

COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE VIGAS TIMOSHENKO AFG CON VINCULACIÓN ELÁSTICA

DYNAMIC BEHAVIOR OF TIMOSHENKO AFG BEAMS WITH ELASTICALLY- RESTRAINED EDGE SUPPORTS

Gonzalo J. Gilardi^{a,b}, Carlos A. Rossit^{a,b} y Diana V. Bambill^{a,b}

^a *Departamento de Ingeniería (UNS), Instituto de Ingeniería-II-UNS (UNS-CIC), Universidad Nacional del Sur (UNS), Avenida Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>*

^b *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.
gonzalo.gilardi@uns.edu.ar, carossit@criba.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar*

Palabras clave: Vigas AFG, Viga Timoshenko, Vibración de vigas, Masa adosada, Rayleigh-Ritz, Cuadratura Diferencial Generalizada, Elementos Finitos.

Resumen. Se estudia el comportamiento dinámico de vigas de sección variable constituidas por un material cuyas propiedades varían gradualmente según la dirección de su directriz (AFG, sus siglas en inglés). Se utiliza para la descripción de su comportamiento flexional la teoría de vigas de Timoshenko que proporciona resultados más precisos que la clásica teoría de Euler-Bernoulli en el estudio general de vigas y más aún en el caso de vigas cortas o de altas frecuencias de vibración. Se consideran condiciones elásticas de vinculación en ambos extremos, modeladas mediante resortes traslacionales y rotacionales. Variando su rigidez se puede representar cualquier condición de vinculación en sus extremos, incluso las clásicas. Además, se considera la posibilidad de que la viga soporte una masa adosada en una posición arbitraria de su longitud. El problema se resuelve aplicando los conocidos métodos aproximados de: Rayleigh-Ritz, Cuadratura Diferencial Generalizada y Elementos Finitos. Se evalúan variados ejemplos numéricos, variando las propiedades del material y la sección transversal de la viga; con la finalidad de comparar la precisión entre los métodos. Los resultados concuerdan con casos particulares del modelo disponibles en la literatura científica.

Keywords: AFG beams, Timoshenko beam, Vibration of beams, Attached mass, Rayleigh-Ritz, Generalized Differential Quadrature, Finite elements.

Abstract. The dynamic behavior of beams of varying cross section constituted by materials whose properties vary gradually in the axial direction (AFG) is studied. The flexural behavior of the beam is described using the Timoshenko theory that provides more accurate results than the classic Euler-Bernoulli theory especially in the case of short beams or high vibration frequencies. General boundary conditions are considered by means of translational and rotational springs at both ends. In addition, the possibility that the beam supports an attached mass in an arbitrary position is considered. The problem is solved by applying three known approximated methods: Rayleigh-Ritz, Generalized Differential Quadrature and Finite Elements. Various examples are evaluated, varying the properties of the material and the cross section of the beam, in order to compare the accuracy between the methods. The results agree with particular cases of the model available in the scientific literature.

1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha incrementado la utilización de materiales funcionalmente graduados (FGM, sus siglas en inglés) en estructuras resistentes, en las cuales la viga es seguramente el elemento más difundido, dependiendo su vinculación del entorno estructural al que se halla unida. Por ello, los vínculos ideales rara vez son representativos del funcionamiento real de la viga y modelar una vinculación elástica con resortes traslacionales y rotacionales les confiere la mayor generalidad. Se adopta para describir el comportamiento a flexión de la viga vibrante la teoría de Timoshenko (1921, 1922) que tiene en cuenta la deformación por corte y la inercia rotatoria. No son numerosos los trabajos que consideran una viga Timoshenko con sus extremos vinculados elásticamente, debiendo mencionarse como pionero el trabajo de Abbas (1984) que halla la solución a través de un modelo de elementos finitos desarrollado por él mismo. En el presente trabajo además de la variación del material y de la sección transversal, se agrega la presencia de una masa concentrada en una posición arbitraria. Razones de espacio impiden un análisis detallado de la bibliografía, pero pueden consultarse al respecto los trabajos de Rossit et al. (2017) y Šalinić et al. (2018). En virtud de conducir a un sistema diferencial con coeficientes variables, el problema es resuelto mediante tres enfoques aproximados: Rayleigh Ritz, Cuadratura Diferencial Generalizada (GDQM, sus siglas en inglés) y Elementos Finitos (FEM, sus siglas en inglés), cuya precisión se compara. Se resuelven distintos casos que pueden ser representados con el modelo, verificando su pertinencia con resultados de casos particulares disponibles en la literatura científica.

2 GENERALIDADES DEL MODELO

La Figura 1 presenta el modelo de viga Timoshenko AFG que se emplea para el presente análisis. La sección transversal de la viga, de dos tramos, es de doble simetría (rectangular) con ancho b y altura h . En cada tramo, la sección transversal puede constituirse por materiales AFG diferentes y ser variable en forma ahusada en la dirección axial. El modelo contempla la presencia de una masa puntual m adosada en una posición arbitraria del eje \bar{x} , ($\bar{x} \in [0, L]$). Se considera vinculación elástica en los extremos, representada por resortes traslacionales y rotacionales, de constantes k_{tA} y k_{rA} , k_{tB} y k_{rB} respectivamente. El eje \bar{x} , con origen en la sección transversal inicial de la viga, coincide con el eje de flexión (en la posición sin deformar) y es normal al eje \bar{y} en el baricentro de dicha sección. Cada parámetro geométrico y del material se identifica con un primer subíndice que indica el extremo del tramo al que se está haciendo referencia, “0” para el extremo izquierdo y “1” para el derecho; y un segundo subíndice “1” o “2” para señalar el tramo en consideración.

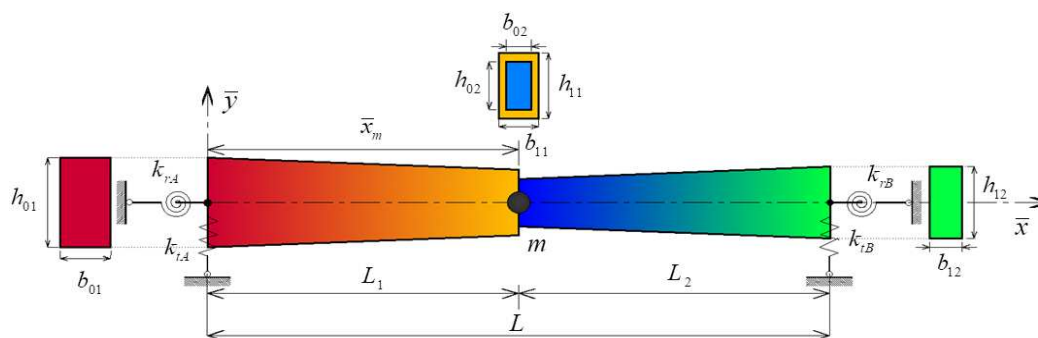


Figura 1: Viga AFG de dos tramos con vinculación elástica.

Las ecuaciones diferenciales que representan el comportamiento a flexión de la viga se obtienen de aplicar el principio de Hamilton y seguir el procedimiento de Banerjee (2001).

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\kappa GA \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}} - \psi \right) \right] - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \right] + \kappa GA \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}} - \psi \right) - \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

donde $v = v(\bar{x}, t)$ indica el desplazamiento del eje de la viga debido a la flexión y el corte, en la dirección el eje \bar{y} y $\psi = \psi(\bar{x}, t)$ es la rotación de la sección transversal alrededor del eje \bar{z} . En cuanto al material: $E = E(\bar{x})$ es el módulo de Young, $G = G(\bar{x})$ el módulo de corte y $\rho = \rho(\bar{x})$ la densidad; y a la geometría: $A = A(\bar{x})$ es el área de la sección transversal, $I = I(\bar{x})$ el momento de inercia de la sección y κ el factor de corrección de corte.

Las condiciones de borde para la viga AFG con vinculación elástica en los extremos son:

$$\bar{x} = 0: \left\{ \begin{array}{l} \kappa GA \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} - \psi = k_{tA} v \\ EI \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} = k_{rA} \psi \end{array} \right\}; \quad \bar{x} = L: \left\{ \begin{array}{l} \kappa GA \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} - \psi = -k_{tB} v \\ EI \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} = -k_{rB} \psi \end{array} \right\}. \quad (2)$$

3 LEYES DE VARIACIONES GEOMÉTRICAS Y DE CONSTITUCIÓN DE LA VIGA

El hecho de que la sección transversal sea variable y esté constituida por material AFG, requiere generar una expresión genérica que describa ambos comportamientos. Se define así:

$$P_k(\bar{x}) = P_{0k} f_{Pk}(\bar{x}) \quad \text{con } k = 1, 2. \quad (3)$$

$P_k(\bar{x})$ representa una característica geométrica o del material, que varía en la dirección axial de la viga desde un valor inicial P_{0k} , con una distribución $f_{Pk}(\bar{x})$. En particular, se tiene que:

$$\begin{aligned} E_k(\bar{x}) &= E_{0k} f_{Ek}(\bar{x}); \quad G_k(\bar{x}) = G_{0k} f_{Gk}(\bar{x}); \quad \rho_k(\bar{x}) = \rho_{0k} f_{\rho k}(\bar{x}); \\ I_k(\bar{x}) &= I_{0k} f_{Ik}(\bar{x}); \quad A_k(\bar{x}) = A_{0k} f_{Ak}(\bar{x}); \quad b_k(\bar{x}) = b_{0k} f_{bk}(\bar{x}); \quad h_k(\bar{x}) = h_{0k} f_{hk}(\bar{x}) \end{aligned} \quad (4)$$

donde $f_{Ak}(\bar{x}) = f_{bk}(\bar{x}) \times f_{hk}(\bar{x})$, $f_{Ik}(\bar{x}) = f_{bk}(\bar{x}) \times f_{hk}^3(\bar{x})$ por considerar sección transversal rectangular maciza. Además, se adoptan propiedades de material isótropo, por lo que:

$$G_k(\bar{x}) = E_k(\bar{x}) / 2(1 + \mu_k) \quad (5)$$

donde μ_k es el coeficiente de Poisson, y por lo tanto se cumple que $f_{Gk}(\bar{x}) = f_{Ek}(\bar{x})$.

Para los cálculos se consideran dos distribuciones para $\bar{x}_1 \in [0, L_1]$ y $\bar{x}_2 \in [0, L_2]$:

$$f_{P1}(\bar{x}) = 1 + \left(\frac{P_{11}}{P_{01}} - 1 \right) \left(\frac{\bar{x}_1}{L_1} \right)^{n_1}, \quad f_{P2}(\bar{x}) = 1 + \left(\frac{P_{12}}{P_{02}} - 1 \right) \left(\frac{\bar{x}_2}{L_2} \right)^{n_2}; \quad (6)$$

$$f_{P1}(\bar{x}) = 1 + \left(\frac{P_{11}}{P_{01}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\bar{x}_1}{L_1} \right) \frac{\bar{x}_1}{L_1}, \quad f_{P2}(\bar{x}) = 1 + \left(\frac{P_{12}}{P_{02}} - 1 \right) \left(\frac{\bar{x}_2}{L_2} \right)^2. \quad (7)$$

La Ec. (6) corresponde a una ley axial asimétrica, donde n_1 y n_2 indican la manera en que varían las características citadas; y la Ec. (7) a una ley axial simétrica.

4 MÉTODOS APROXIMADOS

Se implementan los métodos aproximados de Rayleigh-Ritz, GDQM y FEM, para obtener la solución al problema de vibraciones libres de vigas Timoshenko AFG. Debido a que el procedimiento de los mismos se encuentra especificado en los trabajos de Gilardi et al. (2017, 2018), se anexan seguidamente, algunas particularidades para completar dichos desarrollos.

4.1 Método de Rayleigh Ritz

En el funcional del sistema $J(V, \Psi)$ aparecen 4 términos relacionados con parámetros de rigidez adimensionales, que representan cada una de las condiciones elásticas de los vínculos en los extremos de la viga (Figural1):

$$K_{tA} = \frac{k_{tA} L^3}{E_{01} I_{01}}; K_{rA} = \frac{k_{rA} L}{E_{01} I_{01}}; K_{tB} = \frac{k_{tB} L^3}{E_{01} I_{01}}; K_{rB} = \frac{k_{rB} L}{E_{01} I_{01}}. \quad (8)$$

Las funciones coordenadas que se adoptan para aproximar las componentes espaciales del desplazamiento $V(x)$ y del giro $\Psi(x)$ son $p_i(x)$ y $q_j(x)$, respectivamente, y tienen la forma:

$$\{p_i(x)\}_{i=1}^{N_p} = (\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + 1) \{x^{i-1}\}_{i=1}^{N_p}, \quad \{q_j(x)\}_{j=1}^{N_q} = (\beta_1 x^2 + \beta_2 x + 1) \{x^{j-1}\}_{j=1}^{N_q}; \quad (9)$$

donde $N_p = N_q$ son el número de términos a sumar y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 son coeficientes que se determinan de cumplir simultáneamente las condiciones de borde elásticas de la Ec. (2).

4.2 Método de Cuadratura Diferencial Generalizada (GDQM)

Se indican las condiciones de borde elásticas, definidas en la Ec. (2), en términos de las reglas de cuadratura definidas por Bert y Malik (1997) para la viga Timoshenko.

$$\left. \begin{aligned} \frac{s_{01}^2}{\lambda} \frac{L}{L_1} \left[v_{51}(x_{i1}) \left(\sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} V_{i1} - \Psi_{i1} \right) \right]_{i=1} &= K_{tA} V_{i1} |_{i=1}; \\ \frac{L}{L_1} \left(v_{61}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} \Psi_{i1} \right) &= K_{rA} \Psi_{i1} |_{i=1}; \end{aligned} \right\} \text{con} \begin{cases} s_{01}^2 = \frac{L^2}{r_{01}^2} = \frac{A_{01} L^2}{I_{01}} \\ \lambda = \frac{2(1+\mu)}{\kappa} \end{cases} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{s_{01}^2}{\lambda} \frac{L}{L_2} C_E C_A \left[v_{52}(x_{i2}) \left(\sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} V_{i2} - \Psi_{i2} \right) \right]_{i=N_2} &= -K_{tB} V_{i2} |_{i=N_2}; \\ \frac{L}{L_2} C_E C_I \left(v_{62}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} \Psi_{i2} \right) &= -K_{rB} \Psi_{i2} |_{i=N_2}; \end{aligned} \right\} \text{con} \begin{cases} C_E = E_{02} / E_{01} \\ C_A = A_{02} / A_{01} \\ C_I = I_{02} / I_{01} \end{cases}$$

donde $v_{5k}(x_{ik}) = f_{Ek} f_{Ak}$, $v_{6k}(x_{ik}) = f_{Ek} f_{Ik}$ con $k = 1, 2$; y s_{01} es el parámetro de esbeltez de la viga, el cual relaciona a la longitud de la viga con el radio de giro r_{01} de la sección inicial.

4.3 Método de Elementos Finitos (FEM)

Análogamente, al procedimiento indicado para adosar una masa puntual (Gilardi et al. 2017). Las restricciones elásticas se introducen, en las matrices elementales de rigidez, adicionando los términos de energía de deformación de los resortes. Más específicamente:

$$\begin{aligned} \bar{x} = 0: & \left[k_{e(1)} \right] + k_{tA} a_1^2 \left[N_v(-1) \right]^t \left[N_v(-1) \right] + k_{rA} \left[N_\psi(-1) \right]^t \left[N_\psi(-1) \right]; \\ \bar{x} = L: & \left[k_{e(n_2)} \right] + k_{tB} a_2^2 \left[N_v(1) \right]^t \left[N_v(1) \right] + k_{rB} \left[N_\psi(1) \right]^t \left[N_\psi(1) \right]. \end{aligned} \tag{11}$$

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

n_1	$K_{tB} = K_{rB}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Solución	
1	0,1	4,57344	14,7879	29,0391	44,9902	61,8773	M.R-Ritz	
		4,57344	14,7879	29,0391	44,9902	61,8773	GDQM	
		4,57344	14,7879	29,0391	44,9902	61,8774	FEM	
		4,5745	14,7948	29,0774	45,1234	–	Shahba et al. (2011)	
	1	1	5,63133	16,1513	30,6199	46,7964	63,8098	M.R-Ritz
			5,63133	16,1513	30,6199	46,7964	63,8098	GDQM
			5,63133	16,1513	30,6199	46,7964	63,8098	FEM
			5,6326	16,1604	30,6660	46,9517	–	Shahba et al. (2011)
	10	10	8,71430	18,5650	32,3805	48,3086	65,1937	M.R-Ritz
			8,71429	18,5650	32,3805	48,3087	65,1937	GDQM
			8,71429	18,5650	32,3805	48,3087	65,1937	FEM
			8,7169	18,5780	32,4361	48,4822	–	Shahba et al. (2011)
2	0,1	4,53623	14,9553	29,5199	45,8574	63,1561	M.R-Ritz	
		4,53623	14,9553	29,5199	45,8574	63,1561	GDQM	
		4,53623	14,9553	29,5199	45,8574	63,1562	FEM	
		4,5369	14,4957	28,5028	45,9942	–	Shahba et al. (2011)	
	1	1	5,49744	16,2370	31,0175	47,5717	64,9794	M.R-Ritz
			5,49744	16,2370	31,0175	47,5717	64,9794	GDQM
			5,49744	16,2370	31,0175	47,5717	64,9795	FEM
			5,4986	16,2462	31,0647	47,7300	–	Shahba et al. (2011)
	10	10	8,38475	18,4994	32,7352	49,0757	66,3632	M.R-Ritz
			8,38474	18,4994	32,7352	49,0757	66,3632	GDQM
			8,38474	18,4994	32,7352	49,0757	66,3632	FEM
			8,3873	18,5128	32,7924	49,2531	–	Shahba et al. (2011)

Tabla 1: Coeficientes de frecuencia Ω_i para viga AFG simplemente ahusada con vinculación elástica.

El primer caso en consideración, estudiado por Shahba et al.(2011) empleando FEM, corresponde a una viga Timoshenko AFG de sección transversal simplemente ahusada, con ancho constante y altura variando linealmente. La ley de variación adoptada es:

$$A(x) = A_{01}(1 - cx) ; I(x) = I_{01}(1 - cx)^3 \quad \text{con } c = 0.5 \text{ y } x \in [0,1]; \tag{12}$$

donde c es el coeficiente que indica la relación de estrechamiento y cuyo rango de variación es $0 \leq c < 1$. Para $c = 0$ la viga es de sección uniforme y para $c = 1$ la viga es ahusada con

sección nula en $x=1$, lo cual constituye un límite teórico y no práctico. Por otra parte, el material AFG que compone a la viga está constituido por dos materiales: zirconia (ZrO_2 : 01) y aluminio (Al: 11), cuyas propiedades son:

$$E_{ZrO_2} = 200 \text{ GPa}; \rho_{ZrO_2} = 5700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; E_{Al} = 70 \text{ GPa}; \rho_{Al} = 2702 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \mu_{ZrO_2} = \mu_{Al} = 0,3. \quad (13)$$

y varían de acuerdo con la distribución axial asimétrica definida en la Ec.(6) con $n_1 = 1$ y 2. La viga AFG posee al extremo izquierdo empotrado, el cual se puede modelar adoptando $K_{tA} = K_{rA} = 1 \times 10^8$ de acuerdo a [Kocatürk y Simsek \(2005\)](#) y al extremo derecho con vinculación elástica, $K_{tB} = K_{rB}$. Además, se debe considerar $s_{01} = 10$ y $\kappa = 5/6$.

La [Tabla 1](#) exhibe los primeros 5 coeficientes de frecuencia adimensionales:

$$\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{(\rho_{01} A_{01}) / (E_{01} I_{01})}. \quad (14)$$

Se aprecia que la correlación entre resultados obtenidos es excelente, aunque difieren en relación con los valores que brindan [Shahba et al. \(2011\)](#) empleando solo $n_{e1} = 30$ elementos. La precisión, para los métodos empleados, se obtiene de implementar $N_p = 20$ términos de polinomios en Rayleigh-Ritz, $N_1 = 23$ nodos en GDQM, y $n_{e1} = 2500$ elementos en FEM.

Las generalidades del modelo brindan la libertad de variar diferentes parámetros geométricos, del material; e incluso las constantes elásticas de los resortes; por lo que sería factible estudiar una innumerable cantidad de casos. Es por eso, que el interés en los casos propuestos se enfoca en analizar vigas Timoshenko AFG con $s_{01} = 100$ y $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = 5/6$.

El material AFG elegido para el desarrollo de los cálculos, corresponde al propuesto por [Su et al. \(2013\)](#). El mismo está constituido por acero y alúmina (Al_2O_3), cuyas propiedades son:

$$E_{Ac} = 210 \text{ GPa}; \rho_{Ac} = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; E_{Alum} = 390 \text{ GPa}; \rho_{Alum} = 3960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \mu_{Ac} = \mu_{Alum} = 0,3. \quad (15)$$

Los valores de los coeficientes de frecuencia calculados estarán referenciados a los de una viga patrón constituida de acero y de sección constante. Análogamente, se adoptan estas consideraciones para el coeficiente de masa $M = m / \rho_{Ac} A_{01} L$.

Las composiciones de material AFG que se implementan para cada caso, son las que optimizan la rigidización dinámica de viga. Es decir, las que elevan más a los coeficientes de frecuencias. Esto se puede visualizar en el trabajo de [Gilardi et al. \(2016\)](#).

5.1 Casos de vigas AFG con ley asimétrica

En primer lugar, se propone estudiar vigas Timoshenko AFG de sección constante empotrada en $\bar{x} = 0$ y con vinculación elástica en $\bar{x} = L$. Análogamente al caso comparado se consideran $K_{tA} = K_{rA} = 1 \times 10^8$ para modelar el empotramiento. Se emplea la composición Alum-Ac variando de acuerdo a la distribución definida en la Ec. (6), con $n_1 = 1$.

En la [Tabla 2](#) y la [Tabla 3](#) se indican los primeros 2 coeficientes de frecuencia obtenidos para distintas combinaciones de parámetros de rigidez en $\bar{x} = L$. En ambas tablas, se observa una excelente concordancia en los resultados obtenidos. Se emplearon $N_p = 20$ términos de polinomios en Rayleigh-Ritz, $N_1 = 23$ nodos en GDQM, y $n_{e1} = 1000$ elementos en FEM.

Las condiciones de bordes que aparecen son: empotramiento ($K_{tB} = K_{rB} = 1 \times 10^8$), apoyo

simple ($K_{rB}=1 \times 10^8$ y $K_{rB}=0$), extremo guiado ($K_{rB}=0$ y $K_{rB}=1 \times 10^8$) y libre ($K_{rB}=K_{rB}=0$).

K_{rB}	10^8		10^6		10^4		10^2		Solución
K_{rB}	Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2	
10^8	29,9962	82,2259	29,9962	82,2258	29,9925	82,2160	29,6357	81,2853	M.R-Ritz
	29,9962	82,2259	29,9962	82,2258	29,9925	82,2159	29,6356	81,2848	GDQM
	29,9962	82,2259	29,9962	82,2258	29,9925	82,2159	29,6356	81,2848	FEM
10^4	29,8911	81,3777	29,8911	81,3776	29,8874	81,3681	29,5337	80,4647	M.R-Ritz
	29,8911	81,3777	29,8911	81,3776	29,8874	81,3680	29,5337	80,4646	GDQM
	29,8911	81,3777	29,8911	81,3776	29,8874	81,3680	29,5337	80,4646	FEM
10^2	21,0458	46,3941	21,0458	46,3941	21,0450	46,3934	20,9684	46,3278	M.R-Ritz
	21,0458	46,3941	21,0458	46,3941	21,0450	46,3934	20,9684	46,3277	GDQM
	21,0458	46,3941	21,0458	46,3941	21,0450	46,3934	20,9684	46,3277	FEM
10	10,2898	40,8924	10,2898	40,8923	10,2898	40,8900	10,2832	40,6609	M.R-Ritz
	10,2898	40,8924	10,2898	40,8923	10,2898	40,8900	10,2832	40,6609	GDQM
	10,2898	40,8924	10,2898	40,8923	10,2898	40,8900	10,2832	40,6609	FEM
1	7,57327	40,4049	7,57327	40,4049	7,57299	40,4023	7,54524	40,1554	M.R-Ritz
	7,57327	40,4049	7,57327	40,4049	7,57299	40,4023	7,54523	40,1554	GDQM
	7,57327	40,4049	7,57327	40,4049	7,57299	40,4023	7,54523	40,1554	FEM
0	7,19537	40,3518	7,19536	40,3518	7,19504	40,3492	7,16288	40,1004	M.R-Ritz
	7,19537	40,3518	7,19536	40,3518	7,19504	40,3492	7,16288	40,1003	GDQM
	7,19537	40,3518	7,19536	40,3518	7,19504	40,3492	7,16288	40,1003	FEM

Tabla 2: Coeficientes de frecuencia para Viga AFG con ley asimétrica y vinculación elástica.

K_{rB}	10		1		10^{-1}		0		Solución
K_{rB}	Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2	
10^8	27,3146	76,0744	22,5871	68,9843	21,0214	67,3556	20,8057	67,1521	M.R-Ritz
	27,3146	76,0743	22,5871	68,9842	21,0214	67,3555	20,8058	67,1520	GDQM
	27,3146	76,0743	22,5871	68,9842	21,0214	67,3555	20,8058	67,1520	FEM
10^4	27,2341	75,4393	22,5482	68,6289	20,9937	67,0607	20,7795	66,8646	M.R-Ritz
	27,2341	75,4392	22,5481	68,6289	20,9937	67,0607	20,7795	66,8646	GDQM
	27,2341	75,4392	22,5481	68,6289	20,9937	67,0607	20,7795	66,8646	FEM
10^2	20,4255	45,8751	18,9756	44,7759	18,3475	44,3471	18,2535	44,2853	M.R-Ritz
	20,4255	45,8751	18,9756	44,7759	18,3475	44,3471	18,2535	44,2853	GDQM
	20,4255	45,8751	18,9756	44,7759	18,3475	44,3471	18,2535	44,2853	FEM
10	10,2324	38,9784	10,0410	34,0176	9,91719	31,6822	9,89541	31,3241	M.R-Ritz
	10,2324	38,9784	10,0410	34,0176	9,91719	31,6822	9,89541	31,3241	GDQM
	10,2324	38,9784	10,0410	34,0176	9,91719	31,6822	9,89541	31,3241	FEM
1	7,32452	38,3350	6,40470	32,9189	5,71644	30,3604	5,58585	29,9686	M.R-Ritz
	7,32452	38,3351	6,40470	32,9189	5,71644	30,3604	5,58585	29,9686	GDQM
	7,32452	38,3350	6,40470	32,9189	5,71644	30,3604	5,58585	29,9686	FEM
0	6,90590	38,2650	5,80804	32,8004	4,94799	30,2195	4,77959	29,8245	M.R-Ritz
	6,90590	38,2650	5,80803	32,8003	4,94799	30,2195	4,77959	29,8245	GDQM
	6,90590	38,2650	5,80803	32,8003	4,94799	30,2195	4,77959	29,8245	FEM

Tabla 3: Coeficientes de frecuencias para Viga AFG con ley asimétrica y vinculación elástica.

5.2 Casos de vigas AFG con ley simétrica

El segundo caso propuesto corresponde a vigas que tienen simetría respecto al eje \bar{y} en la coordenada $\bar{x} = L/2$, ya sea de geometría, material y vinculación elástica; y para las cuales se analiza el comportamiento de rigidización al incorporar material AFG. Se modelan 4 vigas, empleando la ley definida en la Ec. (7) para la sección ahusada con $(h_{11}/h_{01}) = 0,5$, $h_{02} = h_{11}$ y $h_{12} = h_{01}$, y para el material, con composición acero-alúmina-acero (Ac-Alum-Ac). Los coeficientes $\Omega_{i,M}$, con subíndice M , indican que existe una masa puntual adosada en $\bar{x} = L/2$. Además, se elige $M = 1$ con inercia rotacional de la masa $c_m = 0,1$. Se adopta para todos los casos $K_{rA} = K_{rB} = 1 \times 10^8$. En las Tablas 4 a 7 se indican los coeficientes calculados.

Se emplean $N_p = 20$ términos de polinomios en Rayleigh-Ritz, $N_k = 27$ nodos en GDQM, y $n_e = 6000$ elementos en FEM. Se observa que cuando la viga no posee masa adosada se logra una mayor correlación en los resultados obtenidos; sin embargo, cuando se adosa el método de Rayleigh-Ritz tiene una pequeña disparidad, aunque debe recordarse que los resultados obtenidos son cota superior de los valores buscados.

$K_{rA} = K_{rB}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	$\Omega_{1,M}$	$\Omega_{2,M}$	$\Omega_{3,M}$	Solución
10^8	22,1892	60,5187	117,001	11,7353	37,1847	93,1057	M.R-Ritz
	22,1892	60,5187	117,001	11,7305	35,1746	92,7610	GDQM
	22,1892	60,5187	117,001	11,7305	35,1746	92,7609	FEM
10^4	22,1805	60,4954	116,958	11,7327	35,6632	93,1645	M.R-Ritz
	22,1805	60,4954	116,958	11,7267	35,1687	92,7267	GDQM
	22,1805	60,4954	116,958	11,7267	35,1687	92,7267	FEM
10	17,1804	49,3478	99,0518	9,45011	33,2959	78,1847	M.R-Ritz
	17,1804	49,3476	99,0511	9,44643	31,7818	77,8372	GDQM
	17,1804	49,3476	99,0511	9,44643	31,7818	77,8372	FEM
0	9,84961	39,1621	87,2545	5,66990	28,3715	66,9323	M.R-Ritz
	9,84961	39,1621	87,2542	5,66911	27,4671	66,6605	GDQM
	9,84961	39,1621	87,2542	5,66911	27,4671	66,6605	FEM

Tabla 4: Viga de sección constante con material homogéneo y vinculación elástica en los extremos.

$K_{rA} = K_{rB}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	$\Omega_{1,M}$	$\Omega_{2,M}$	$\Omega_{3,M}$	Solución
10^8	18,6660	44,6958	82,4353	7,14064	17,8112	63,5689	M.R-Ritz
	18,6660	44,6947	82,4167	7,12875	15,7811	62,6204	GDQM
	18,6660	44,6948	82,4168	7,12783	15,7791	62,6124	FEM
10^4	18,6615	44,6839	82,3964	7,13562	18,1594	63,2274	M.R-Ritz
	18,6615	44,6824	82,3930	7,12814	15,7806	62,6115	GDQM
	18,6615	44,6824	82,3930	7,12637	15,7786	62,5965	FEM
10	15,4172	36,9413	69,4579	6,20870	16,7145	53,5957	M.R-Ritz
	15,4161	36,9099	69,5602	6,19035	14,9477	52,4038	GDQM
	15,4161	36,9100	69,5603	6,18967	14,9466	52,4012	FEM
0	5,36459	24,1021	56,2995	2,43940	13,6246	39,6873	M.R-Ritz
	5,36446	24,0757	56,1379	2,43727	12,4183	38,6285	GDQM
	5,36446	24,0757	56,1380	2,43703	12,4171	38,6251	FEM

Tabla 5: Viga de sección ahusada con material homogéneo y vinculación elástica en los extremos.

$K_{rA} = K_{rB}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	$\Omega_{1,M}$	$\Omega_{2,M}$	$\Omega_{3,M}$	Solución
10^8	35,3651	93,1286	178,343	15,1635	50,6081	138,062	M.R-Ritz
	35,3651	93,1286	178,343	15,1574	47,8232	137,413	GDQM
	35,3651	93,1286	178,343	15,1579	47,8246	137,428	FEM
10^4	35,3481	93,0841	178,261	15,1550	50,4906	137,573	M.R-Ritz
	35,3481	93,0841	178,261	15,1546	47,8189	137,381	GDQM
	35,3481	93,0841	178,261	15,1528	47,8167	137,366	FEM
10	26,7123	74,5019	149,378	12,0635	46,1065	113,806	M.R-Ritz
	26,7111	74,4932	149,355	12,0566	43,3837	113,146	GDQM
	26,7111	74,4931	149,355	12,0570	43,3854	113,157	FEM
0	17,1099	61,1944	134,383	8,10352	40,8053	99,1188	M.R-Ritz
	17,1099	61,1943	134,382	8,10142	38,8409	98,6058	GDQM
	17,1099	61,1942	134,382	8,10168	38,8429	98,6164	FEM

Tabla 6: Viga de sección constante con material AFG y vinculación elástica en los extremos.

$K_{rA} = K_{rB}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	$\Omega_{1,M}$	$\Omega_{2,M}$	$\Omega_{3,M}$	Solución
10^8	29,7735	69,5043	127,603	8,95020	24,5149	95,2883	M.R-Ritz
	29,7734	69,5044	127,596	8,94813	21,0281	95,1917	GDQM
	29,7734	69,5043	127,596	8,94805	21,0276	95,1914	FEM
10^4	29,7639	69,4786	127,559	8,95954	24,9358	95,9553	M.R-Ritz
	29,7638	69,4788	127,548	8,94713	21,0272	95,1704	GDQM
	29,7638	69,4788	127,548	8,94518	21,0250	95,1579	FEM
10	23,3847	55,4135	105,935	7,54011	21,8498	77,7670	M.R-Ritz
	23,3832	55,4070	105,677	7,52253	19,8125	76,8697	GDQM
	23,3832	55,4070	105,677	7,52210	19,8115	76,8734	FEM
0	9,39781	38,4923	88,8830	3,42249	19,5924	61,8871	M.R-Ritz
	9,39781	38,4923	88,8830	3,41480	17,1557	58,8673	GDQM
	9,39781	38,4923	88,8830	3,41474	17,1545	58,8682	FEM

Tabla 7: Viga de sección ahusada con material AFG y vinculación elástica en los extremos.

Por otra parte, en la [Tabla 8](#) se indican los porcentajes de rigidización que se logran al emplear material AFG en los casos de vigas propuestos. La mayor rigidización se obtiene cuando la viga no posee masa adosada, la viga es ahusada y $K_{rA} = K_{rB} = 0$.

$K_{rA} = K_{rB}$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	$\Omega_{1,M}$	$\Omega_{2,M}$	$\Omega_{3,M}$	$A(\bar{x})$
10^8	59,38	53,88	52,43	29,21	36,10	48,29	Constante
10^4	59,37	53,87	52,41	29,17	41,58	47,67	
10	55,48	50,97	50,81	27,65	38,48	45,56	
0	73,71	56,26	54,01	42,92	43,82	48,09	
10^8	59,51	55,51	54,79	25,34	37,64	49,90	Ahusada
10^4	59,49	55,49	54,81	25,56	37,32	51,76	
10	51,68	50,00	52,52	21,44	30,72	45,10	
0	75,18	59,71	57,88	40,30	43,80	55,94	

Tabla 8: Porcentaje de rigidización de incorporar material AFG a las vigas de sección constante y ahusada.

6 CONCLUSIONES

El trabajo da certezas de que los métodos de Rayleigh-Ritz, GDQM y FEM brindan gran eficiencia y precisión en la resolución de este tipo de problemas. La complejidad de los casos presentados pone en evidencia el comportamiento de los métodos, a la hora de aproximar la solución.

Por otro lado, quedaron demostradas las ventajas estructurales de emplear FGM en el diseño de vigas y, además, que la presencia de una masa adosada en la viga produce una disminución en los valores de sus coeficientes de frecuencia naturales.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el patrocinio del presente trabajo a la Universidad Nacional del Sur (UNS), al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC). El mismo se llevó a cabo en el Departamento de Ingeniería y en el Instituto de Ingeniería de la UNS.

REFERENCIAS

- Abbas, B. A. H., Vibrations of Timoshenko beams with elastically restrained ends. *Journal of Sound and Vibration*, 97(4): 541–548, 1984.
- Banerjee, J.R., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 247:97–115, 2001.
- Bert, C.W. y Malik, M., Differential quadrature: a powerful new technique for analysis of composite structures. *Composite Structures*, 39(3–4):179–189, 1997.
- Gilardi, G.J., Díaz Valdez I.H., Bambill, D.V., Rossit, C.A. y Romero, F., Comportamiento dinámico de vigas constituidas por material funcionalmente graduado. *V CAIM*, 2016.
- Gilardi, G.J., Bambill, D.V. y Rossit, C.A., Diversos enfoques para el estudio del comportamiento dinámico de vigas Timoshenko AFG. *Mecánica Computacional*, XXXV: 2165–2185, 2017.
- Gilardi, G.J., Rossit, C.A. y Bambill, D.V., Free vibrations of tapered AFG Timoshenko beams. (Chapter.1; 1–37). *Yuen, J. (editor), Computational Mechanics (CM), Applications and developments. New York Nova Science Publishers*, 2018.
- Kocatürk, T. y Şimşek, M., Free vibration analysis of elastically supported Timoshenko beams. *Journal of Engineering and Natural Sciences*, 3:79–93, 2005.
- Rossit, C.A., Bambill, D.V. y Gilardi, G.J., Free vibrations of AFG cantilever tapered beams carrying attached masses. *Structural Engineering and Mechanics*, 61(5):685–691, 2017.
- Šalinić S., Obradovićb A. y Tomovićb A., Free vibration analysis of axially functionally graded tapered, stepped, and continuously segmented rods and beams. *Composites Part B*, 150: 135–143, 2018.
- Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, M.T. y Hajilar S., Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites: Part. B*, 42:801–808, 2011.
- Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.
- Timoshenko, S.P., On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bar. *Philosophical Magazine*, 41:744–746, 1921.
- Timoshenko, S.P., On the transverse vibrations of bars of uniform cross section. *Philosophical Magazine*, 43:125–131, 1922.