

CUANTIFICACIÓN FÍSICA DE DAÑO MUY CONCENTRADO EN VIGAS A PARTIR DE LA CURVATURA MODAL

PHYSICAL QUANTIFICATION OF HIGHLY CONCENTRATED DAMAGE IN BEAMS FROM MODAL CURVATURE

Hernán Garrido, Oscar Curadelli y Daniel Ambrosini

*Grupo de Dinámica Experimental, IMERIS, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo,
Mendoza, Argentina; CONICET, Argentina; carloshernangarrido@gmail.com,
ocuradelli@fing.uncu.edu.ar, dambrosini@uncu.edu.ar*

Palabras clave: forma modal, curvatura modal, diferencias finitas, rigidez flexional, daño.

Resumen. Las formas modales obtenidas experimentalmente contienen importante información acerca de la salud estructural. En particular, la curvatura modal estimada numéricamente a partir de dichas formas modales ha sido útil para detectar y localizar daño muy concentrado; pero no para cuantificarlo físicamente, porque en la práctica el error numérico es grande y dependiente del tamaño del paso. En vista de esto, el presente trabajo propone una reinterpretación de las fórmulas clásicas de diferencias finitas, demostrando que son también aproximaciones de los valores medios de las derivadas a lo largo de un intervalo asociado a la disposición de los puntos de muestreo. Esta reinterpretación permite determinar una relación explícita entre la curvatura modal, estimada con una disposición de puntos de muestreo, y la rigidez flexional del tramo asociado a dicha disposición. A partir de este dato físicamente representativo de un tramo, podrían hacerse estimaciones más certeras del grado de daño real, con cierta independencia del paso. La metodología propuesta se puso a prueba mediante el análisis modal de un modelo de elementos finitos de una viga simplemente apoyada con distintas reducciones de sección.

Keywords: Instructions, AMCA style, Computational Mechanics, article.

Abstract. Experimental mode shapes contain relevant information about structural health. In particular, modal curvature numerically estimated from such mode shapes has shown to be useful to detect and localize concentrated damage; although not to quantify it physically; since, in practice, numerical error is big and dependent on the step size. In view of this, the present paper proposes a reinterpretation of classical finite difference formulas, showing that they are also approximations of derivative mean values along an interval related to the layout of sampling points. This reinterpretation allows obtaining an explicit relation between the estimated modal curvature and the flexural stiffness of a beam segment related to that layout. From this data physically representative of the beam segment, estimations of actual damage could be done, with independence of the step size. The methodology was tested through the modal analysis of the FE model of a simply supported beam with different cross section reductions.

1 INTRODUCCIÓN

En el caso de una estructura monitoreada, los parámetros modales, y especialmente las formas modales obtenidas experimentalmente, contienen importante información acerca de su salud estructural (He et al., 2001; Moughty y Casas, 2017).

Desafortunadamente, esta información se encuentra enmascarada por el ruido de medición y la física propia del sistema dinámico (Moreno-García et al., 2014). Desde la propuesta original de Pandey (1991), muchos autores han mostrado que el daño en distintos puntos de una viga (interpretado como reducción de rigidez flexional) está fuertemente relacionado con la curvatura modal (Dessi y Camerlengo, 2015).

Sin embargo, no se han encontrado relaciones matemáticas explícitas entre la curvatura modal y la magnitud física del daño (interpretado como reducción de rigidez), salvo por los trabajos de Maeck et al. (2000) y Yang et al. (2013). La principal causa de este inconveniente es que la curvatura modal se obtiene con una fórmula de diferencias finitas cuyo resultado es sensible al tamaño del paso; e.g. separación entre sensores o puntos de muestreo espacial.

Este problema se acentúa gravemente cuando el daño es muy concentrado, i.e. cuando su extensión es menor que el tamaño del paso. Más aún, esta situación es muy frecuente en la práctica; porque se utilizan grandes tamaños de paso para mitigar el error de precisión. Este error de precisión es muy importante en funciones obtenidas experimentalmente, a tal punto que se ha invertido tiempo en investigar los tamaños de paso óptimos (Moreno-García et al., 2014). Esto ha llevado a que, en la práctica, la curvatura modal sea útil para detectar y localizar daño; pero no para cuantificarlo en términos físicos.

En vista de estos problemas irresueltos, el presente trabajo propone una reinterpretación de las fórmulas clásicas de diferencias finitas (Burden y Faires, 2011). Específicamente, se puede demostrar que dichas fórmulas son también aproximaciones de los valores medios de las derivadas a lo largo de un intervalo asociado a la disposición de puntos de muestreo. Como dicha demostración no pudo encontrarse en la bibliografía consultada, se presenta brevemente en este trabajo.

Esta reinterpretación permite, para una viga simplemente apoyada, determinar una relación explícita entre la curvatura modal, estimada con una disposición de puntos de muestreo, y la rigidez flexional del tramo asociado a dicha disposición. A partir de este dato físicamente representativo de un tramo, podrían hacerse estimaciones más certeras del grado del daño real (reducción de resistencia), con cierta independencia del tamaño del paso.

La metodología propuesta se puso a prueba mediante el análisis modal de un modelo de elementos finitos de una viga simplemente apoyada con distintas reducciones de sección. Se obtuvieron resultados prometedores que alientan futuras investigaciones experimentales.

2 FORMAS MODALES DE LA VIGA APOYADA

Las formas y frecuencias modales $\phi_n(x)$ y ω_n de una viga con densidad másica ρ , área de sección transversal A , momento de inercia $I(x)$, y módulo de elasticidad E responden a la siguiente ecuación de movimiento (Clough y Penzien, 1995):

$$(EI(x)\phi_n''(x))'' = \omega_n^2 \rho A \phi_n(x). \quad (1)$$

Si la viga está simplemente apoyada y es de sección uniforme o no dañada (i.e., sana), las formas modales resultan:

$$\phi_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2)$$

donde L es la longitud de la viga, x la posición axial, y n el número de modo. Así, su derivada cuarta y la rigidez flexional cumplen con las siguientes relaciones:

$$\phi_n''''(x) = \phi_n(x) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4, \quad (3)$$

$$EI(x) = EI_h = \frac{\phi_n(x)}{\phi_n''''(x)} \omega_n^2 \rho A = \left(\frac{L}{n\pi}\right)^4 \omega_n^2 \rho A. \quad (4)$$

En el caso de una viga con daño concentrado en un entorno $(x_0 - h_d, x_0 + h_d)$ donde la rigidez flexional puntual original $EI(x) = EI_h$ se ha reducido hasta $EI(x_0) = EI_0$, se ha verificado que (Whalen, 2008):

$$\phi_n(x) \approx \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (5)$$

aunque, por el contrario:

$$\phi_n'(x) \neq \left(\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)', \quad (6)$$

pero, sin embargo:

$$\int_0^x \phi_n(\chi) d\chi \approx \int_0^x \text{sen}\left(\frac{n\pi \chi}{L}\right) d\chi = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi \chi}{L}\right). \quad (7)$$

Es decir, el daño concentrado hace que la forma modal $\phi_n(x)$ sufra fluctuaciones pequeñas y concentradas, la cuales se amplifican al derivar pero se atenúan (se suavizan) al integrar.

3 CUANTIFICACIÓN DEL DAÑO A PARTIR DE LA CURVATURA MODAL

Según la teoría de vigas con pequeñas deformaciones elásticas y deformaciones por corte despreciables, incluso para el caso de sección variable (viga dañada), se cumple que:

$$EI(x) = \frac{M_n(x)}{\phi_n''(x)}, \quad (8)$$

donde $M_n(x)$ es el momento flector interno debido a las fuerzas inerciales asociadas al modo n (también llamado momento modal), el cual puede calcularse mediante integración recursiva de las formas modales completas (Yang et al., 2013) o mediante un problema de autovectores y ortogonalización de Gram-Schmith (Maeck et al., 2000).

En este trabajo, se utiliza un método mucho más simple (ausente en la literatura relevada) que se basa en la Ec. (7). La Ec. (1) puede admitirse como un problema estático con carga distribuida $\omega_n^2 \rho A \phi_n(x)$. Por lo tanto, el corte modal resulta:

$$V_n(x) = \int_0^x \omega_n^2 \rho A \phi_n(\chi) d\chi + V_n(0) \approx -\omega_n^2 \rho A \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (9)$$

ya que $V_n(0) = \frac{1}{2} \int_0^L \omega_n^2 \rho A \phi_n(\chi) d\chi = \frac{1}{2} \int_0^L \omega_n^2 \rho A \text{sen}\left(\frac{n\pi \chi}{L}\right) d\chi \approx \omega_n^2 \rho A \frac{L}{n\pi}$. A su vez, integrando este corte modal aproximado, puede aproximarse el momento modal:

$$M_n(x) = \int_0^x V_n(\chi) d\chi \approx -\omega_n^2 \rho A \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -\omega_n^2 \rho A \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \phi_n(x), \quad (10)$$

el cual satisface las condiciones de borde de apoyo simple (i.e. $M_n(0) = M_n(L) = 0$). Esta aproximación es buena porque las pequeñas fluctuaciones de la forma modal son suavizadas dos veces. Así, la rigidez flexional puntual puede aproximarse como:

$$EI(x) = \frac{M_n(x)}{\phi_n''(x)} \approx -\omega_n^2 \rho A \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \frac{\phi_n(x)}{\phi_n''(x)}. \quad (11)$$

Despreciando la variación de masa debida al daño, la razón de reducción de rigidez flexional *puntual* (salud $H_{EI}(x_0)$) es un indicador que se define y puede estimarse como:

$$H_{EI}(x_0) = \frac{EI_0}{EI_h} = \frac{\frac{M_n(x_0)}{\phi_n''(x_0)}}{\left(\frac{L}{n\pi}\right)^4 \omega_n^2 \rho A} \approx \frac{-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \frac{\phi_n(x_0)}{\phi_n''(x_0)}}{\left(\frac{L}{n\pi}\right)^4} = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{\phi_n(x_0)}{\phi_n''(x_0)} \quad (12)$$

La Ec. (12) es aparentemente muy útil pues requiere como único parámetro de “modelo de estructura sana” a la longitud de la viga, y permite estimar la reducción de rigidez flexional puntual a partir de la curvatura modal $\phi_n''(x)$ sin tener que recurrir a $\phi_n''''(x_0)$, la cual presenta un error de precisión inadmisiblemente grande en la práctica (Gauthier et al., 2008); ni tener que obtener los momentos modales como en (Yang et al., 2013) o en (Maeck et al., 2000), lo cual requiere instrumentar toda la extensión de la viga.

Otro indicador de interés es la razón de reducción de rigidez flexional *de un tramo* (salud $H_k(x_0, \pm h_t)$). Para cualquier tramo de la parte sana de la viga, con longitud $2h_t$, dicha rigidez es simplemente $k_h = EI_h/(2h_t)$. Si el tramo involucra variación de rigidez flexional puntual, debe integrarse la flexibilidad flexional puntual a lo largo del tramo, i.e.:

$$k_0 = \left[\int_{x_0-h_t}^{x_0+h_t} EI(x)^{-1} dx \right]^{-1}. \quad (13)$$

A partir del cómputo de las magnitudes físicas k_h y k_0 , y notando que $EI(x) = EI_h H_{EI}(x)$, se define la salud $H_k(x_0, \pm h_t)$ del tramo $[x_0 - h_t, x_0 + h_t]$ como:

$$H_k(x_0, \pm h_t) = \frac{k_0}{k_h} = \left[\frac{1}{2h_t} \int_{x_0-h_t}^{x_0+h_t} H_{EI}(x)^{-1} dx \right]^{-1}. \quad (14)$$

Note que en teoría, tanto H_{EI} como H_k varían entre 0 (totalmente dañado) y 1 (totalmente sano), siendo H_k un indicador menos sensible al daño. Sin embargo, se verá que también es mucho menos sensible al error que se comete al estimarlo numéricamente.

Combinando las Ecs. (12) y (14), y notando que $1/\phi_n(x)$ varía mucho menos que $\phi_n''(x)$ (por lo que $\phi_n(x)$ se puede aproximar como una constante igual a su valor medio), se obtiene:

$$\begin{aligned} H_k(x_0, \pm h_t) &\approx \underline{\phi}_n(x_0, \pm h_t) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left[\frac{-1}{2h_t} \int_{x_0-h_t}^{x_0+h_t} \phi_n''(x) dx \right]^{-1} \\ &= -\frac{\underline{\phi}_n(x_0, \pm h_t)}{\underline{\phi}_n''(x_0, \pm h_t)} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

donde $\underline{\phi}_n''(x_0, \pm h_t)$ es el valor medio de la curvatura modal en el entorno $(x_0 - h_t, x_0 + h_t)$. Es decir, así como la razón de reducción de rigidez flexional *puntual* $H_{EI}(x_0)$ puede estimarse a partir de la *curvatura* modal $\phi_n''(x_0)$, la razón de reducción de rigidez flexional *de un tramo* $H_k(x_0, \pm h_t)$ puede estimarse a partir del *valor medio de la curvatura* modal $\underline{\phi}_n''(x_0, \pm h_t)$.

4 FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA POR DIFERENCIAS FINITAS

4.1 Interpretación clásica

Para estimar numéricamente la curvatura modal, se utiliza normalmente la clásica fórmula de diferencias finitas (FDF):

$$\phi_n''(x_0) = \phi_{nN}''(x_0, \pm h) + e_N = \frac{\phi_n(x_0-h) - 2\phi_n(x_0) + \phi_n(x_0+h)}{h^2} + \frac{\phi_n''''(\xi_4)h^2}{12} \quad (16)$$

donde $\phi_{nN}''(x_0, \pm h)$ es la curvatura modal numéricamente estimada, h es la separación entre puntos de muestreo (i.e. tamaño del paso), ξ_4 es algún número perteneciente al intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$ y e_N es el error numérico cometido al estimar la curvatura modal.

En la práctica, en lugar de conocer $\phi_n(x)$, se dispone de una medición experimental $\phi_{nE}(x)$ con incertidumbre $\pm\epsilon$, que conduce a un error de precisión $e_p = \pm \frac{4\epsilon}{h^2}$ (Burden y Faires, 2011). Para disminuirlo, suelen tomarse tamaños de paso h grandes (Moreno-García et al., 2014), lo cual conduce a errores numéricos e_N grandes; y, lo que es peor, sistemáticos y dependientes de h . Esto hace que la Ec. (12) sea útil para detectar y localizar daño, pero de difícil aplicación práctica para cuantificarlo físicamente.

4.2 Reinterpretación

Para salvar este inconveniente, se apela a la siguiente reinterpretación de las FDFs: “La misma FDF que permite estimar el valor de una derivada en un punto, es a su vez una estimación (usualmente mejor) del valor medio de dicha derivada a lo largo de un entorno, que rodea a dicho punto, y que tiene una extensión asociada a la disposición de puntos de muestreo de la FDF”. Como esta reinterpretación no se ha podido encontrar en la bibliografía, se demuestra a continuación para el caso de derivada segunda.

Si se integra la Ec. (16) entre $x_0 - \frac{h}{2}$ y $x_0 + \frac{h}{2}$ recordando que $\frac{\phi_n''''(\xi_4)h^2}{12}$ es el residuo de una expansión en serie de Taylor, y luego se divide por h , se obtiene:

$$\underline{\phi}_n''\left(x_0, \pm \frac{h}{2}\right) = \phi_{nN}''(x_0, \pm h) + \underline{e}_N = \frac{\phi_n(x_0-h) - 2\phi_n(x_0) + \phi_n(x_0+h)}{h^2} + \frac{\phi_n''''(\xi_3)h}{12} \quad (17)$$

donde ξ_3 es algún número perteneciente al intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$ y \underline{e}_N es el error numérico cometido al estimar el valor medio de la curvatura modal. Es notable que la misma fórmula de $\phi_{nN}''(x_0, \pm h)$ sirva para estimar tanto $\phi_n''(x_0)$ como $\underline{\phi}_n''\left(x_0, \pm \frac{h}{2}\right)$. Cuando se compara e_N con \underline{e}_N , se observa que se reduce en 1 el orden del error de aproximación (esto lo hace más grande pero menos variable); aunque también cambia su factor por uno, posiblemente, mucho más chico si:

$$\max_{x \in [x_0-h, x_0+h]} |\phi_n'''(x)| \ll \max_{x \in [x_0-h, x_0+h]} |\phi_n''''(x)|, \quad (18)$$

lo cual suele ocurrir en entornos dañados, como ha sido mostrado por Whalen (2008).

4.3 Comparación de errores numéricos

Para comparar cuantitativamente las cotas de e_N y \underline{e}_N , se considera a continuación un modelo simplificado de la curvatura modal en un entorno ampliado del daño $[x_0 - h_{d*}, x_0 + h_{d*}]$, que incluye al entorno dañado $[x_0 - h_d, x_0 + h_d]$ (i.e., $h_{d*} \geq h_d$).

Se supone que la curvatura tiene un valor de base $C_b > 0$ y se incrementa suavemente en el entorno dañado hasta $C_b + \Delta_C$, de manera que:

$$\phi_n''(x) = \begin{cases} C_b, & x_0 - h_{d*} \leq x < x_0 - h_d \\ C_b + \Delta_C \cos^2\left(\frac{\pi}{2h_d}x\right), & x_0 - h_d \leq x \leq x_0 + h_d \\ C_b, & x_0 + h_d < x \leq x_0 + h_{d*} \end{cases} \quad (19)$$

Derivando sucesivamente la Ec. (19) y tomando máximo valor absoluto, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [x_0 - h_{d^*}, x_0 + h_{d^*}]} |\phi_n'''(x)| &= 2\Delta_c \frac{\pi}{2h_d} = \frac{\pi\Delta_c}{h_d}, \\ \max_{x \in [x_0 - h_{d^*}, x_0 + h_{d^*}]} |\phi_n''''(x)| &= \frac{\pi^2\Delta_c}{2h_d^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

lo cual conduce a la conclusión de que:

$$\max |e_N| = \frac{2h_d}{\pi h} \max |e_N|. \quad (21)$$

Esto implica que $\phi_{nN}''(x_0, \pm h)$ será una mejor aproximación de $\phi_n''(x_0, \pm \frac{h}{2})$ que de $\phi_n''(x_0)$ en la medida en que el daño sea más concentrado en relación al tamaño del paso.

5 MÉTODO PROPUESTO

A partir de la Ec. (17) se observa que la Ec. (15) puede simplificarse simplemente teniendo en cuenta que $2h_t = h$, i.e.:

$$H_k \left(x_0, \pm \frac{h}{2} \right) \approx - \frac{\phi_n(x_0, \pm \frac{h}{2})}{\phi_{nN}''(x_0, \pm h)} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2. \quad (22)$$

donde $\phi_n \left(x_0, \pm \frac{h}{2} \right) \approx (\phi_n(x_0 - h) + 4\phi_n(x_0) + \phi_n(x_0 + h))/6$. Esta sencilla fórmula permite estimar la reducción de rigidez flexional *del tramo* que va desde $x_0 - \frac{h}{2}$ hasta $x_0 + \frac{h}{2}$ usando sólo 3 sensores, conociendo la separación h entre ellos y la longitud L de la viga. La ventaja más sobresaliente de esta fórmula es que el error cometido es muy poco sensible al tamaño del paso h , pudiéndose seleccionar éste último lo suficientemente grande como para reducir el error de precisión e_p .

Como referencia para la comparación de métodos, puede considerarse la aproximación:

$$H_{EI}(x_0) \approx - \frac{\phi_n(x_0)}{\phi_{nN}''(x_0, \pm h)} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad (23)$$

la cual se espera sea más sensible al tamaño del paso h , a menos que éste se tome muy pequeño; lo cual podría ser impráctico debido al aumento que produce en e_p . Este indicador está directamente relacionado con trabajos similares (Maecck et al., 2000; Yang et al., 2013), en los cuales se busca estimar la rigidez flexional *puntual* a partir de la curvatura modal.

Cuantitativamente hablando, la Ec. (21) implica que, a partir de $\phi_{nN}''(x_0, \pm h)$, es más preciso estimar $H_{EI}(x_0)$ que $H_k \left(x_0, \pm \frac{h}{2} \right)$ sólo si el daño se extiende notablemente por fuera de la zona cubierta por los sensores (i.e., $h_d > 1.57h$).

6 EJEMPLO NUMÉRICO

Para poner a prueba el método propuesto, se considera el modelo de elementos finitos, con elementos de viga (BEAM188 de ANSYS), de una viga simplemente apoyada compuesta por dos secciones acopladas, una rectangular hueca que representa la viga propiamente dicha y otra rectangular maciza que representa una masa agregada (sin aporte de rigidez). Sus propiedades se resumen en la Tabla 1.

Propiedad	Valor	Unidad
Longitud	2.5	m
Densidad	7850	Kg/m ³
Módulo de elasticidad	2e11	Pa

Alto de la sección rectangular hueca	0.20	m
Ancho de la sección rectangular hueca	0.40	m
Espesor de la sección rectangular hueca	0.01	m
Alto de la sección rectangular maciza	0.18	m
Ancho de la sección rectangular maciza	0.18	m
Longitud de cada elemento	0.001	m

Tabla 1: Propiedades de la viga tomada como ejemplo.

Se estudiaron 8 casos, los cuales simulan daño mediante reducción de los espesores de la sección rectangular hueca en el intervalo $[x_0 - h_d, x_0 + h_d]$, donde $x_0 = 1.0$ m y $h_d = 0.025$ m. En la Tabla 2 se describen estos casos, indicando el área y momento de inercia resultante de la sección transversal compuesta de la viga en la zona dañada.

Caso	D0	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7
Espesor de la cara superior (mm)	10	10	10	10	7.5	5.0	2.5	1.0
Espesor de la cara inferior (mm)	10	7.5	5.0	2.5	2.5	2.5	2.5	1.0
Área (E-02 m ²)	4.38	4.29	4.19	4.10	4.00	3.91	3.81	3.70
Momento de inercia (E-04 m ⁴)	0.82	0.73	0.62	0.48	0.44	0.39	0.31	0.20

Tabla 2: Propiedades seccionales para los casos estudiados.

Para la aplicación de las Ecs. (22) y (23), se tomaron los desplazamientos del primer modo flexional mediante una distribución de puntos de muestreo con dos separaciones distintas: $h = 0.10$ m y $h = 0.30$ m. Para evaluar la incidencia del error de precisión se redondearon los resultados a 5 y 3 cifras significativas (dígitos).

7 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La Figura 1 muestra los indicadores $H_{EI}(x)$ (de referencia) y $H_k\left(x, \pm \frac{h}{2}\right)$ (propuesto) para el caso de mayor daño (D7) y distintos tamaños de paso, comparando los valores reales (calculados a partir de las propiedades seccionales geométricas) con los estimados por las Ecs. (22) y (23). Se observa en la Figura 1(a) que cuando el tamaño del paso es similar al tamaño de la zona dañada, i.e. daño poco concentrado, estimar la reducción de rigidez flexional *puntual* (H_{EI}) es casi tan preciso como estimar la reducción de rigidez flexional *del tramo* (H_k). Sin embargo, cuando se usa un tamaño de paso más grande (Figura 1(b)), y por lo tanto el daño se vuelve relativamente más concentrado, se produce una fuerte subestimación del daño con H_{EI} , la cual no ocurre con el índice aquí propuesto H_k . Un aspecto interesante es que el daño no sólo incrementa la curvatura en la zona dañada sino que también la disminuye en las zonas no dañadas, lo cual se refleja como valores mayores a 1 en los indicadores H_k y H_{EI} .

La Figura 2 muestra los indicadores de daño para todos los puntos de muestreo (valores de x) y todos los casos analizados (D0-D7) en cuadrantes, donde la bisectriz separa las zonas de subestimación (superior izquierda) y sobreestimación (inferior derecha) del daño. Puede verse que, en todos los casos y en todas las combinaciones estudiadas, ambos indicadores subestiman el daño en mayor o menor medida, cuando este existe.

Se ve que pasar de la Figura 2 (a) a la (b) (i.e., agrandar el tamaño del paso) genera un gran cambio en el comportamiento de H_{EI} mientras que los puntos del indicador H_k permanecen esencialmente sobre la misma recta; la cual es a su vez más cercana a la bisectriz (i.e., resulta más preciso). La Figura 2(c) muestra el comportamiento de los indicadores cuando se

introduce un error de precisión (e_p), en este caso mediante un truncado de las formas modales a 3 cifras significativas ($\epsilon = \pm 0.05\% \phi(x)$). Al compararla con la Figura 2(a) se observa que la dispersión aumenta; principalmente en las zonas no dañadas (H_{EI} y H_k reales iguales a 1). Es decir, se produce una gran cantidad “falsos positivos” (para el daño) tanto con H_{EI} como con H_k . Esto se debe a que en las zonas cercanas a los apoyos, la curvatura es muy pequeña (en términos absolutos). Por lo tanto, pequeños errores de precisión en términos absolutos conducen a grandes errores de precisión en términos relativos (vea la Figura 1(c)). El camino obvio para la reducción de estos errores de precisión es el ensanchamiento del tamaño del paso (vea la sección 4.1). En este sentido, la Figura 2(d) muestra que usando $h = 0.3$ m se eliminan todos estos falsos positivos para el indicador propuesto H_k sin modificar esencialmente su comportamiento. Esto no sucede con el indicador de referencia H_{EI} , que reduce bastante los falsos positivos pero cambia significativamente su sensibilidad al daño (Figura 1(d) y Figura 2(d)).

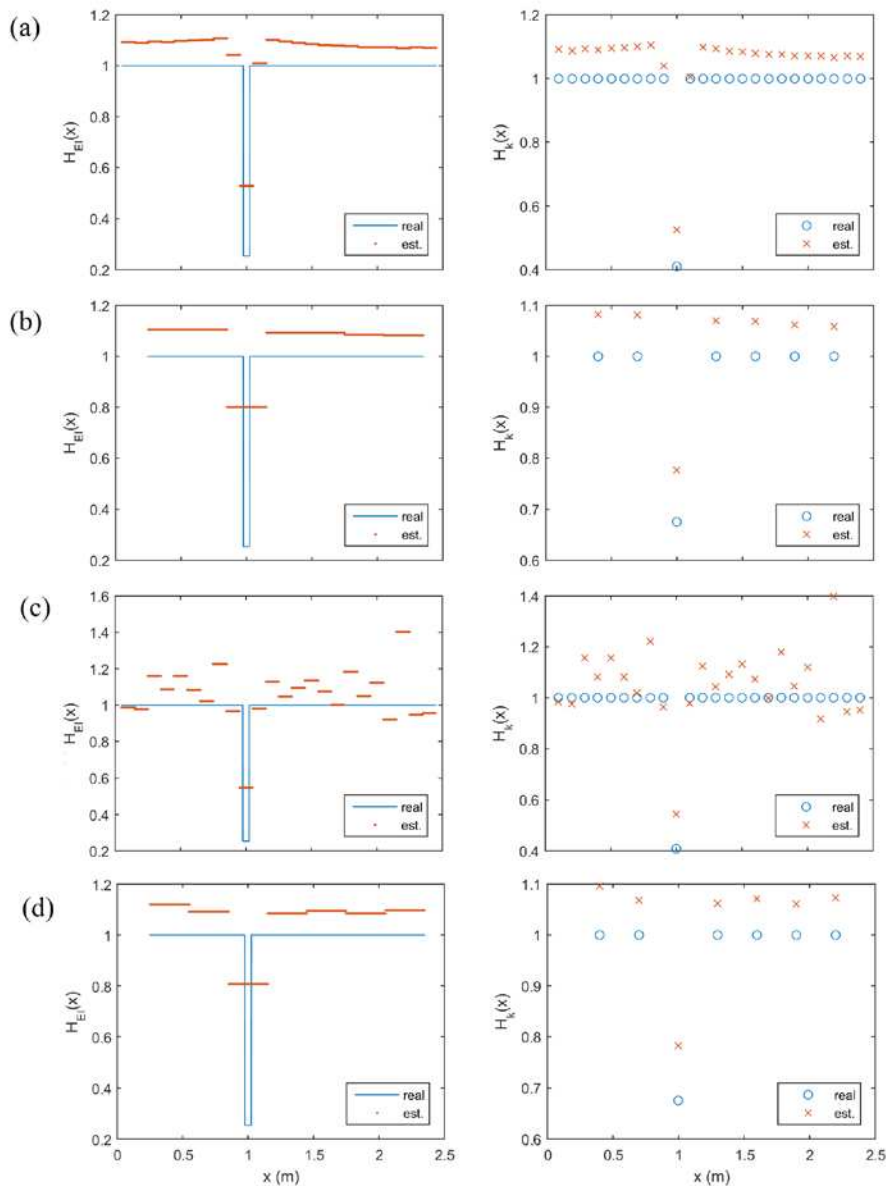


Figura 1: Indicadores de daño a lo largo de la longitud de la viga para el caso D7 usando (a) 5 dígitos y $h=0.1$ m, (b) 5 dígitos y $h=0.3$ m, (c) 3 dígitos y $h=0.1$ m, (d) 3 dígitos y $h=0.3$ m.

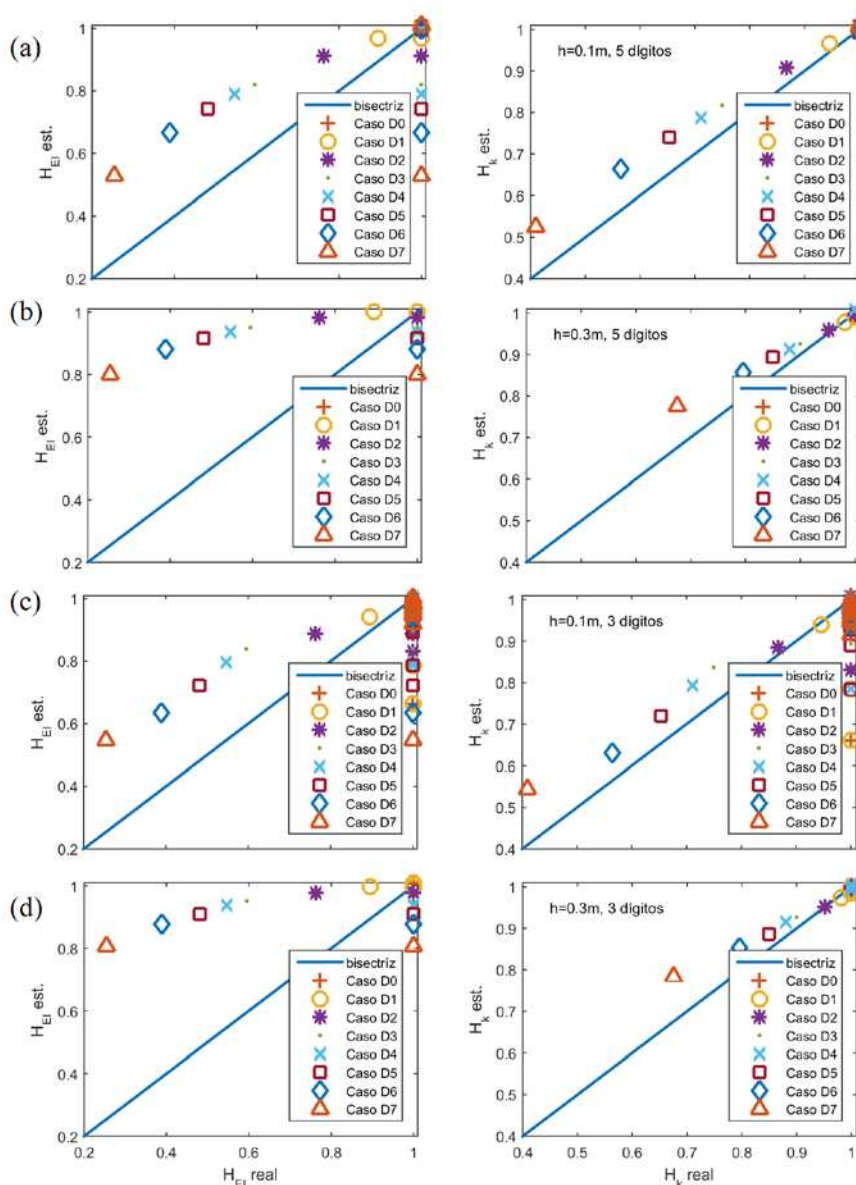


Figura 2: Indicadores de daño para todos los puntos de muestreo y todos los casos usando (a) 5 dígitos y $h=0.1$ m, (b) 5 dígitos y $h=0.3$ m, (c) 3 dígitos y $h=0.1$ m, (d) 3 dígitos y $h=0.3$ m.

8 CONCLUSIONES

Se desarrolló un método muy simple para cuantificar el daño en una viga, en términos de reducción relativa de la rigidez flexional, sólo a partir de la estimación numérica de la curvatura modal. Entre las ventajas del método propuesto respecto a otros de la literatura se destaca que se necesitan sólo 3 puntos de muestreo y no es necesario un modelo de “viga sana”.

Reinterpretando la fórmula de derivación numérica que usualmente se utiliza para estimar la curvatura, se encontró analíticamente que la estimación de la reducción de rigidez flexional *de un tramo* (indicador de daño propuesto) tiene menor error numérico que la reducción de rigidez flexional *puntual* (indicador de daño de referencia); especialmente cuando el daño es concentrado en relación a la separación entre sensores.

Mediante un ejemplo numérico, se mostró que cuando las formas modales tienen una incertidumbre despreciable y el daño no está concentrado en relación al tamaño del paso, es

similar el error cometido por ambos indicadores de daño. Sin embargo, cuando hay una pequeña incertidumbre en las formas modales, se produce un gran error de precisión en las estimaciones numéricas de las curvaturas, lo cual lleva a que ambos indicadores presente gran error. En el caso del indicador propuesto, este error de precisión puede reducirse considerablemente ensanchando el tamaño del paso sin caer en un gran error numérico. Por el contrario, usando el indicador de referencia, el ensanchamiento del paso conduce a un error numérico tan grande que lo inhabilita como cuantificador del daño.

Se concluye que el indicador propuesto, i.e. la reducción de rigidez flexional *de un tramo*, constituye un cuantificador físicamente representativo del daño en vigas con daño concentrado, pues es muy poco sensible al tamaño del paso, pudiéndose elegir este último lo suficientemente grande como para minimizar el error de precisión.

Es sabido que en la realidad, las hipótesis de los modelos de viga tienden a perder validez por la concentración de tensiones que se produce en discontinuidades como las generadas por daño. Por lo tanto, actualmente se está probando el método propuesto sobre un modelo de elementos finitos sólidos y se están planificando ensayos experimentales.

REFERENCIAS

- Burden, R.L., y Faires, J.D., Numerical Analysis, https://doi.org/10.1007/SpringerReference_20021, 2011.
- Clough, R.W., y Penzien, J., Dynamics of structures, Third Edit. ed., . Computers & Structures, Inc., Berkeley, CA 94704 USA, 1995.
- Dessi, D., y Camerlengo, G., Damage Identification Techniques via Modal Curvature Analysis: Overview and Comparison. *Mech. Syst. Signal Process.*, 53:181-205, <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2014.05.031>, 2015.
- Gauthier, J.F., Whalen, T.M., y Liu, J., Experimental validation of the higher-order derivative discontinuity method for damage identification. *Struct. Control Heal. Monit.*, 15:143-161, <https://doi.org/10.1002/stc.210>, 2008.
- He, J., Fu, Z.-F., y Fu, H.H.Z.-F., Modal Analysis, *Modal Analysis*, <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09645-2>, 2001.
- Maeck, J., Wahab, M.A., Peeters, B., De Roeck, G., De Visscher, J., De Wilde, W.P., Ndambi, J.-M., y Vantomme, J., Damage identification in reinforced concrete structures by dynamic stiffness determination. *Eng. Struct.*, 22:1339-1349, [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(99\)00074-7](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(99)00074-7), 2000.
- Moreno-García, P., Araújo dos Santos, J. V., y Lopes, H., A new technique to optimize the use of mode shape derivatives to localize damage in laminated composite plates. *Compos. Struct.*, 108:548-554, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.09.050>, 2014.
- Moughty, J.J., y Casas, J.R., A State of the Art Review of Modal-Based Damage Detection in Bridges: Development, Challenges, and Solutions. *Appl. Sci.*, 7:510, <https://doi.org/10.3390/app7050510>, 2017.
- Pandey, A.K., Biswas, M., y Samman, M.M., Damage detection from changes in curvature mode shapes. *J. Sound Vib.*, 145:321-332, [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90595-B](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90595-B), 1991.
- Whalen, T.M., The behavior of higher order mode shape derivatives in damaged, beam-like structures. *J. Sound Vib.*, 309:426-464, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.07.054>, 2008.
- Yang, Y., Liu, H., Mosalam, K.M., y Huang, S., An improved direct stiffness calculation method for damage detection of beam structures. *Struct. Control Heal. Monit.*, 20:835-851, <https://doi.org/10.1002/stc.1503>, 2013.