón y roca.
- no hemos considerado elementos de interface entre la roca de fundación y la presa.
- la roca se asume como determinística.
- los cuatro parámetros materiales del hormigón tomados como variables aleatorias son: módulo de Young, relación de Poisson, tensión última uniaxial y energía de fractura, los cuales están definidos vía una función densidad de probabilidad establecida a partir de valores medios.
- se adopta un único escenario numérico. Solamente las propiedades del hormigón pueden modificarse.
- incremento monótono de la densidad del agua como principal estado de carga, se considera además el peso propio de la estructura.

Resultados numéricos

El cuadro D.5 muestra resultados para 10 conjuntos de parámetros, en términos del factor de carga (columna 6).

En la figura D.7 se observa, para uno de los casos estudiados, la curva de evolución del factor de carga como función del desplazamiento horizontal (dirección x) del punto P en la cresta de la presa (véase figura D.4-(a) y D.5-(a)).

Los mapas de igual desplazamiento (figuras D.8-(a) y D.8-(b)) y la geometría del modelo discreto en la configuración deformada (ver figuras D.9-(a) y D.9-(b)) ponen en evidencia el mecanismo de colapso de la presa. Este está formado por la conjunción de

Nombre del problema	E [MPa]	ν	σ_y [MPa]	G_f [N/m]	Factor de Carga
dam-004	20343	0,2046	1,0587	91,8538	7,23
dam-018	20106	0,2017	1,0223	95,9953	7,56
dam-027	21124	0,2152	1,2043	97,3479	7,74
dam-040	20650	0,2092	1,1226	99,0081	8,29
dam-042	19284	0,1901	0,8708	99,2920	7,98
dam-064	19425	0,1924	0,8954	101,9026	7,32
dam-077	17690	0,1717	0,6140	103,9041	5,17
dam-084	19980	0,1995	0,9968	105,3341	8,88
dam-089	20051	0,2006	1,0104	106,6047	8,78
dam-098	18884	0,1897	0,7947	100,5677	7,30

Cuadro D.5: Presa de Scalere. Conjunto de datos y resultados obtenidos para 10 combinaciones, tomadas arbitrariamente, de parámetros del material.

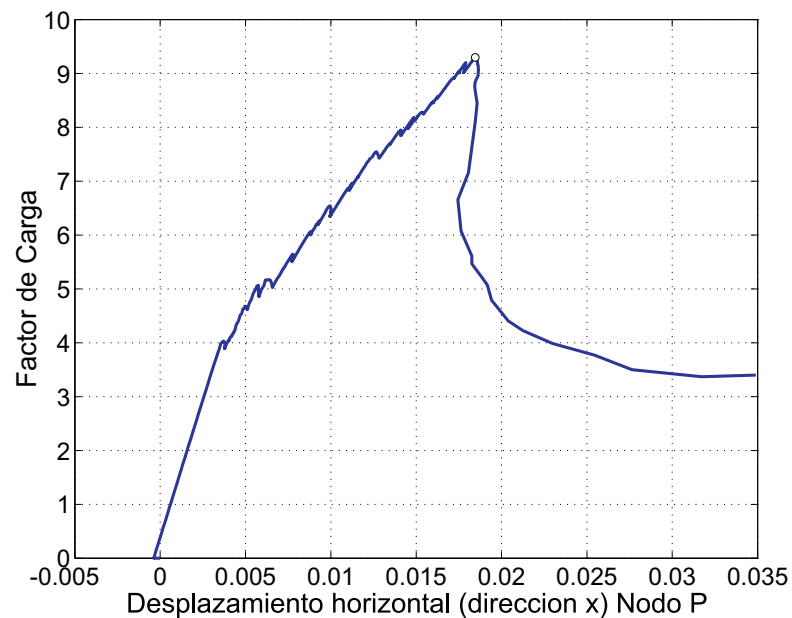


Figura D.7: Presa de Scalere. Curva de equilibrio: Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal del nodo P.

2 macro fisuras primarias que propagan a través del cuerpo del dique, como se puede observar en las figuras D.10-(a), D.10-(b), D.11-(a) y D.11-(b). Sin embargo, debe hacerse notar que el proceso disipativo completo también involucra un número importante de fisuras secundarias que se desarrollan tanto en el dominio de la presa como en la roca de fundación.

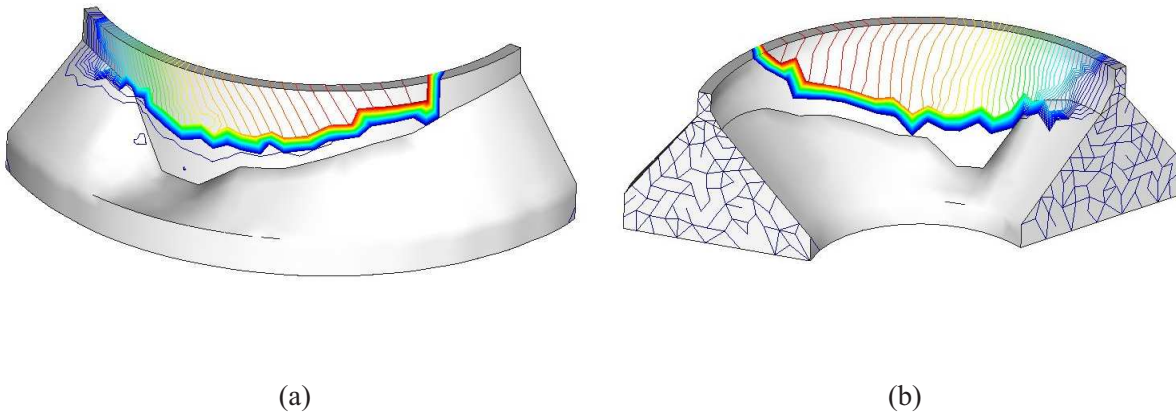


Figura D.8: Presa de Scalere. Contornos de igual desplazamiento.

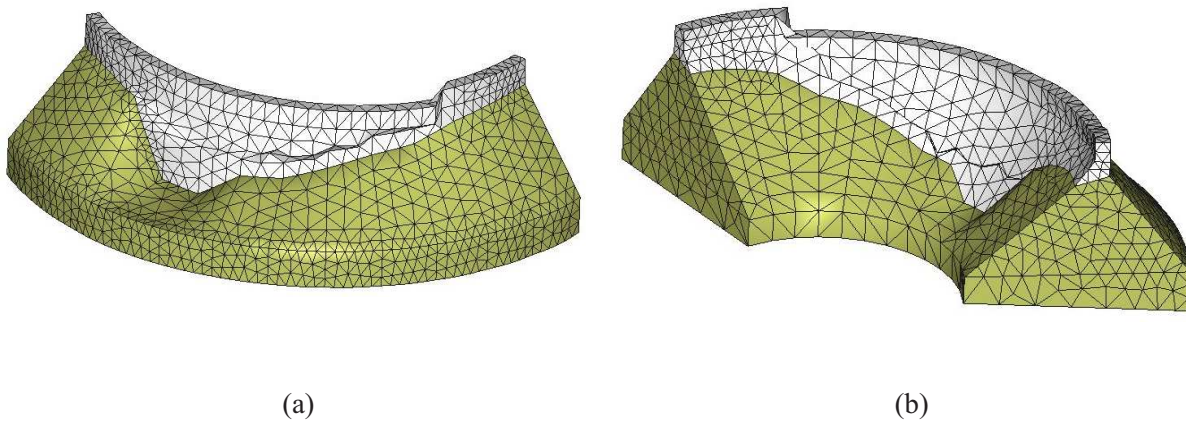


Figura D.9: Presa de Scalere. Geometría en la configuración deformada.

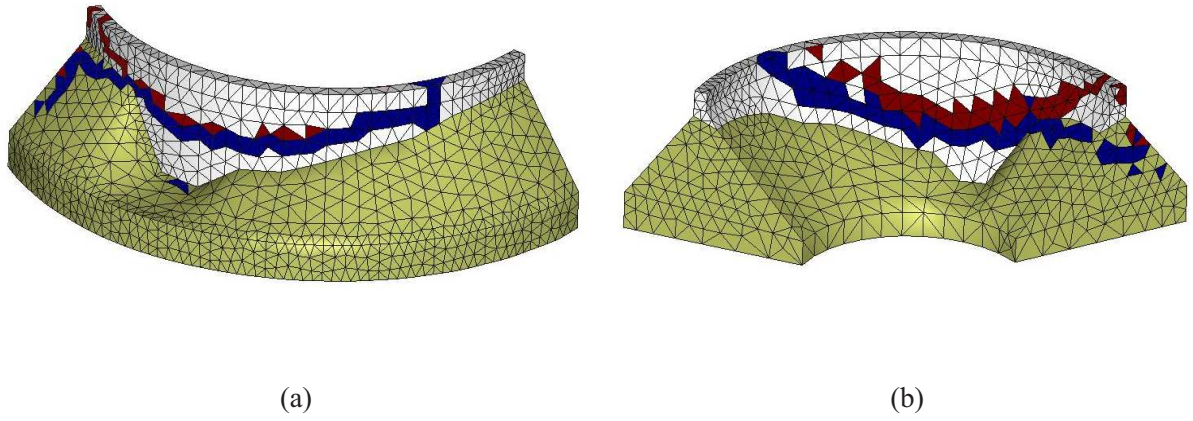


Figura D.10: Presa de Scalere. Trayectorias de fisuras primarias.

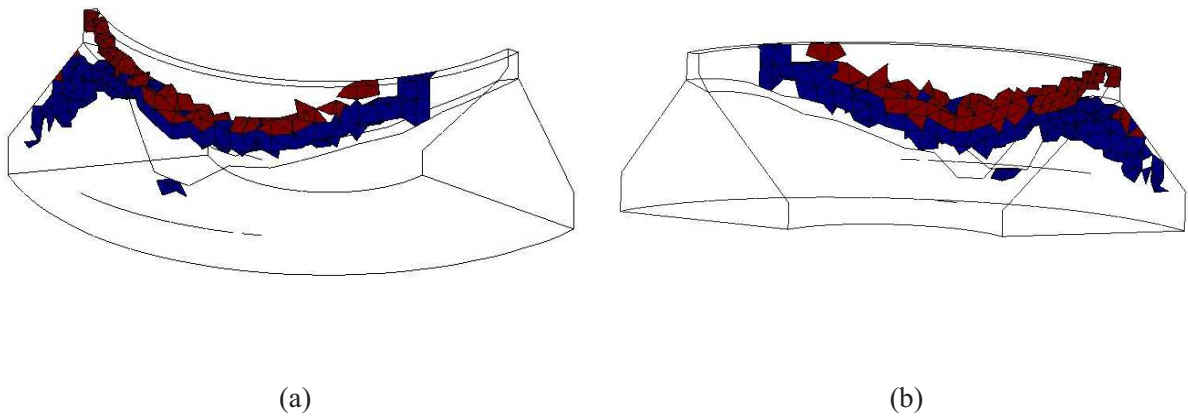


Figura D.11: Presa de Scalere. Trayectorias de fisuras primarias.

Observación 47 *enfaticamos que para resolver cada presa hasta el colapso, en un ordenador personal, el tiempo de cálculo promedio ha sido de 2 : 15 horas.*

Observación 48 *la idea que se pretende transmitir, mediante los resultados mostrados en este anexo, es la capacidad que posee el modelo de falla utilizado y la potencialidad del mismo (bajo costo computacional) para encarar los primeros estudios de vulnerabilidad y confiabilidad estructural aplicando conceptos de mecánica de fractura mediante aproximaciones por discontinuidades fuertes. Esta aplicación práctica, de gran interés ingenieril, se considera un aporte novedoso en el contexto de la presente investigación.*

Bibliografía

- [ABS98] H. Askes, L. Bodé, and L. Sluys. Ale analyses of localization in wave propagation problems. *Mech. Coh-frict. Mat.*, 3:105–126, 1998. [13](#)
- [AG96] F. Armero and K. Garikipati. An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization. *Int. J. Solids Struct.*, 33:2863–2885, 1996. [14](#), [58](#), [122](#)
- [AI82] M. Arrea and A.R. Ingraffea. Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete. Technical Report 81-13, Dept. of Struct. Engrg., 1982. [81](#), [205](#)
- [Aif84a] E. Aifantis. On the microstructural origin of certain inelastic models. *ASME J. Engrg Mat. Tech.*, 106:326–334, 1984. [12](#)
- [Aif84b] E. Aifantis. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *J. Engrg Sci.*, 30:1279–1299, 1984. [12](#), [172](#)
- [Alf03] J. Alfaiate. New developments in the study of strong embedded discontinuities in finite elements. *Adv. Fract. Damage Mech.*, 251-252:109–114, 2003. [58](#)
- [Asa83] R.J. Asaro. Micromechanics of crystals and polycrystals. *Advances in Appl. Mech.*, 23:1–115, 1983. [129](#)
- [Bab71] I. Babuska. Error bounds for finite element methods. *Numerical Mathematics*, 16:322–333, 1971. [95](#)
- [Bar62] G. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7:55–129, 1962. [13](#)
- [Baz76] Z. Bazant. Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. *ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, 102:331–344, 1976. [7](#), [10](#)
- [BB91] T. Belytschko and L. P. Bindeman. Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 88:311–340, 1991. [105](#)
- [BBC84] Z. Bažant, T. Belytschko, and T. Chang. Continuum theory for strain softening. *ASCE J. Engr. Mech.*, 110:1666–1692, 1984. [11](#)
- [BBG⁺01] Satish Balay, Kris Buschelman, William D. Gropp, Dinesh Kaushik, Matt Knepley, Lois Curfman McInnes, Barry F. Smith, and Hong Zhang. Petsc home page. <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, 2001. [195](#)
- [BBG⁺02] Satish Balay, Kris Buschelman, William D. Gropp, Dinesh Kaushik, Matt Knepley, Lois Curfman McInnes, Barry F. Smith, and Hong Zhang. Petsc users manual. Technical Report ANL-95/11 - Revision 2.1.5, Argonne National Laboratory, 2002. [195](#)
- [BC80] Z. Bazant and L. Cedolin. Fracture mechanics of reinforced concrete. *J. Eng. Mech. Div ASCE*, pages 1287–1305, 1980. [89](#)
- [BCV91] P. Bocca, A. Carpinteri, and S. Valente. Mixed mode fracture of concrete. *Int. J. Solids Struct.*, 27:1139–1153, 1991. [14](#)
- [BCXZ03] T. Belytschko, H. Chen, J.X. Xu, and G. Zi. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 58:1873–1905, 2003. [58](#)
- [BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1991. [95](#), [134](#)

- [BFE88] T. Belytschko, J. Fish, and B. Engelman. A finite element with embedded localization zones. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 70:59–89, 1988. 10, 14
- [BGMS97] Satish Balay, William D. Gropp, Lois Curfman McInnes, and Barry F. Smith. Efficient management of parallelism in object oriented numerical software libraries. In E. Arge, A. M. Bruaset, and H. P. Langtangen, editors, *Modern Software Tools in Scientific Computing*, pages 163–202. Birkhauser Press, 1997. 195
- [BH82] A.Ñ. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 32:199–259, 1982. 94
- [BL88] Z. Bažant and F. Lin. Non-local yield limit degradation. *Int J. Numer. Meth. Engrg.*, 26:1805–1823, 1988. 11, 171
- [BMUP01] T. Belytschko, N. Moës, S. Usui, and C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 50:993–1013, 2001. 14, 58, 66
- [BO83] Z. Bažant and B.H. Oh. Crack band theory for fracture concrete. *Materials and Structures.*, 16:155–177, 1983. 9, 10
- [BOG00] T. Belytschko, D. Organ, and C. Gerlach. Element-free galerkin methods for dynamic fracture in concrete. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 187:385–399, 2000. 13
- [BOLK84] T. Belytschko, J. S.-J. Ong, W. K. Liu, and J. M. Kennedy. Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 43:251–276, 1984. 94
- [BP98] Z.P. Bazant and J. Planas. *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1998. 8, 41
- [BPC88] Z. Bažant and G. Pijaudier-Cabot. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *ASME J. Appl. Mech.*, 55(2):287–293, 1988. 11, 171
- [BR00] R.L. Borja and R.A. Regueiro. A finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous field based on standard galerkin approximation. *Comp. Meth. Appl. Mech. in Engrg.*, 190:1529–1549, 2000. 58
- [Bre74] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and aproximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers. *RAIRO*, 8-R2:129–151, 1974. 95
- [Car89] A. Carpinteri. Post-peak and post-bifurcation analysis of cohesive cracks propagation. *Engrg. Fract. Mech.*, 32:265–278, 1989. 14
- [CB00] R. Codina and J. Blasco. Stabilized finite element method for the transient navier-stokes equations based on a pressure gradient projection. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 182:277–300, 2000. 93, 98
- [CCVdS03] M. Cervera, M. Chiumenti, Q. Valverde, and C. Agelet de Saracibar. Mixed linear/linear simplicial elements for incompressible elasticity and plasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 192:5249–5263, 2003. 94, 99, 190
- [Cha03] E.W.V. Chaves. *A three dimensional settings for strong discontinuities modelling in failure mechanics*. PhD thesis, E.T.S. Enginyers de Camins, Canals i Ports, Technical University of Catalonia (UPC), Barcelona, 2003. 39
- [CMP04] C. Comi, S. Mariani, and U. Perego. An extended finite element strategy for the analysis of crack growth in damaging concrete structures. In P.Ñeittaanmäki, T. Rossi, S. Korotov, E. Oñate, J. Périaux, and D. Knörzer, editors, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2004*, Jyväskylä, 2004. 164, 185
- [Cod00a] R. Codina. Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 190:1579–1599, 2000. 93, 94, 98, 100, 102, 192
- [Cod00b] R. Codina. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal sub-scales. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 191:4295–4321, 2000. 190, 192
- [CRCN80] R.J. Cope, P.V. Rao, L.A. Clark, and P. Norris. Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridges slabs. In C. Taylor et al., editor, *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, volume 1, pages 457–470, Swansea, 1980. Pineridge Press. 10
- [CVdSC02a] M. Chiumenti, Q. Valverde, C. Agelet de Saracibar, and M. Cervera. A stabilized formulation for incompressible elasticity using linear displacement and pressure interpolations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 191:5253–5264, 2002. 94, 98, 102

- [CVdSC02b] M. Chiumenti, Q. Valverde, C. Agelet de Saracibar, and M. Cervera. Una formulación estabilizada para plasticidad incompresible usando triángulos y tetraedros con interpolaciones lineales en desplazamientos y presiones. *Métodos Numéricos en Ingeniería V*, 2002. 94, 99, 100
- [DA91] E. Dvorkin and A. Assanelli. 2d finite element with displacement interpolated embedded localization lines: the analysis of fracture in frictional materials. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 90:829–844, 1991. 14
- [DA00] E. Dvorkin and A. Assanelli. Implementation and stability analysis of the qmitc-tlh elasto-plastic finite strain (2d) element formulation. *Computers and Structures*, 75:305–312, 2000. 94
- [dB91] R. de Borst. Simulation of strain localization: A reappraisal of the cosserat continuum. *Eng. Comput.*, 8:317–332, 1991. 12
- [dB93] R. de Borst. A generalisation of j2-flow theory for polar continua. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 103:347–362, 1993. 12
- [dBM92] R. de Borst and H. Mühlhaus. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. *Int J. Numer. Meth. Engrg.*, 35(3):521–539, 1992. 12, 172
- [dBN85] R. de Borst and P. Nauta. Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. *Engineering Computations*, 2:35–46, 1985. 10
- [dBPPS95] R. de Borst, J. Pamin, R. Peerlings, and L. Sluys. On gradient-enhanced damage and plasticity models for failure in quasi-brittle and frictional materials. *Comp. Mech.*, 17:130–141, 1995. 12
- [dBSMP93] R. de Borst, L. Sluys, H. Mühlhaus, and J. Pamin. Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, 10:99–121, 1993. 11
- [DnG90] E. Dvorkin, A. Cuti no, and G. Gioia. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 30:541–564, 1990. 14, 58
- [Dug60] D. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8:100–108, 1960. 13
- [EGGP02] M. Elices, G.V. Guinea, J. Gómez, and J. Planas. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:137–163, 2002. 13
- [EN98] G. Etse and M.Ñieto. Micropolar regularization in concrete plasticity. In *Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, 1998. Springer Verlag. 12
- [FH88] L. P. Franca and T. J. R. Hughes. Two classes of mixed finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 69:89–129, 1988. 94
- [FH04] C. Feist and G. Hofsteller. Computational aspect of concrete fracture simulations in the framework of the sda. In *Fracture Mechanics of Concrete Structures FRAMCOS*, Vale, Co, USA, 2004. 66
- [GA84] A.K. Gupta and H. Akbar. Cracking in reinforced concrete analysis. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 110(8):1735–1746, 1984. 10
- [GdBP00] M.G.D. Geers, R. de Borst, and R.H. Peerlings. Damage and crack modelling in single-edge and double-edge notched concrete beams. *Engrg. Fracture Mech.*, 65:247–261, 2000. 182
- [GH98] K. Garikipati and T.J.R. Hughes. A study of strain-localization in a multiple scale framework. The one dimensional problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 159:193–222, 1998. 58
- [GH03] T.C. Gasser and G.A. Holzapfel. Geometrically non-linear and consistently linearized embedded strong discontinuity models for 3d problems with an application to the dissection analysis of soft biological tissues. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192:5059–5098, 2003. 58
- [GH05] T.C. Gasser and G.A. Holzapfel. Modeling 3d crack propagation in unreinforced concrete using pufem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194:2859–2896, 2005. 165
- [GLS95] W. Gropp, E. Lusk, and A. Skeljum. Using mpi: Portable parallel programming with the message passing interface. Technical report, MIT Press, 1995. 195

- [GMMF03] G. Guisepetti, G. Mazzr, M. Meghella, and M. Fanelli. In *Seventh Benchmark Workshop On Numerical Analysis Dams*, Bucharest, Romania, <http://www.rocold.ro/themea.htm>, 2003. Marinus Nujhoff. 207
- [HF88] T. J. R. Hughes and L. P. Franca. A mixed finite element formulation for Reissner-Mindlin plate theory: uniform convergence of all higher-order spaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 67:223–240, 1988. 94
- [HFB85] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and M. Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of Stokes problem accommodating equal-order interpolation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 59:85–99, 1985. 94, 98
- [Hil50] R. Hill. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press, Oxford, 1950. 29
- [Hil58] R. Hill. General theory of uniquenesses and stability in elasto-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 6:236–249, 1958. 5, 7
- [Hil62] R. Hill. Accelerations waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:1–16, 1962. 9
- [HMP76] A. Hillerborg, M. Modeer, and P. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and concrete research*, 6(6):163–168, 1976. 13
- [Hug87] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1987. 95
- [Hug95] T.J.R. Hughes. Multiscale phenomena: Green’s functions dirichlet-to-neumann formulation, sub-grid scale models, bubbles and the origins of stabilized formulations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 127:387–401, 1995. 187
- [Ing13] C. Inglis. Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. In *Int. Naval Architects*, 1913. 8
- [Irw57] G. Irwin. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate. *Transactions ASME, J. Appl. Mech*, 1957. 9
- [Irw58] G. Irwin. *Fracture, Handbuch der Physik*, volume VI. Springer, Berlin, 1958. 9
- [Jir00] M. Jirásek. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 188:307–330, 2000. 14, 58, 64, 73, 134
- [JNP84] C. Johnson, U. Nävert, and J. Pitkäranta. Finite element methods for linear hyperbolic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 45:285–312, 1984. 94
- [JZ97] M. Jirásek and Th. Zimmermann. Rotating crack model with transition to scalar damage: 1. local formulation, 2. nonlocal formulation and adaptativity. Technical Report 97/01, LSC, January 1997. 11
- [JZ98a] M. Jirásek and Th. Zimmermann. Analysis of rotating crack model. *J. Eng. Mech., ASCE*, 124:842–851, 1998. 11
- [JZ98b] M. Jirásek and Th. Zimmermann. Rotating crack model with transition to scalar damage. *J. Eng. Mech., ASCE*, 124:277–284, 1998. 11
- [Kac58] L. M. Kachanov. Time of rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tech. Nauk.*, 8:26–31, 1958. 9
- [Kac71] L. M. Kachanov. *Foundation of the theory of plasticity*. North-Holland Pub. Co., Neetherlands, 1971. 111
- [Kac86] L. M. Kachanov. *Introduction to continuum damage mechanics*. Nijhoff, Dordrecht, Neetherlands, 1986. 9, 31
- [KHBL85] A.S. Kobayashi, M.N. Hawkins, D.B. Barker, and B.M. Liaw. Fracture process zone in concrete. In S.S.P., editor, *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites*, pages 25–50, Dordrecht, 1985. Marinus Nujhoff. 72
- [KK97] G. Karypis and V. Kumar. Metis 3.0: Unstructured graph partitioning and sparse matrix ordering system, 1997. 196
- [KMS99] O. Klaas, A. Maniatty, and M. S. Shephard. A stabilized mixed finite element method for finite elasticity. Formulation for linear displacement and pressure interpolation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 180:65–79, 1999. 94, 98, 99

- [KP85] M.F. Kanninen and C.H. Popelar. *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press, 1985. [9](#), [157](#)
- [KRS91] M. Klisinski, K. Runesson, and S. Sture. Finite element with inner softening band. *ASCE J. Eng. Mech.*, 117:575–587, 1991. [14](#)
- [LB88] D. Lasry and T. Belytschko. Localization limiters in transient problems. *Int J. Solids Struct.*, 24:581–597, 1988. [12](#), [175](#)
- [LC90] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mechanics of solids materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. [29](#), [31](#)
- [LP90] B. Loret and J. Prévost. Dynamic strain localization in elasto-(visco-)plastic solids, part 1. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 83:247–273, 1990. [12](#)
- [LPRS05] P. Laborde, J. Pommier, Y. Renard, and M. Salaün. High order extended finite element method for cracked domains. In *Computational Plasticity VIII: Fundamentals and Applications*, Barcelona, 2005. [165](#)
- [LR96] R. Larsson and K. Runesson. Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity. *ASCE J. Eng. Mech.*, 122:402–411, 1996. [14](#)
- [LR00] K. Liao and K.L. Reifsnider. A tensile strength model for unidirectional fiber-reinforced brittle matrix composite. *Int. J. Fract.*, 106:95–115, 2000. [89](#)
- [LRO93] R. Larsson, K. Runesson, and N.S. Ottosen. Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 36:2087–2105, 1993. [64](#)
- [LS94] M. Lyly and R. Stenberg. Stabilized mitc plate bending elements. In *2nd Int. Conf. on Computational Structures Technology*, pages 11–16, Athens, Greece, 1994. [94](#)
- [LS95] H. Lotfi and P. Shing. Embedded representation of fracture in concrete with mixed elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 38:1307–1325, 1995. [14](#)
- [Lub90] J. Lubliner. *Plasticity theory*. Macmillan Publishing Company, New York, 1990. [29](#)
- [MA91] H.B. Mühlhaus and E.C. Aifantis. A variational principle for gradient plasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 28:845–857, 1991. [175](#)
- [MB02] N. Moës and T. Belytschko. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:813–833, 2002. [14](#)
- [MM03] J. Mosler and G. Meschke. 3d modelling of strong discontinuities in elastoplastic solids: fixed and rotating localization formulations. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 57:1553–1576, 2003. [58](#), [66](#)
- [MM04] J. Mosler and G. Meschke. Embedded crack vs. smeared crack models: a comparison of elementwise discontinuous crack path approaches with emphasis on mesh bias. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193:3351–3375, 2004. [58](#)
- [MMdSC04] Cervera M., Chiumenti M., and Agelet de Saracibar C. Shear band localization via local j2 continuum damage mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:849–880, 2004. [123](#)
- [MP03] S. Mariani and U. Perego. Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 58:103–126, 2003. [58](#)
- [MSMT00] N. Moës, N. Sukumar, B. Moran, and Belytschko T. An extended finite element method (X-FEM) for two and three-dimensional crack modelling. In *ECCOMAS 2000*, Barcelona, Spain, September 11-14, 2000. Vienna University of Technology, Austria, ISBN 3-9501554-0-6. [58](#)
- [MV87] H. Mühlhaus and I. Vardoulakis. The thickness of shear bands in granular materials. *Geotechnic*, 37:271–283, 1987. [12](#)
- [Nee88] A. Needleman. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 67:69–86, 1988. [12](#)
- [NW-] Thematic network on the integrity assessment of large concrete dams (nw-ialad). Technical report, <http://nw-ialad.uibk.ac.at/>. [207](#)
- [OCM97] J. Oliver, M. Cervera, and O. Manzoli. On the use of j2 plasticity models for the simulation of 2d strong discontinuities in solids. In E. Hinton D.R.J. Owen, E. Oñate, editor, *Int. Conference on Comput. Plasticity*, pages 38–55, CIMNE, Barcelona, Spain, 1997. [14](#), [49](#)

- [OCM99] J. Oliver, M. Cervera, and O. Manzoli. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *Int. J. Plasticity*, 15(3):319–351, 1999. [50](#), [121](#)
- [OCOL] J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, and J. Lubliner. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. In *N.B. et al. editor, SCI-C Computer Aided Analysis and design of concrete Structures*, Swansea. Pineridge Press. [31](#), [35](#)
- [OH04] J. Oliver and A.E. Huespe. Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios. *Comp. Meth. Appl. Mech. in Engrg.*, 193:2987–3014, 2004. [39](#), [54](#), [58](#), [64](#), [65](#), [66](#), [67](#)
- [OHBL05] J. Oliver, A.E. Huespe, S. Blanco, and D.L. Linero. Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure in the strong discontinuity approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. in Engrg.*, (Article in press. Available on line at www.sciencedirect.com, from November 2005), 2005. [59](#), [71](#), [143](#), [166](#)
- [OHP⁺04a] J. Oliver, A. E. Huespe, M. D. G. Pulido, S. Blanco, and D. L. Linero. New developments in computational material failure mechanics. In *Sixth World Congress on Computational Mechanics (WCCM VI)*, Beijing, PR China, 2004. [59](#)
- [OHP⁺04b] J. Oliver, A. E. Huespe, M. D. G. Pulido, S. Blanco, and D. L. Linero. Recent advances in computational modelling of material failure. In K. Majava P.Ñeittaanmäki, T. Rossi and O. Pironneau), editors, *European Congress on Comput. Methods in Appl. Sciences and Eng., ECOMAS 2004*, Jyväskylä, Finland, 2004. [59](#), [71](#), [166](#)
- [OHPC02] J. Oliver, A. E. Huespe, M. D. G. Pulido, and E. Chaves. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:113–136, 2002. [56](#), [72](#)
- [OHS] J. Oliver, A.E. Huespe, and P.J. Sánchez. A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: e-fem vs x-fem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, accepted for publication. [18](#), [57](#), [169](#)
- [OHS03] J. Oliver, A. Huespe, and E. Samaniego. A study on finite elements for capturing strong discontinuities. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 56:2135–2161, 2003. [62](#), [134](#)
- [Oli98] J. Oliver. The strong discontinuity approach: an overview. In E. Dvorkin S. Idelsohn, E. Oñate, editor, *Comput. Mech.: New Trends and Applications. WCCM98 Proc. (CD-ROM) IV World Congress on Comput. Mech.*, CIMNE, Barcelona, Spain, 1998. [14](#), [50](#)
- [Oli00] J. Oliver. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *Int. J. Solids Struct.*, 37:7207–7229, 2000. [41](#), [52](#), [54](#), [64](#)
- [Oli5a] J. Oliver. Continuum modelling of strong discontinuities in solids mechanics. In E. Hinton D.R.J. Owen, E Oñate, editor, *Int. Conference on Comput. Plasticity: Fundamentals and Applications, vol 1.*, pages 455–479, CIMNE, Barcelona, España, 1995a. Pineridge Press. [14](#), [15](#)
- [Oli5b] J. Oliver. Continuum modelling of strong discontinuities in solids mechanics using damage models. *Comput. Mech.*, 17(1-2):49–61, 1995b. [14](#)
- [Oli6a] J. Oliver. Modelling strong discontinuities in solids mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals. *Int. j. numer. methods eng.*, 39(21):3575–3600, 1996a. [14](#), [46](#), [122](#)
- [Oli6b] J. Oliver. Modelling strong discontinuities in solids mechanics via strain softening constitutive equations. part 2: Numerical simulation. *Int. j. numer. methods eng.*, 39(21):3601–3623, 1996b. [14](#), [58](#), [122](#), [132](#), [134](#), [140](#)
- [OLN87] M. Ortiz, Y. Leroy, and A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 61:189–214, 1987. [14](#), [39](#)
- [OR91] N. Ottosen and K. Runesson. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures*, 27(4):401–421, 1991. [7](#), [21](#), [26](#), [28](#), [39](#)
- [PBF97] C. Polizzotto, G. Borino, and P. Fuschi. A thermodynamically consistent formulation of nonlocal and gradient plasticity. *Mech. Research. Comm.*, 25:75–82, 1997. [12](#)
- [PCB87] G. Pijaudier-Cabot and Z. Bažant. Nonlocal damage theory. *ASCE J. Engrg. Mech.*, 113(10):1512–1533, 1987. [11](#), [171](#)

- [PdBBdV96] R. Peerlings, R. de Borst, W. Brekelmans, and J. de Vree. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 39:3391–3403, 1996. [12](#), [172](#), [175](#), [179](#)
- [PdBBG02] R. Peerlings, R. de Borst, W. Brekelmans, and M. Geers. Localization issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21:175–189, 2002. [12](#), [172](#)
- [PE92] J. Planas and M. Elices. Nonlinear fracture of cohesive material. *Int. J. of Fracture*, 51:139–157, 1992. [13](#)
- [Pet81] P. Petersson. Crack growth and development of fracture zone in plain concrete and similar materials. *Technical report TVBM-1006, Lund Institute of Technology*, 1981. [13](#)
- [PGdBB01] R. Peerlings, M. Geers, R. de Borst, and W. Brekelmans. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *Int. J. Solids Struct.*, 38:7723–7746, 2001. [12](#), [171](#), [172](#)
- [PM81] S. Pietruszczak and Z. Mróz. Finite elements analysis of deformation of strain-softening materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17:327–334, 1981. [10](#)
- [PPL⁺05] M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, N. Lagaros, J. Oliver, A.E. Huespe, and P.J. Sánchez. Vulnerability analysis of large concrete dams using the continuum strong discontinuity approach and neural networks. *Structural Safety*, submitted, 2005. [18](#), [169](#), [203](#)
- [Ras68] Y. R. Rashid. Ultimate strength analysis of prestresses concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Desing*, 7:334–344, 1968. [9](#), [10](#)
- [RB99] R. Rigueiro and R. Borja. A finite element model of localized deformation in frictional materials taking a strong discontinuity approach. *Finite Element in Analysis and Design*, 33:283–315, 1999. [14](#), [122](#), [143](#), [144](#)
- [Ric76] J. Rice. The localization of plastic deformation. In W. Koiter, editor, *Theoretical and Applied Mechanics, 14th IUTAM Congress*, pages 207–220, Amsterdam, North-Holland, 1976. [5](#), [7](#), [9](#), [26](#)
- [ROP91] K. Runesson, N.S. Ottosen, and D. Peric. Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *Int. J. of Plasticity*, 7:99–121, 1991. [22](#)
- [Rot88] J. Rots. *Computational modelling of concrete fracture*. PhD thesis, Delft University, Netherlands, 1988. [10](#), [72](#)
- [RPKB85] J. Rots, Nauta P., G. M. A. Kusters, and T. Blaauwendraad. Smearred crack approach and fracture localization in concrete. *HERON.*, 1, 1985. [9](#), [81](#)
- [RR75] J. Rudnicki and J. Rice. Condition for the localization of deformations in pressure sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371–394, 1975. [5](#), [7](#), [9](#), [21](#), [26](#)
- [RR80] J. Rice and J. Rudnicki. A note on some features of the theory of localization of deformation. *Int. J. Solids Structures*, 16:597–605, 1980. [22](#), [26](#), [28](#)
- [Run98] K. Runesson. *Constitutive theory and computational technique for dissipative materials with emphasis on plasticity, viscoplasticity and damage. Part II: Models and algorithms for geometrically linear theory*. Course Notes, 1998. [29](#)
- [SB98] L. Sluys and A. Berends. Discontinuous failure analysis for mode-i and mode-ii localization problems. *Int. J. Solids Struct.*, 35:4257–4274, 1998. [14](#)
- [SB05] E. Samaniego and T. Belytschko. Continuum-discontinuum modelling of shear bands. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62:1857–1872, 2005. [122](#)
- [SdBM93] L. Sluys, R. de Borst, and H. Mühlhaus. Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium. *Int. J. Solids Struct.*, 30:1153–1171, 1993. [12](#)
- [SDP⁺03] M. Storti, L. Dalcin, R. Paz, A. Yommi, V. Sonzogni, and N. Nigro. An interface strip preconditioner for domain decomposition methods. *J. Comput. Methods Sciences and Eng.*, (in press), 2003. [198](#)
- [SH98] J. Simo and T. Hughes. *Computational inelasticity*. Springer-Verlag, 1998. [29](#), [142](#)
- [SHS04] P.J. Sánchez, A.E. Huespe, and V. Sonzogni. Numerical performance of a mixed stabilized finite element technology for solid mechanics. parallel implementation. In G. Buscaglia, E. Dari, and O. Zamonski, editors, *XIV Congreso sobre métodos numéricos y sus aplicaciones ENIEF 2003*, San Carlos de Bariloche, Argentina, 2004. AMCA. [19](#), [94](#), [169](#), [195](#)

- [Sim04] A. Simone. Partition of unity-based discontinuous elements for interface phenomena: computational issues. *Commun. Numer. Methods Engrg.*, 20:465–478, 2004. **58**, **165**
- [SJ87] J.C. Simo and J.W. Ju. Strain -and stress- based continuum damage models -ii formulation. *Int. J. Solids Struc.*, 23:841–869, 1987. **31**, **33**
- [Slu97] L. J. Sluys. Discontinuous modeling of shear banding. In E. Hinton D.R.J. Owen, E Oñate, editor, *Conference on Comput. Plasticity: Fundamentals and Applications.*, pages 735–744, CIMNE, Barcelona, España, 1997. **10**
- [SNP] M. Storti, N. Nigro, and R. Paz. *PETSc-FEM A general purpose, parallel, multy-physics fem program.* International Center of Computational Method in Engineering (CIMEC), <http://www.cimec.org.ar/petscfem/>. **195**
- [SO94] J. Simo and J. Oliver. A new approach to the analysis and simulation of stong discontinuities. In M. Jirásek J. Mazars Z.B. Bažant, Z. Bittnar, editor, *Fracture and Damage in Quasi-brittle Structures.*, pages 25–39. E & FN Spon, 1994. **15**
- [SOA93] J. Simo, J. Oliver, and F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Comput. Mech.*, 12:277–296, 1993. **14**, **41**
- [SOHS05] P.J. Sánchez, J. Oliver, A.E. Huespe, and V. Sonzogni. Finite elements with embedded strong discontinuities for the numerical simulation in failure mechanics: E-fem and x-fem. In A. Larrateguy, editor, *VII Congreso Argentino de Mecánica Computacional*, Buenos Aires, Argentina, 2005. AMCA. **18**, **57**, **169**
- [SR82] S. W. Sloan and M. F. Randolph. Numerical prediction of collapse loads using finite element methods. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 6:47–76, 1982. **94**
- [SR90] J. Simo and M. Riffai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Methods eng.*, 29:1595–1638, 1990. **14**, **58**, **94**
- [SS73] M. Suidan and W.C. Schnobrich. Finite element analysis of reinforced concrete. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 99(10):2109–2122, 1973. **10**
- [SS03] B.W. Spencer and P.B. Shing. Rigid-plastic interface for an embedded crack. *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 56:2163–2182, 2003. **58**
- [SS04] A. Simone and L. Sluys. The use of displacement discontinuities in a rate-dependent medium. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193:3015–3033, 2004. **164**, **185**
- [SSH03] P.J. Sánchez, V. Sonzogni, and A.E. Huespe. Modelización de fractura utilizando un modelo de gradientes implícito. In M. Rosales, V. Cortinez, and V. Bambill, editors, *XIV Congreso sobre métodos numéricos y sus aplicaciones ENIEF 2003*, pages 2233–2247, Bahía Blanca, Argentina, 2003. AMCA. **17**, **168**, **171**
- [SSH04a] P.J. Sánchez, V. Sonzogni, and A.E. Huespe. Elemento finito estabilizado con discontinuidades fuertes embebidas para plasticidad isocórica. In G. Buscaglia, E. Dari, and O. Zamonski, editors, *XIV Congreso sobre métodos numéricos y sus aplicaciones ENIEF 2003*, San Carlos de Bariloche, Argentina, 2004. AMCA. **19**, **121**, **169**
- [SSH04b] P.J. Sánchez, V. Sonzogni, and A.E. Huespe. Evaluation of a stabilized mixed finite element for solid mechanics problems and its parallel implementation. *Computers and Structures*, submitted, 2004. **19**, **94**, **95**, **169**, **195**
- [SSHO06] P.J. Sánchez, V. Sonzogni, A.E. Huespe, and J. Oliver. Stabilized mixed finite elements with embedded strong discontinuities for shear band modellig. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, accepted for publication, 2006. **19**, **121**, **169**
- [SW91] P. Steinmann and K. Willam. Localization within the framework of micropolar elastoplasticity. In V. Mannl et al., editor, *Advances in continuum mechanics*, pages 296–313, Berlin, 1991. Springer Verlag. **12**
- [SWS03] A. Simone, G. Wells, and L. Sluys. Discontinuities in regularised media. In *VII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS 2003.*, 2003. **182**, **185**
- [TH92] V. Tvergaard and J.W. Hutchinson. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elasto-plastic solids. *J. of the Mech. Phys. Solids*, 40:1377–1397, 1992. **13**
- [TMRS92] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray, and R. Shih. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal order interpolation velocity-pressure elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 95:221–242, 1992. **99**

- [TN95] V. Tvergaard and A. Needleman. Effects of nonlocal damage in porous plastic solids. *Int J. Solids Struct.*, 32(8/9):1063–1077, 1995. 11
- [TPM96] K. Terzaghi, R. Peck, and G. Mesri. *Soil mechanics in engineering practice*. J. Wiley, New York, 1996. 2
- [Val02] Q. Valverde. *Elementos estabilizados de bajo orden en mecánica de sólidos*. PhD thesis, UPC, ETSCCP, Barcelona, Spain, 2002. 94, 99
- [WBR98] W. A. Wall, M. Bishcoff, and E. Ramm. Stabilization techniques for fluid and structural finite elements. *Comput. Mech., New Trends and Applications, CIMNE, Barcelona, Spain*, 1998. 94
- [Wil00] K. William. Constitutive models for engineering materials. In *Encyclopedia of Physical Science and Technology, Academic Press*, pages 603–633, New York, 2000. 39
- [WS87] K. William and N. Sobh. Biurcation analysis of tangential material operators. In J. Middleton G.N. Pande, editor, *Transient/Dynamic Analysis and Constitutive Laws for Engineering Materials*, volume 2, pages C4/1–C4/13. Martinuss-Nijhoff, 1987. 39, 66
- [WS01] G. Wells and L. Sluys. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 50:2667–2682, 2001. 14, 58
- [YRC98] B. Yang and K. Ravi-Chandar. A single-domain dual-boundary-element formulation incorporating a cohesive zone model for elastoplastic cracks. *Int. J. Fract.*, 93:115–144, 1998. 13
- [ZB03] G. Zi and T. Belytschko. New crack-tip elements for xfem and applications to cohesive cracks. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 57:2221–2240, 2003. 165
- [ZT00] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2000. 95